N° Ordre : 62 - 2011
Université Claude Bernard Lyon 1

Année 2011

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON

Délivrée par

L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1

ECOLE DOCTORALE 485 EPIC

DIPLOME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006)

Spécialité : Didactique des Mathématiques

Maha MAJAJ

L'enseignement de l'arithmétique en France au collège et à la transition collège / lycée.

Soutenue publiquement le 20 avril 2011

Membres du jury

ASSUDE Teresa	Professeure des universités	Rapporteur
BATTIE Véronique	Maître de conférences	co-directrice de thèse
DURAND-GUERRIER Viviane	Professeure des universités	co-directrice de thèse
GRUGEON Brigitte	Professeure des universités	Rapporteur
HABSIEGER Laurent	Directeur de recherches CNRS	Membre du jury
OUVRIER-BUFFET Cécile	Maître de conférences	Membre du jury

Dédicace

A la mémoire de mon Père,

A ma Mère,

A mes frères Yousef, Ammar

A mes sœurs Lama et Rana

A mes nièces Aya, Bayan, Chaza

A mes neveux Abed al-Razak et Abed al-Rahman

Je dédie ce travail

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Viviane Durand –Guerrier d'avoir accepté de diriger ce travail poursuivant ainsi l'aventure commencée au DEA. Plus qu'une encadrant ou une collègue, je crois avoir trouvé en elle une amie qui m'a aidé aussi bien dans le travail que dans la vie lorsque j'en avais besoin. Son soutien constant et ses encouragements maintes fois renouvelés, joints à un engagement fort et une disponibilité sans faille, ont permis à ce mémoire de s'élaborer au fil du temps. Je la remercie profondément et chaleureusement.

Je suis très reconnaissante envers Madame Véronique Battie qui a accepté d'être co-directrice de mon travail. Son aide m'a été extrêmement précieuse.

Je remercie Madame Teresa Assude et Madame Brigitte Grugeon d'avoir accepté de se rendre disponible pour être rapporteurs de cette thèse. Leurs commentaires sur mon travail m'encouragent à poursuivre dans la voie de la recherche.

Mers remerciements vont aussi à Madame Cécile OUVRIER-BUFFET et Monsieur Laurent HABSIEGER d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens à remercier Monsieur Philippe JAUSSAUD l'ancien directeur de laboratoire et Monsieur Philippe LAUTESSE le nouveau directeur de LIRDIST, qui m'ont accueillie avec générosité et gentillesse au sein du laboratoire LIRDHIST.

Je remercie également tous les doctorants du laboratoire LIRDHIST avec qui j'ai passé des moments très agréables.

Mes plus chaleureux remerciements s'adressent à toute l'équipe de l'IREM de Lyon, plus particulièrement et à Jocelyne, Christiane et Regis et René Mulet-Marquis.

J'adresse mes remerciements aux enseignants et aux élèves qui ont contribué à la réussite de mon expérimentation.

Je remercie tous mes amis Hodna, Berna, Assia, Chaza et Faiza pour leur soutien.

A toutes les personnes qui ont contribué

à la réalisation de ce travail et qui m'ont apporté

un soutien constant.

Table des matières

Introduction et problématique de la recherche

Cette thèse est consacrée à une étude didactique de l'enseignement de l'arithmétique, en France au collège et à la transition entre le collège et le lycée. Plus particulièrement, elle vise à l'étude didactique des différentes questions relatives aux nombres entiers, c.à.d. l'arithmétique dans le sens de la théorie élémentaire des nombres, qui comporte les objets suivants : relation de divisibilité ; concepts de division euclidienne, PGCD (Plus Grand Diviseur Commun), PPCM (Plus Petit Commun Multiple), nombres premiers entre eux, nombres premiers, la décomposition en facteurs premiers.

Rappelons que la théorie avancée des nombres fournit un cadre général d'étude des propriétés des nombres entiers et s'intéresse également à l'étude de certaines propriétés des nombres rationnels, réels et complexes qui dépendent directement des propriétés des nombres entiers. Nous n'abordons pas cet aspect dans notre travail.

Notre travail s'inscrit dans la continuité de l'étude que nous avions conduite dans le cadre de notre mémoire de Master. Notre recherche portait sur « L'enseignement de l'arithmétique au collège en France et en Syrie ». L'analyse comparée des programmes et des manuels scolaires français et des manuels officiels syriens de collège en cours au moment de l'étude (2005-2006) avait permis de mettre en évidence une différence significative concernant la place de l'arithmétique dans les deux systèmes éducatifs. En France, la place occupée par l'arithmétique, tant comme objet que comme outil (au sens de la dialectique outil-objet de Douady, 1986) était à cette période relativement réduite ; les notions aux programmes étaient présentées principalement en sixième et en troisième, et de manière isolée. Dans les manuels syriens, toutes les notions au programme étaient présentées dés la classe de sixième comme objet d'étude dans un chapitre intitulé : « Théorie des nombres », puis utilisées comme outil tout au long du collège. Pour déterminer le PGCD de deux nombres, dans les manuels syriens, l'accent était fortement mis sur la décomposition en facteurs premiers au détriment de l'algorithme d'Euclide, alors qu'en France, au moment de l'étude, la décomposition en facteurs premiers était absente des programmes, la méthode utilisée pour déterminer le PGCD étant l'algorithme d'Euclide.

On peut faire l'hypothèse que la place de l'arithmétique reste minorée dans le curriculum français, parce que c'est une discipline considérée comme difficile, et que ses apports potentiels pour les apprentissages mathématiques sont peu reconnus. Néanmoins, ceci pourrait sembler en contradiction avec le fait que les entiers naturels sont connus dès l'école primaire, et que, comme l'a montré Assude (1998), cette discipline a toujours été présente dans les programmes de formation des maîtres de l'école primaire, même lorsqu'elle avait disparu des programmes du secondaire. En outre, on assiste à la fin du XX° siècle à une réintroduction de l'arithmétique dans les programmes de l'enseignement secondaire. Il nous est donc apparu qu'au-delà de cette hypothèse très générale, il était pertinent de conduire une étude permettant de comprendre plus en profondeur ce phénomène d'instabilité de la place de l'arithmétique dans les programmes français du secondaire.

Dans le cadre de notre travail de thèse, qui s'est déroulé entièrement en France, nous avons donc choisi de nous centrer sur l'enseignement de l'arithmétique en France. Nous souhaitions étudier et questionner les évolutions des programmes français au collège et à la transition entre le collège et le lycée en France, en particulier pour essayer de comprendre ce qui motive la réintroduction de l'arithmétique dans l'enseignement secondaire (en classe de Troisième en 1999, en classe de seconde en 2000, en classe de spécialité mathématique en terminale S en 1998), les choix faits par les concepteurs de programme lors de cette réintroduction et les effets sur le savoir à enseigner. Ravel (2003) a étudié ce phénomène pour la classe de terminale S dans sa thèse intitulée : « Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne ». Elle a montré que, alors que l'un des objectifs de la réintroduction de l'arithmétique en terminale S était de pouvoir développer l'aspect algorithmique, cet aspect a été peu repris par les manuels et les enseignants en terminale scientifique, qui ont plutôt mis l'accent sur l'aspect raisonnement, qui est en effet très riche (Battie, 2003).

Ravel soutient que ceci est une des raisons des changements d'orientations des programmes de classe terminale scientifique en 2002, qui visent à renforcer cet aspect.

A notre connaissance, il n'existait pas en France de travaux analogues concernant le collège et le début du lycée, alors que les travaux d'Assude (1998) concernant la permanence de l'enseignement de l'arithmétique dans la formation des professeurs faisaient apparaître des variations importantes dans les choix d'enseignement depuis le début du XX° siècle. Ceci nous a conduit à nous interroger de manière approfondie sur la réintroduction de l'arithmétique dans les programmes de collège, et en classe de seconde. Pour cela, nous nous sommes posée les questions suivantes :

Quelles sont les contraintes et les conditions de la réintroduction de l'arithmétique au collège et Seconde ? Quels sont les changements qui ont été apportés lors de cette réintroduction et quelles en sont les raisons ? Sous quelles conditions et contraintes ces changements ont-ils été faits ? Comment l'arithmétique était-elle traitée dans les anciens programmes ? Comment les auteurs des manuels, et les professeurs prennent-ils en compte la réintroduction de l'arithmétique dans les programmes ?

Ces questions générales nous ont conduite à poser d'autres questions, plus circonscrites :

Quels sont a priori les choix d'enseignement possibles? Quels sont les choix de contenus en termes de définition, propriété, relations, théorèmes, algorithmes ? Quelles évolutions peut-on repérer dans les programmes depuis le début du XX° siècle ? Quel est le rapport personnel des enseignants de seconde aux objets de l'arithmétique ? Quel est le rapport personnel des élèves aux notions d'arithmétiques qu'ils ont étudiées.

Nous sommes amenée ainsi à étudier les évolutions de l'enseignement de l'arithmétique depuis le début XX$^{\text{ème}}$ siècle au collège et en classe de seconde pour chercher les raisons et les conditions écologiques de ces évolutions, ainsi que la viabilité des nouveautés introduites dans les dernières réformes en mettant en évidence les conditions et les contraintes pesant sur la réintroduction de l'arithmétique au collège et classe de Seconde. Nous prenons en compte également l'importance des questions liées à la transition entre le collège et le lycée. Nous conduisons une première étude expérimentale exploratoire du rapport personnel et des choix d'enseignements de professeurs de seconde concernant l'arithmétique, et du rapport personnel d'élèves de seconde aux notions d'arithmétique enseignées au collège et en seconde, au moyen de deux questionnaires, l'un adressé à des professeurs de seconde, l'autre adressé à des élèves de seconde, dont les professeurs ont répondu au premier questionnaire.

Les questions posées plus haut ont été à la base de notre problématique et ont guidé les choix théoriques et méthodologiques que nous présentons dans le chapitre II, après avoir présenté, au chapitre I, une étude des travaux existants sur l'arithmétique dans le monde anglo-saxon et en France.

Le chapitre III a pour objet, dans un premier temps, d'étudier l'organisation mathématique dans le savoir savant, et dans un deuxième temps, de dégager les différents types des définitions en référence au travail d'Ouvrier - Buffet (2003).

Dans le chapitre IV et V, nous nous centrons sur l'étude des choix d'enseignement de l'arithmétique effectués dans deux institutions : le collège et la classe de Seconde et sur les contraintes institutionnelles que ces choix imposent. Le chapitre IV vise à analyser les programmes de collège et Seconde de 1902 à 2010. Le chapitre V complète l'analyse des programmes par l'étude des manuels de deux institutions de 1969 à 2010, et présente ensuite une analyse écologique et praxéologique de trois manuels les plus utilisés par les enseignants interrogés dans notre expérimentation en classe de Seconde.

L'analyse du rapport personnel des professeurs et de leurs choix d'enseignement sera présentée dans le chapitre VI ; l'analyse du rapport personnel d'élèves de seconde aux notions d'arithmétique enseignées au collège et en seconde fait l'objet du chapitre VII, qui comporte en outre une mise en perspective des réponses des élèves avec celles de leurs enseignants.

PARTIE 1

CHAPITRE I

Travaux didactiques sur l'arithmétique
« Théorie des nombres »

Dans ce chapitre, nous présentons un aperçu des travaux existant sur l'arithmétique, au sens « théorie élémentaire des nombres ». D'une manière générale, les recherches en didactique concernant l'arithmétique sont assez peu nombreuses, en particulier en France ; on trouve cependant un ensemble assez conséquent de travaux anglo–saxons concernant essentiellement la formation des professeurs de l'école primaire. Le faible nombre de travaux français sur l'arithmétique peut être justifié par le fait que l'arithmétique a été absente des programmes de l'enseignement secondaire pendant une vingtaine d'années jusqu'à sa réintroduction en 1998. Si l'arithmétique est traitée dans les travaux anglais comme une véritable problématique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique pour identifier les difficultés relatives à ses objets, elle est, par contre, étudiée dans les travaux français pour examiner sa viabilité dans l'enseignement lorsqu'elle était absente (Assude, 1998), et lorsqu'elle est réintroduite (Ravel, 2003). On trouve également un petit nombre de brochures publiées par les IREM qui sont consacrées à l'enseignement de l'arithmétique dans le secondaire.

Dans ce qui suit, nous présentons les travaux que nous avons retenus sur l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique dans les travaux anglo-saxons d'une part, et dans les travaux français d'autre part.

I. Travaux anglo-saxons

Les recherches faites sur la théorie des nombres se divisent en trois catégories :

- Recherches relatives à l'apprentissage et l'enseignement des concepts de la théorie des nombres tels que les nombres premiers et la divisibilité.
- Recherches concernant des objets plus généraux comme la preuve et la généralisation ; ces travaux utilisent les concepts de la théorie des nombres comme un contexte.
- Recherches utilisant la théorie des nombres comme moyen pour accéder au domaine affectif de l'apprenant.

Nous ne présentons que la première catégorie des recherches qui sont consacrées spécifiquement à l'étude des principaux concepts de la théorie des nombres. Cette catégorie de travaux correspond au cœur de notre étude.

Dans les travaux que nous avons retenus, les auteurs se sont intéressés à l'étude des difficultés que rencontrent les enseignants en formation, et à examiner les connexions qu'ils font entre ces concepts. Zazkis et Campbell se sont intéressés à l'étude de la compréhension par ce public des concepts de la théorie de nombres tels que : la division euclidienne, la divisibilité, les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers. Certains de leurs travaux et ceux d'autres chercheurs sont regroupés dans deux ouvrages : le premier en 2002 intitulé : « *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction.* » et le deuxième en 2006 sous le titre : *Number theory in mathematics education* ». Nous signalons que la plupart des travaux proposés ici se trouvent dans le premier ouvrage.

Pour présenter cet ensemble de travaux, nous avons choisi de proposer les concepts de la théorie des nombres suivant l'organisation suivante : division euclidienne (I.1), divisibilité (I.2), Nombres premiers (I.3) , Décomposition en facteurs premiers (I.4).

Ce choix de présentation ne signifie évidemment pas que nous considérons ces concepts de manière isolée. Nous allons trouver au contraire que la plupart de ces travaux mettent l'accent sur l'articulation entre ces concepts et montrent que plusieurs difficultés rencontrées par les enseignants en formation peuvent être mises en lien avec l'absence de connexion établie entre les concepts de la théorie des nombres. Enfin notons que le public de la plupart de ces travaux, notamment le travail de Zazkis, regroupe des enseignants en formation de l'école élémentaire. Nous avons choisi de les présenter, car ces recherches traitent des concepts de la théorie élémentaire des nombres qui sont au programme de collège et de la classe de seconde en France, et sont au cœur de notre travail de thèse.

I.1 Travaux sur la division euclidienne

Nous avons retenu deux articles relatifs à la division euclidienne : Campbell (2002), Zazkis (1998). Les deux articles s'interrogent sur la compréhension de la division euclidienne chez les enseignants en formation de l'école élémentaire. Les concepts, les procédures et le langage de la division euclidienne sont la préoccupation de Campbell, tandis que Zazkis s'est intéressée plus particulièrement à l'ambigüité lexicale de deux termes « diviseur » et « quotient ». Dans ce qui suit, nous allons les présenter brièvement.

I.1.1 Campbell (2002)

La problématique de Campbell, dans son article intitulé « *Coming to Terms with Division: Preservice Teacher's Understanding* »; concerne l'identification des phénomènes linguistiques, conceptuels, et procéduraux associés à la compréhension par les enseignants en formations du concept de la division euclidienne.

Pour lui, la division est une notion à multiples facettes, elle est soumise à plusieurs interprétations étroitement liées en mathématiques. La division peut être vue comme un partitionnement d'une quantité concrète en nombre entier de parties, mais il y a des conditions formelles sur la division relatives aux domaines sur lesquelles il est défini. L'auteur s'intéresse à la question suivante : les enseignants en formation comprennent-ils les différences conceptuelles et procédurales entre la division des entiers et la division des rationnels ? Pour étudier cette question, il a réalisé des entretiens avec 21 enseignants volontaires parmi un groupe d'étudiants inscrits dans un cours professionnel : « Fondements des mathématiques pour les enseignants ». Le cours comportait des sujets de base de la théorie élémentaire des nombres tel que la divisibilité, la décomposition en facteurs premiers ; la division euclidienne n'était pas explicitement traitée dans le cours.

Il a proposé aux enseignants des problèmes en demandant d'identifier le quotient et le reste de la division euclidienne dans des situations différentes :

- Situation familière : trouver le quotient et le reste de la division de 21 par 2.

- Nouvelle situation : avec la décomposition en facteurs premiers : trouver le couple (q, r) correspondant à la division de M par 15 ; $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$

- Situation concernant l'utilisation de la calculatrice : trouver le couple (q, r) correspondant à la division de 10561 par 24, Est ce que la calculatrice vous aide et, si oui, comment ?

- Situation faisant un appel au théorème de la division euclidienne ($A = 6 \times 147 + 1$, trouver le couple (q, r) correspondant à la division euclidienne de A par 2, et par 6).

- Situation demandant de montrer si la division en général et la division euclidienne plus particulièrement peuvent être considérées comme un inverse de la multiplication.

Par ces situations, l'auteur cherche à savoir si les participants peuvent mettre en relation des expressions langagières avec les valeurs associées au quotient et reste ou mobiliser des concepts familiers dans un nouveau contexte. Il souhaite également explorer ce qu'il en est de la compréhension tacite du théorème de la division par les participants, et examiner les différentes manières dont les enseignants peuvent établir la relation entre la division des entiers et la division des rationnels.

Nous détaillerons les résultats présentés par les auteurs concernant la relation entre la division euclidienne et la décomposition en facteurs premiers plus loin dans le paragraphe (I.3.2.1) qui est consacré à cette dernière notion

Les données recueillies et les analyses des auteurs montrent que les participants ont rencontré des difficultés pour traiter les problèmes proposés, difficultés que nous détaillons ci-dessous.

- **Concernant les termes de la division,** l'auteur a identifié deux difficultés principales

Pour certains participants, le reste de la division est la partie décimale du quotient rationnel, tandis que d'autres participants ne prennent pas en compte le fait que le reste doit être inférieur strictement au diviseur, dans le cas où on leur propose l'écriture $21 = 2 \times 9 + 3$.

Ainsi, le fait que le quotient et le reste de la division euclidienne doivent être entiers, et le reste doit être inférieur strictement au diviseur, n'était pas évident pour ces participants.

Il montre que les participants ayant donné l'écriture ($21 = 2 \times 9 + 3$) ont pensé à la disposition quotitive[1] de la division, alors que les participants ayant utilisé l'approche fractionnaire[2], ont pensé à la disposition partitive de la division.

L'auteur explique que, dans cette étude, la compréhension des enseignants en formation du concept de division semble être compromise par les manques concernant les domaines numériques, les expressions symboliques et les définitions. Il fait l'hypothèse que ces difficultés peuvent être provoquées par l'ambigüité contextuelle des termes tels : division, dividende, diviseur, quotient et reste.

- **Concernant la division euclidienne comme division théorème,** l'auteur montre que très peu des participants ont pu identifier le couple (q, r) correspondant à la forme donnée tandis que la relation entre la divisibilité et la division euclidienne était évidente pour les participants. De nombreux participants répondent correctement en utilisant une méthode consistant à calculer explicitement le nombre donné, puis à effectuer la division.

Dans la question proposant d'identifier le reste et le quotient de la division de A par 2 et par 6 où $A = 6 \times 147 + 1$, le reste de la division de A par 6 a été identifié par certains participants comme une addition du quotient après avoir calculé $(6 \times 147) | 6$ du reste (càd : le reste=$147 + 1$). De même, le quotient est identifié par d'autres participants dans la division de A par 2 comme une addition du quotient après avoir calculé $(6 \times 146) | 2$ et du reste (càd : le quotient $= 3 \times 147 + 1$).

L'auteur en conclut que ces résultats montrent que la relation entre la technique de la division euclidienne et le théorème de la division euclidienne n'était pas évidente pour la plupart des participants.

- Concernant la différence entre la division des entiers et la division des rationnels, cette étude a montré que les enseignants en formation n'ont pas une compréhension adéquate en ce qui concerne cette différence. Il met en évidence que l'usage du terme « quotient » peut induire une confusion du fait qu'il peut avoir des sens formels différents selon que l'on considère ce terme par rapport à la division des entiers ou à la division des rationnels, ceci devant être croisé avec le fait que ce terme a également différents sens conceptuels, selon que l'on considère la division partition ou la division quotition.

[1] On parle de division quotitive lorsque le quotient peut être considéré comme un scalaire permettant de répondre à la question « en a combien de fois b ? » ; lorsque le quotient peut être considéré comme la mesure d'une part dans le partage avec ou sans reste de a en b parts.

[2] L'approche fractionnaire est associée à la composante fractionnaire (partie décimale) du quotient rationnel, tandis que l'approche intégrale est liée à la composante entière du quotient rationnel.

Il justifie les réponses erronées des participants du fait que l'écriture de la division sous la forme « $A \div D = Q + R$ » peut être comprise par certains participants comme une équation conduisant à l'écriture suivante : « $A = D(Q + R)$.[3] »

En conclusion, les difficultés rencontrées par les participants dans cette étude sont synthétisées par les principaux points suivants :

- Il n'y a pas une familiarité avec la relation entre les nombres entiers, les nombres rationnels et leurs expressions symboliques.
- Il y a une tendance forte pour interpréter les expressions de la division en utilisant un langage informel.
- On observe un manque de distinction entre la division des entiers et la division des rationnels.

Nous soulignons que Campbell dans cette étude a mis l'accent sur le théorème de la division euclidienne, par le fait que dans le couple (q, r), q et r doivent être des nombres entiers naturels et que le reste doit être inférieur strictement au diviseur, et par la nécessité de mettre en place ce théorème pour conclure après avoir effectué la division euclidienne. Notons cependant que, dans cette étude, il n'a pas mis en évidence l'unicité du couple (q, r). L'ambiguïté des expressions de la division euclidienne, en particulier le terme « quotient », mise en évidence par Campbell, est l'objet d'étude du travail de Zazkis que nous présentons ci–dessous.

I.1.2 Zazkis (1998)

Zazkis, dans son article : « Divisors and Quotients : Acknowledging Polysemy », est amenée à étudier le langage de la division euclidienne. Elle s'intéresse plus spécifiquement à étudier la polysémie[4] des deux termes « diviseur » et « quotient » c'est-à-dire les différentes significations associées à ces deux termes.

Pour elle, la polysémie de « diviseur » et « quotient » présente une ambigüité lexicale et cette ambiguïté ne relève pas de la différence entre l'usage familier et l'usage mathématique ; elle est interne au contexte mathématique lui-même.

Elle explique que le diviseur a deux sens dans le contexte mathématique de la division :

I. Premier sens : parmi les termes de la division, c'est le nombre par lequel on divise.

[3] En France, cette écriture n'est en général pas utilisée.

[4] On parle de polysémie lorsqu'un même mot peut avoir des significations différentes selon les contextes ; la signification d'un terme polysémique est le plus souvent spécifiée par le contexte (mais pas toujours) ; la polysémie peut aussi bien se produire entre l'usage dans un contexte familier et le registre mathématique, que dans le registre mathématique lui-même.

II. Deuxième sens : il est associé à la définition mathématique formelle de diviseur dans l'ensemble des entiers, formulée en termes de multiplication et division de la manière suivante :

(a) En termes de multiplication: *« For any two whole numbers a and b, where b is non-zero, b is a divisor (or factor) of a if and only if there exists a whole number c such that b c = a. » (P.27)*

(a) En termes de division: *« b is divisor of a in this sense if and only if the division of a by b results in a whole number, with no remainder. » (p.27)*

Nous ajoutons que la définition ci-dessus est en fait celle de la relation « être un diviseur de » qui est la relation réciproque de la relation « être divisible par ». De ce fait, l'ambigüité lexicale renvoie également ici à une ambiguïté sur le statut logique des termes.

De la même manière, le mot « quotient » a deux sens, selon que l'on considère la division euclidienne ou la division dans un anneau (Q) ou un corps (R) :

I. Premier sens : il désigne le résultat de la division.

II. Deuxième sens : ce terme concerne la division euclidienne ; il correspond à la partie entière du résultat dans Q ou R (au sens I).

Les données de cette étude sont recueillies lors d'une discussion et d'entretiens avec des enseignants de l'école élémentaire en formation.

Les résultats obtenus à l'issue de la discussion en classe indiquent que 19 participants interrogés sur le quotient et le reste de la division de 12 par 5 ont donné comme réponse 2 pour le quotient et 2 pour le reste tandis que 37 participants ont donné comme quotient 2.4 ou 12| 5 ; ces réponses sont justifiées à l'aide des références qui étaient disponibles pour les participants, dont les manuels et les dictionnaires. Les participants ayant donné le quotient 2, ont expliqué le quotient en donnant le sens (II) associé à la division euclidienne, tandis que les participants ayant donné la réponse 2.4 et 12| 5 ont expliqué le quotient comme le résultat de la division.

Les résultats obtenus lors des entretiens montrent que le sens attribué au terme « quotient » par les participants est différent de celui retenu par l'interviewer.

Zazkis explique que le mot « quotient » apparaît souvent dans la classe avec « somme », « différence » et « produit » pour désigner le résultat de chacune des quatre opérations arithmétiques. Contrairement au cas de l'opération de « addition » et « multiplication », la signification de « quotient » est ambiguë lorsqu'il désigne le résultat de la division, car l'ensemble des entiers est clos pour l'addition et la multiplication, alors qu'il n'est pas clos par rapport à la division. La signification de quotient dépend du contexte d'usage de ce terme, soit dans la division des entiers où le résultat est le quotient et reste entiers, soit dans la division des rationnels, dans laquelle le terme quotient désigne le résultat de l'opération. L'auteur montre que dans le cas du terme « diviseur », la construction grammaticale permet de distinguer entre les deux interprétations. L'article indéfini « un » avec la préposition « de » dans l'expression : « un diviseur de » oriente vers l'interprétation en termes de relation. Alors que l'article défini « le » avec la préposition « dans », dans l'expression « le diviseur dans », oriente vers l'interprétation « le nombre par lequel on divise ». Ceci permet donc en principe de lever l'ambiguïté. Mais ce n'est pas le cas du terme « quotient ». En effet, la forme grammaticale ne donne aucune indication quand à l'interprétation. Lorsqu'on parle de quotient et de reste, le sens de quotient est évident car il est associé à la division euclidienne, mais quand on parle seulement de quotient, ce terme comporte une ambigüité.

Elle explique qu'on utilise l'extension de sens pour certains mots dans un contexte mathématique, par exemple, le sens de la multiplication, qui est vue au début comme une addition répétitive, est étendu des nombres entiers aux nombres décimaux et réels et rationnels. Cette extension de sens peut être vue comme un usage métaphorique du mot « multiplication ». Cette métaphore apparait naturelle lorsqu'on construit nos connaissances mathématiques. Les opérations qui résultent de ce sens étendu sont cohérentes avec le sens originel, par exemple, l'extension de l'addition ne crée pas de confusion : 17 est la somme de 12 et 5 quelque soit l'ensemble de nombres considérés (entiers, rationnels, réels). Mais le cas de la division est différent, l'extension de la division des entiers à la division des rationnels ne conserve pas sa cohérence. On pourrait néanmoins remarquer qu'une difficulté du même ordre se présente déjà lorsqu'on étend l'addition aux nombres relatifs.

L'auteur souligne enfin que les éléments qui permettent en principe de déterminer la signification des termes, comme le contexte ou la forme grammaticale, ne sont pas toujours suffisants. Et elle fait l'hypothèse que proposer des activités appropriées didactiquement pourrait permettre de révéler les conflits de signification et de les résoudre.

Nous soulignons que Zazkis a montré l'ambigüité d'expressions liées à la division euclidienne, mais qu'elle n'a pas mis en évidence le fait que l'explicitation de la distinction entre relation et propriété pourrait aussi jouer un rôle important pour lever ces ambigüités.

Les travaux de Campbell et Zazkis, mettent en évidence les difficultés rencontrées par les enseignants en formation de l'école élémentaire, relatives à la division euclidienne et au vocabulaire associé, et montrent la nécessité d'un travail spécifique sur ces points.

I.2. Travaux sur la divisibilité

La divisibilité occupe une place privilégiée dans les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des concepts et des méthodes de la théorie élémentaire des nombres. Les travaux que nous présentons ci-dessous sont des travaux consacrés à la divisibilité et la structure multiplicative (Zazkis et Campbell, 1996), (Brown et al, 2002), des travaux relatifs aux concepts de multiple et de diviseur (Zazkis, 2000), et des travaux associés au langage de la théorie des nombres notamment la divisibilité (Zazkis, 2002).

I.2.1. Divisibility and multiplicative structure (Zaksis & Campbell, 1996)

Nous présentons d'abord le travail de Zazkis et Campbell (1996) intitulé *"Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice teachers' understanding"*, car leur travail sera un outil dans le travail de Bown et al (2002) sur le concept de divisibilité.

Dans ce texte, Zazkis et Campbell rapportent les résultats d'une étude sur la manière dont les enseignants en formation comprennent les concepts de la théorie des nombres, et en particulier le concept de la divisibilité et la structure multiplicative des nombres naturels, et ils visent à analyser et décrire les stratégies cognitives utilisées dans la résolution des problèmes. Pour conduire cette étude, ils se réfèrent à la théorie APOS, dont ils se proposent en outre d'étudier dans quelle mesure elle permet de comprendre comment se construit le concept de divisibilité chez les apprenants.

Ils présentent la théorie APOS (action, processus, objet et schéma) qui a été proposée par Dubinsky (1991) pour analyser la construction des connaissances mathématiques de la manière suivante : l'action est une transformation des objets pour obtenir d'autres objets. Lorsque l'action totale peut se dérouler entièrement dans l'esprit d'un individu ou peut être imaginée comme ayant lieu sans que la personne passe nécessairement par toutes les étapes spécifiques, l'action a été intériorisée pour devenir un processus. Les nouveaux processus peuvent aussi être construits en inversant ou coordonnant les processus existants. Quand un processus peut être transformé par une action, alors on dit que le processus a été *encapsulé* pour devenir un objet. La construction des connexions qui associent les actions, les processus et les schémas à un objet particulier est vue comme la thématisation du schéma associé à cet objet. Chaque objet est ensuite repris comme un noyau d'un schéma.

Les données de cette étude ont été recueillies lors d'entretiens conduits avec 21 enseignants en formation de l'école élémentaire. L'analyse des réponses des participants est divisée en trois parties : a) description du développement du concept de divisibilité suivant la théorie d'APOS, (b) étude des relations conceptuelles et procédurales entre la divisibilité et la division, (c) étude des critères de divisibilité.

Dans la première partie de l'analyse, Zazkis et Campbell ont examiné les réponses des participants pour deux problèmes, en s'appuyant sur la théorie d'APOS. Nous allons présenter ici un de ces deux problèmes, puis nous indiquerons les étapes par lesquelles les participants sont passés pour construire le concept de divisibilité et qui ont été identifiées par les auteurs:

"Consider the number M = $3^3 \times 5^2 \times 7$.

Is M divisible by 7? Explain.

Is M divisible by 5, 2, 9, 63, 11, 15? Explain." (P.542)

Les auteurs ont trouvé que seuls six participants parmi les vingt-et-un ayant participé à l'expérimentation étaient capables de démontrer et de résoudre les problèmes avec une compréhension de la divisibilité comme objet ; les quinze participants restants n'étaient pas capables de donner dans certains cas la réponse sans effectuer la division ; parmi ceux-là huit ont exclusivement effectué la division.

Les stratégies cognitives par lesquelles les participants sont passés pour répondre à cette question, sont décrites par Zazkis et Campbell selon les étapes suivantes :

- *Action* : Les participants ont pensé à la divisibilité comme une action, ils ont calculé M et ont effectué ensuite la division par 7 pour décider si M est divisible par 7.

-*Intériorisation: De l'action au processus* : les auteurs expliquent que l'intériorisation est caractérisée par le changement qui permet de passer de l'activité procédurale à la compréhension du processus. La distinction action / processus est utilisée pour distinguer l'activité procédurale de la compréhension du processus. Ils soulignent que les participants ici ont pensé à l'activité de la division comme un processus, dans lequel la division est visée, mais n'est pas réellement effectuée. Le participant a compris que le processus de la division permet de décider si un nombre entier satisfait les critères de divisibilité. Il a pu identifier 7 comme un facteur sans effectuer la division, mais il a écrit M comme produit de deux facteurs $M = 15^6 \times 7$.

Les auteurs ont trouvé que les participants ont pensé à la divisibilité en termes de division ou multiplication.

- *Nouveaux processus : la coordination et l'inversion :* Zazkis et Campbell soulignent que les nouveaux processus peuvent être obtenus par la coordination des processus existants ou l'inversion des processus existants. Le processus de la divisibilité par 15 est pris comme une coordination de la divisibilité par 3 et par 5, ainsi un nombre est divisible par 15 s'il est divisible par 5 et par 3. Les participants ont pu décider M est divisible par 63 car M est divisible par $9 = 3^2$ et 7 ($63 = 7 \times 9$). Nous soulignons[5] que la divisibilité par le produit (15) qui est vue comme une coordination de deux nombres faisant le produit (5 et 3) n'est correcte que dans le cas où ces deux nombres (5 et 3) sont premiers entre eux.

Zazkis et Campbell ont trouvé que, dans cet exemple, plusieurs participants avaient des difficultés pour répondre aux questions qui nécessitent une coordination : ces difficultés apparaissent avec tous les facteurs de M qui ne sont pas explicitement dans la décomposition de M.

[5] Conformément à la conséquence du théorème de Gauss « Si *a* et *b* divisent un entier *c*, et si *a* et *b* sont premiers entre eux, alors *ab* divise *c*.

- *Encapsulation de processus à l'objet :* selon les auteurs, l'encapsulation de la divisibilité en tant qu'objet est avérée lorsque l'apprenant commence à distinguer le concept de la divisibilité du processus de la division et/ou de la multiplication. Les participants ici expliquent la divisibilité de M par 7 et 5 en termes de facteurs dans la décomposition en nombres premiers de M. Cependant, ils n'ont pas reconnu directement la divisibilité de M par les nombres composés comme 81 ; comme le montre le fait que pour répondre à la question, ils effectuent la division de M par 81.

- *La thématisation de l'objet au schéma* : la thématisation de la divisibilité comme un schéma consiste à construire des relations spécifiques entre la divisibilité et d'autres objets de la théorie des nombres tels que les nombres premiers, la décomposition en facteurs premiers. Ici les participants ont pu proposer des justifications pour les nombres premiers et les nombres composés.

En ce qui concerne la deuxième partie de l'analyse des données qui est consacrée à l'étude la relation entre la divisibilité et la division, Zazkis et Campbell ont trouvé que certains participants (six parmi 12) ayant répondu à la question: *« Est ce que 391 est divisible par 23 ? »*, ont évité d'effectuer la division en cherchant d'autres stratégies.

Les auteurs expliquent que, pour certains participants, le concept de la divisibilité est lié à celui de la multiplication par la définition suivante : b est divisible par a, ou a divise b, s'il existe un nombre naturel d tel que : $ad = b$. Alors que d'autres participants ont étudié la primalité des nombres en utilisant les critères de divisibilité ou la décomposition en facteurs premiers.

Pour les participants ayant utilisé les critères de divisibilité pour décider de la divisibilité de 391 par 23, ils ont essayé de généraliser les critères de divisibilité pour 3 et 9 en faisant la somme des chiffres de 391.

La troisième partie de l'analyse des données présentées dans le travail de Zazkis et Campbell, concerne spécifiquement les critères de divisibilité. Les auteurs ont montré que pour répondre à la question précédente (391 est-il divisible par 23 ?), la plupart des participants ont généralisé ou mal appliqué les critères de divisibilité lorsque les critères de divisibilité connus sont apparus comme ne pouvant pas s'appliquer.

A la fin de cet article, Zazkis et Campbell commentent les principaux résultats retenus. Ils indiquent que le cadre théorique action-processus-objet s'est avéré utile pour décrire la structuration des connaissances mathématiques. Ils ont identifié dans ce travail plusieurs difficultés rencontrées par les participants, dont l'interpénétration complexe des structures cognitives sous-jacentes des concepts de la théorie des nombres. Ils ont également identifié des difficultés concernant les ambiguïtés théoriques quant à la coordination des processus, la thématisation des schémas, et la difficulté de l'encapsulation de la divisibilité comme un objet.

Pour les auteurs, cette difficulté peut être expliquée par le fait que la divisibilité est une notion très complexe. Ils expliquent que la compréhension des participants de la «Divisibilité par n » comme un objet généralisé, dans certains cas est précédée par l'encapsulation des processus distincts de la divisibilité pour des nombres spécifiques.

Les auteurs relèvent que cette étude a révélé qu'il y avait chez les participants une tension entre le désir d'appliquer la connaissance mathématique récemment acquise d'une part, et le désir d'être sûr de sa réponse d'autre part. En effet, beaucoup des participants qui ont montré leur maîtrise du processus ou même qui ont montré qu'ils avaient construit l'objet « divisibilité », ont indiqué qu'ils auraient préféré effectuer l'action pour être sûr de leurs conclusions. Notons que ceci est un enjeu essentiel de la dialectique ancien/nouveau : la confiance dans les nouvelles connaissances s'appuie sur le fait qu'elles permettent de retrouver les résultats produits par les anciennes connaissances stabilisées dans les cas où ces dernières s'appliquent (voir par exemple Assude & Gelis, 2002)

Les résultats obtenus dans cette expérimentation mettent en évidence que l'encapsulation de la relation de divisibilité comme un objet nécessite un mouvement qui aille au delà de la maîtrise des procédures effectives avec des nombres donnés, vers une compréhension conceptuelle de la structure multiplicative de nombres.

Les auteurs notent également que la divisibilité est vue par les participants soit en termes de division « $a \mid b$ si et seulement si $b \div a = d$; d est nombre naturel », soit en termes de multiplication « $a \mid b$ si et seulement s'il existe un nombre naturel d tel que $a\ d = b$ ». Ils soulignent que faire un lien entre la relation de divisibilité et la décomposition en nombres premiers semble grandement contribuer à la compréhension de la divisibilité comme un schéma thématisé.

Il ressort de cette étude deux résultats importants : le premier est associé à l'importance de faire des liens entre les concepts de multiplication, facteurs et la décomposition en facteurs premiers pour construire le schéma de la divisibilité, et le deuxième est de mettre l'accent davantage sur le rôle de la multiplication et la division et la relation inverse entre ces deux opérations en considération de la question de la divisibilité.

I.2.2 Brown, Thomas et Tolias (2002)

Le travail de Zazkis et Campbell sur la construction du concept de la divisibilité en utilisant la théorie d'APOS était un outil dans le travail de Brown, Thomas et Tolias (2002). Ces derniers ont étudié, dans leur article « *Conception of Divisibility : Success and Understanding* », la conception de la divisibilité chez les futurs enseignants de l'école élémentaire. Le but général de leur étude est de savoir comment les futurs enseignants appliquent leur conception de la multiplication et de la division dans les problèmes concernant la divisibilité. Ils se sont intéressés plus particulièrement à la capacité de l'individu de progresser d'une réponse actionorientée avec peu de conscience des concepts mathématiques, à une réponse fondée sur le raisonnement déductif basée explicitement sur la compréhension des opérations mathématiques et les propriétés associées à la structure multiplicative[6] des nombres entiers.

Les données ont été recueillies lors d'un entretien avec dix enseignants de l'école primaire en formation. L'analyse des données est basée comme nous l'avons indiqué plus haut sur le travail de Zazkis et Campbell présenté précédemment avec la théorie d'APOS, et sur le modèle associé au travail de Piaget sur *Success and Understanding* (1978).

Brown et al, ont signalé que cette étude va leur permettre de formuler une analyse complète et utile du schéma de la divisibilité. Ils annoncent que la compréhension de la structuration du schéma de la divisibilité nécessite deux choses : Comment le concept de divisibilité est construit avec la structure multiplicative et comment la formulation de schémas sous-jacents pourrait permettre d'établir des liens cohérents entre les deux notions.

Le schéma de la divisibilité utilise certains des schémas de la structure multiplicative. Les composantes du schéma d'un individu pour la structure multiplicative pourraient comporter des schémas sous-jacents pour les opérations arithmétiques, leurs propriétés, ou la décomposition en facteurs premiers.

Les changements dans le raisonnement des participants sont illustrés par les étapes suivantes dans le modèle adapté du travail de Piaget :

Etape 1 : Effectuer des actions avec succès avec peu de conscience.

Etape 2 : Des actions et des conceptualisations ont des effets réciproques l'une sur l'autre, mais l'individu ne peut pas toujours faire des inférences sur le succès ou l'échec possible d'actions sans les effectuer.

Etape 3 : Quand les actions sont consciemment guidées par un raisonnement mettant en jeu les concepts qui s'appliquent à la tâche. Cette étape inclut la capacité de faire les prédictions concernant la réussite dans les nouvelles actions sans expérimentation directe.

Les auteurs ont montré que certains participants avaient au début tendance à répondre initialement aux tâches proposées comme indiqué à l'Étape 1 ; les premières explications qu'ils donnent sont basées sur des caractéristiques superficielles ; lorsqu'ils s'appuient dans leurs explications sur la multiplication et ses propriétés, ils progressent vers l'étape 2 et dans le développement du schéma de la divisibilité ; les auteurs relèvent qu'il y a cependant peu de prise de conscience des rôles possibles des opérations.

[6] La structure multiplicative de N est composée de toutes les relations $a = b\ c$; elle peut être exprimée comme $c \div b = a$ et tout ce que l'on peut penser dans ce contexte. À un niveau plus élevé, il inclut l'expérience, et à un niveau encore plus élevé, la formulation des connaissances des propriétés telles que la commutativité, l'associativité, ou la distributivité.

Dans ce travail, les auteurs ont étudié la relation entre la structure multiplicative et l'identification du plus petit multiple commun ; selon eux, le concept de ppcm est construit par l'application de l'un des schémas de la structure multiplicative ; ils font l'hypothèse que l'utilisation d'un tel schéma pourrait entrainer la construction de plusieurs procédures. Ils ont proposé trois méthodes pour trouver le ppcm afin de répondre aux questions proposées :

- Méthode de l'intersection : chercher l'ensemble des multiples consécutifs de deux nombres, le plus petit de la liste des multiples communs de deux entiers est le ppcm.
- Méthode multiple – divisible : Chercher seulement au sein de l'ensemble des multiples consécutifs de l'un des deux nombres en vérifiant en même temps pour chaque multiple nouveau dans la liste s'il est divisible par l'autre nombre.
- Méthode de la décomposition en facteurs premiers.

Les auteurs ont tenté par les problèmes proposés d'identifier les méthodes utilisées par les participants. Ils ont considéré qu'il y avait une conscience de la structure multiplicative chez les participants lorsqu'ils ont utilisé la méthode multiple – divisible, alors que la structure multiplicative n'était pas avérée chez les participants ayant utilisé la décomposition en facteurs premiers.

Très peu des participants ont pu justifier pourquoi la méthode de la décomposition en facteurs premiers permet d'obtenir le plus petit multiple commun. Certains participants ont des conceptions séparées dans des situations différentes de ppcm. Les auteurs proposent de faire une extension de la méthode multiple–divisible avec la décomposition en facteurs premiers et ils mettent l'accent sur l'importance de réfléchir et raisonner sur l'action lors de l'apprentissage d'une nouvelle méthode en termes de structure multiplicative des nombres et des propriétés utilisées.

Le travail de Brown et al.(2002) se différencie de celui de Zazkis et Campbell par les points suivants :

- Brown et al. se sont intéressés à la capacité des participants de justifier et de raisonner lors de la progression dans les réponses données, alors que l'accent est mis chez Zazkis sur le progrès d'action/processus/objet/ schéma.
- Brown et al, mettent plus l'accent sur le rôle de la multiplication, tandis que Zazkis et Campbell mettent l'accent sur le rôle de la division et la multiplication dans la question de la divisibilité.
- Brown et al. étudient la question des relations entre le plus petit multiple commun avec la structure multiplicative.

D'une manière générale, cette étude met principalement l'accent sur le raisonnement avec les objets de la théorie de nombres.

I.2.3 Zazkis (2000)

Les concepts de multiple et de diviseur sont également l'objet de recherches dans les travaux anglo-saxons sur la divisibilité. Zazkis a tenté, dans son article intitulé « *Factors, Divisors, and Multiples: Exploring the Web of Student's Connections"* de voir comment les enseignants expliquent les concepts de facteur, diviseur et multiple, quels liens ils établissent entre ces trois concepts ainsi qu'avec d'autres concepts de la théorie des nombres tels que les nombres premiers, la décomposition en facteurs premiers et la relation de divisibilité.

Zazkis part de l'idée que les concepts mathématiques ne sont pas étudiés séparément, mais en relation avec d'autres concepts mathématiques. Elle signale que cette idée s'appuie sur des recherches qui considèrent les connaissances conceptuelles comme un réseau connecté de connaissances. Les idées de Web et de réseau suggèrent à la fois la connexion et la complexité des connaissances.

Les données de cette étude sont recueillies lors d'entretiens avec 19 enseignants volontaires de l'école primaire en formation.

Zazkis a posé deux questions aux enseignants. Dans la première question, on demande d'expliquer la signification des concepts de facteur, diviseur et multiple. Dans la deuxième question, on demande d'identifier tous les facteurs et les diviseurs de 117 à partir de la décomposition en facteurs premiers - $117 = 3^2 \times 13$ -, ainsi que les multiples de 117 et les nombres dont 117 est un multiple. Elle propose également des questions sur les relations entre ces concepts (*Pouvez –vous penser à un facteur qui n'est pas un diviseur ? Pouvez –vous penser à un diviseur qui n'est pas un facteur ? Pouvez –vous penser à un nombre qui est à la fois multiple et diviseur de 117 ?).* Cette question est conçue pour étudier la compréhension de ces trois concepts dans la pratique par les enseignants et les relations qu'ils établissent.

Les résultats montrent que le concept de facteur était le moins problématique chez les enseignants, alors que le concept de multiple était le concept le plus problématique.

Les participants ont expliqué le mot « facteur » comme une paire formée des nombres multipliés, (par exemple : $6 = 2 \times 3$; 2 est un facteur de 6 ; 3 est un facteur de 6 ; les participants ont donné la paire formée des nombres 2 et 3 pour répondre à la question de mot facteur) la définition de facteur et de diviseur n'est pas vue comme une relation entre deux nombres naturels, mais elle est vue plutôt, chez les participants, dans un contexte des nombres et des opérations entre les nombres.

Les significations de facteur et de diviseur dans la définition mathématique formelle :

> *«Given two natural numbers A and B, the number B is called a factor of A il and only if there exists a natural number C such that B × C = A. » (P.12).*
>
> *« For natural number B and A, B is called a divisor of A if and only if there exists a natural number C such that B × C = A. »* (p.14).

Et la signification des deux concepts comme jouant un rôle dans les opérations « multiplication » ou « division » :

> *«Consider the multiplication sentence $B \times C = A$.(…) Both number C and B can be referred to as factors. This describes their role in a multiplication number sentence.” (P.12)*
>
> *“The label divisor specifies the number’s role in a division number sentence: When $A \div B = C$, We call A the dividend, B the divisor and C the quotient.” (P.14)*

Ceci a créé une confusion chez les participants. Le sens attribué par les étudiants à un multiple a été souvent confondu avec la notion de facteur.

L’auteur souligne que, contrairement au concept de diviseur et de facteur, le concept de multiple a seulement une signification en ce qui concerne les nombres naturels. Il prend sa signification dans la définition mathématique formelle comme une relation, tandis qu’il ne joue pas de rôle dans la définition de la multiplication, contrairement au concept de facteur. Selon l’auteur, ceci pourrait expliquer pourquoi la majorité des participants n’ont pas réussi à saisir le sens de multiple. Zazkis montre que la référence aux nombres naturels était faible, voire absente dans la réponse des participants, ceci pourrait s’expliquer par le fait qu’ils utilisent le vocabulaire de la multiplication. Le lien entre les concepts de facteur et de diviseur apparaissait faible, tandis que le lien entre facteur et multiple était erroné : pour certains participants, multiple et facteur ont le même sens.

L’auteur a montré que dans la population étudiée la mise en relation entre facteur, facteur premier, et la décomposition en facteurs premiers était incomplète. Il a constaté que l'expérience préalable des participants comme élèves a une influence sur la construction de ces concepts pendant la formation.

Il explique que les manuels scolaires fournissent souvent des définitions rigoureuses suivies d’exemples, mais qu’ils omettent toute référence à ce qui pourrait renvoyer aux connaissances préalables des étudiants. À certains moments, ils donnent des définitions différentes sur des pages différentes, mais ils omettent de mentionner les connexions. Par conséquent, le rôle des enseignants pour aider les élèves à construire le sens des concepts mathématiques est essentiel.

Zazkis propose d’aborder explicitement la question de l'ambiguïté du sens, et d’engager les étudiants dans des situations dans lesquelles des interprétations différentes aboutissent à des résultats différents ; elle considère que ceci pourrait être une stratégie prometteuse. La construction de liens entre concepts mathématiques ne se produit pas toujours spontanément. L’auteur considère que la construction de nouveaux liens entre des concepts mathématiques serait mieux réussie si ces concepts étaient liés à leurs connaissances antérieures. Cependant, la notion de « connaissance antérieure » pour les enseignants en formation de l’école élémentaire est différente de la notion de « connaissance antérieure » pour des enfants, ou de prérequis pour des savoirs mathématiques. Il s'agit dans le cours des enseignants en formation de reconstruction de significations précédemment construites. Et la question qui se pose alors est de savoir dans quelle mesure le réapprentissage est différent de l'apprentissage, et s'il y a des théories qui s'accordent pour expliquer le réapprentissage. Elle considère que l'idée de schéma (Asiala et al., 1996) pourrait très probablement servir de point de vue théorique pour tenter de clarifier les spécificités du réapprentissage, et pour affiner la notion de « liens » et leur rôle dans l'apprentissage (le réapprentissage) des mathématiques.

Elle met l'accent sur les connaissances antérieures que les futurs enseignants apportent dans le cours mathématique car ceci pourrait être une clé pour réduire l'écart entre ce qu'ils devraient faire et ce qu'ils font.

Notons ici que dans ce travail Zazkis traite la signification de termes « facteurs » ; « diviseur » et « multiple » en terme de relation et en considérant le rôle qu'ils jouent dans la multiplication, mais qu'elle ne pose pas la question de l'aspect relation / propriété.

I.2.4 Zazkis (2002)

Zazkis s'est aussi intéressée au langage de la théorie des nombres ; elle insiste sur l'importance de la communication et de la discussion mathématique dans la classe. Elle souligne le rôle que devrait jouer la précision dans le langage des étudiants pour exprimer les idées mathématiques. Elle tente, dans son article « *Langage of Number Theory : Metaphor and Rigor* », d'expliquer les raisons possibles de la réticence des étudiants pour utiliser la terminologie formelle et la force des expressions informelles dans leurs usages du vocabulaire.

Elle a étudié la terminologie utilisée avec la notion de divisibilité par les enseignants en formations à partir d'entretiens conduits avec ces enseignants. Elle a trouvé que le langage utilisé par les intervieweurs était différent de celui utilisé par les interviewées. Les participants ont utilisé des expressions formelles et non formelles, ceci bien que les cinq formulations équivalentes qui permettent d'exprimer l'idée de la divisibilité (A est divisible par B ; B divise A ; B est un facteur d'A ; B est un diviseur d'A ; A est un multiple d'A) soient familières pour les participants, dans la mesure où ces formulations se rencontrent dans les manuels qu'ils utilisent et sont proposées en classe.

L'analyse des réponses des participants a conduit l'auteur à identifier quatre thèmes ou apparaît l'utilisation d'expressions non formelles par les enseignants:

- *Expliquer le mot divisible* : les participants utilisent l'expression « peut être divisé » pour signaler qu'un nombre est divisible par un autre et l'expression « ne peut pas être divisé » pour signaler qu'un nombre n'est pas divisible par un autre.

Zazkis montre que la raison pour laquelle les participants utilisent cette expression non formelle peut être exprimée par la structure du mot « divisible ». Comme chaque verbe utilisé avec le suffixe « able » ou « ible » est interprété par « peut être.. », le mot divisible invite à l'interpréter par l'explication : « peut être divisé ». Notons que ceci est également le cas en français, comme par exemple avec le mot « visible », qui signifie « qui peut-être vu ».

Elle signale que cette analogie, quand elle est utilisée dans un contexte mathématique de la théorie des nombres, ne donne pas le sens « divisible » dans le registre anglais, car « peut être divisé » ne donne aucune information sur les nombres et les relations entre eux. On peut noter ici que cette interprétation revient à considérer que l'on a affaire non pas à une relation entre deux termes, mais à une propriété s'appliquant à un terme.

- *Evoquer des images mentales* : Elle montre que l'expression familière utilisée par les participants pour décrire la divisibilité, peut exprimer leur compréhension de la division. Lorsqu'ils disent un nombre « peut être divisé également », ils représentent une image et un processus qui relève d'une vision partitive de la division, et lorsqu'ils utilisent les mots : « va dans », ou « peuvent être mis en », ils indiquent la vision quotitive de la division.

Elle explique que les deux images - partitive et quotitive - de la division proviennent de la possibilité d'interpréter la définition mathématique de la divisibilité de la manière suivante :

> *«A number A is divisible by a number B if A objects can be arranged in B groups (rows, columns) such that there is the same number of objects in each group. This interpretation is consistent with a partitive view of division. Taking a quotitive or measurement view on division, the image that may accompany the division is covering the length of A units with segments B units long.”* P. 89

- *La recherche de confirmation du sens d'un mot ou d'une expression.* Les enseignants en formation utilisent un vocabulaire informel lorsqu'ils cherchent à s'assurer de la signification d'un terme employé par l'intervieweur ; cette recherche de clarification du sens se produisant lorsque le participant n'était pas sûr de sa réponse. Le langage utilisé par les participants pour exprimer la divisibilité a permis de relever une confusion chez les participants entre la division des entiers et la division des rationnels.

- *Accentuation excessive :*

L'intervieweur demande aux participants si un nombre est divisible par un autre, et les participants utilisent des expressions comme « également divisible » ou « complètement divisible » au lieu d'utiliser « divisible ». L'auteur interprète leur choix de l'expression « également divisible » pour assurer la signification du concept.

L'auteur considère qu'il est important d'utiliser le terme mathématique « divisible » plutôt que « complètement divisible » car d'après elle, lorsqu'un adjectif ou un adverbe est ajouté au nom d'un concept mathématique donné, il en modifie la signification ; c'est le cas par exemple pour les deux notions de relation d'ordre et de relation d'ordre total. Elle ajoute en outre que l'acquisition du langage de la communauté mathématique est essentielle pour l'objectif d'une communication réussie.

I.3 Travaux relatives à la structuration des entiers autour des nombres premiers

Dans cette partie, nous allons présenter les travaux associés aux nombres premiers et à la décomposition en facteurs premiers.

I.3.1. Travaux sur les nombres premiers

Parmi les recherches concernant les nombres premiers, nous avons retenu deux articles : (Zazkis, 1999) et (Zazkis et Liljedahl, 2004). Nous présentons d'abord le travail de Zazkis avec Liljedahl car leur travail porte essentiellement sur la compréhension des enseignants en formation sur le concept de nombres premiers, alors que le travail de Zazkis (1999) se propose d'étudier une des conceptions erronées relatives aux nombres premiers chez les enseignants, cette conception erronée étant représentée par une règle intuitive « the more of A, the more of B ».

I.3.1.1 Zazkis et Liljedahl (2004)

Zazkis et Liljedahl, dans leur article «*Understanding Primes : The Role of Representation* » ont étudié comment les enseignants en formation de l'école élémentaire comprennent le concept de nombre premier et quels sont les aspects qui influencent leur compréhension. Ils mettent l'accent sur l'intérêt des nombres premiers. D'une part, les nombres premiers sont souvent décrits comme le bloc permettant de construire les nombres entiers naturels. Cette construction peut être vue comme une interprétation métaphorique du théorème fondamental de l'arithmétique. D'autre part, les nombres premiers sont essentiels pour comprendre les nombres et les relations multiplicatives entre les nombres.

Ils expliquent que la compréhension des nombres premiers repose fortement sur la représentation des nombres. Pour eux, il y a deux façons de représenter les nombres : la représentation transparente et la représentation opaque :

> *« A transparent representation has no more and no less meaning than the represented idea(s) or structure. An opaque representation emphasizes some aspects of the ideas or structures and de – emphasizes others. »(P.165)*

Ils montrent que la représentation du nombre 784 comme 28^2 est une représentation transparente et la propriété de 784 étant divisible par 98 est une représentation opaque. La représentation du même nombre comme $13 \times 60 + 4$ est une représentation transparente, et les nombres pairs qui peuvent être représentés par $2k$ et les nombres impairs qui peuvent être écrits sous la forme $2k + 1$ ont aussi une représentation transparente, ainsi que la représentation des nombres comme un produit de nombres naturels supérieurs à 1 est une représentation transparente. Les nombres composés ainsi ont une représentation transparente. Or, les nombres premiers ne l'ont pas. Ils suggèrent que le manque de représentation transparente des nombres premiers constitue un obstacle pour les enseignants.

Les données sont recueillies auprès d'enseignants de l'école primaire en formation. Elles se composent d'une part des réponses écrites à la question suivante : « *Consider F = 151 × 157. Is F a prime number? Circle YES / NO, and explain your decision.* », relevées dans 116 copies, et d'autre part des échanges au cours d'entretiens conduits avec 18 enseignants volontaires inscrits au cours « les fondamentaux en mathématique pour les enseignants » ayant traité la question précédente. Dans l'entretien, les auteurs ont demandé aux participants la signification des expressions suivantes : nombres premiers, nombres composés, et les relations entre eux. Ils leur ont demandé ensuite d'identifier si un nombre de la forme « m (2k +1) » est un nombre premier ou pas[7], et s'il peut être premier. Pour analyser les données ils se sont servis de la catégorisation : représentation transparente / représentation opaque des nombres entiers.

Les résultats obtenus montrent que la compréhension de nombre premier est incomplète, incohérente, fragile, et influencée de façon significative par les exemples particuliers.

Les auteurs ont trouvé que la connaissance appropriée des nombres premiers ne pouvait pas résulter simplement de son implémentation dans une situation-problème. L'étude a montré que les connexions entre les notions de facteurs, multiple, divisibilité ne sont pas bien établies ; certains participants pensent que les nombres premiers sont des nombres petits, et que chaque grand nombre, s'il est composé, est divisible par un petit nombre premier ; enfin, certains participants font une confusion entre les nombres premiers et les nombres impairs.

Pour la relation entre les nombres premiers et les nombres composés, les étudiants avaient compris qu'ils appartiennent à deux ensembles disjoints.

Les auteurs ont identifié trois approches mobilisées par les étudiants pour appréhender la notion de nombre premier :

- La primalité comme un résultat de la factorisation : La factorisation est liée à la représentation. Factoriser un nombre, c'est le représenter comme un produit de nombres entiers naturels. Si un nombre n'a pas exactement deux diviseurs, 1 et lui même, alors ce n'est pas nombre premier ; si un nombre a exactement deux facteurs, 1 et lui-même, alors c'est un nombre premier.
- La primalité par l'observation d'exemples ; selon les auteurs, la généralisation par des exemples peut être préférée du fait de l'absence de représentation transparente pour les nombres premiers.

[7] La réponse dépend des valeurs de m et de k.

- La primalité par l'exclusion : il s'agit d'éliminer tout ce qui n'est pas un nombre premier de ce qui est un nombre premier ; ceci est à l'œuvre dans le crible d'Eratosthène, qui consiste à isoler les nombres composés des nombres premiers.

Les auteurs font l'hypothèse que le manque de représentation des nombres pour la primalité est un obstacle dans la construction de ce concept. En se référant à Kaput (1987), ils considèrent que, quel que soit le niveau considéré dans l'éducation mathématique, aucune attention explicite n'est portée à la relation entre la transparence de certaines notions, propriétés ou opérations mathématiques, et la représentation dans laquelle elles sont codées. En effet, s'il y a une attention explicite portée aux opérations numériques et aux représentations décimales, ce n'est pas le cas pour les concepts reliés à la structure multiplicative des nombres, à la divisibilité et à la primalité.

I.3.1.2 Zazkis (1999)

Zazkis, dans son article « *Intuitive rules in number theory: Example of "the more of A, the more of B" rule implémentation* ", tente d'examiner la règle intuitive « the more of A, the more of B » chez les enseignants en formation de l'école primaire, qui correspond dans ce cas à la croyance intuitive que de deux nombres distincts A et B, le plus grand nombre (A) a plus de facteurs que le nombre le plus petit (B).

Zazkis explique que la règle intuitive « the more of A, the more of B » a été identifiée par Stavy et Tirosh (1996) pour expliquer les réponses erronées des étudiants ; cette règle a été observée aussi bien en mathématiques que dans d'autres situations scientifiques. Selon les auteurs, la source cognitive de cette règle est probablement fondée sur des expériences de situations variées dans lesquelles elle s'applique[8].

Zazkis présente plusieurs situations favorisant l'apparition de cette règle. Dans la première partie de cette étude, elle propose à une groupe de 15 enseignants des questions concernant l'identification des facteurs, des diviseurs de $117= 3^2 \times 13$, ensuite, des questions relatives à identifier le nombre de facteurs de $A = 3^2 \times 7$ et de $B = 3^2 \times 17$ et si le nombre de facteurs de A est - plus grand que, plus petit que ou égale au - nombre de facteurs de B. Elle propose dans la deuxième partie de ce travail, à un groupe différent de 58 enseignants de décider si les deux propositions ci-dessous sont vraies ou fausses et de justifier la réponse :

(a) Si un nombre naturel A est plus grand qu'un nombre naturel B, alors le nombre de facteurs de A est plus grand que le nombre de facteurs de B.

(b) Si un nombre naturel composé A est plus grand qu'un nombre naturel composé B, alors le nombre de facteurs de A est plus grand que le nombre de facteurs de B.

[8] Ceci pourrait s'interpréter en termes de « théorème en acte » au sens de Vergnaud (1991).

Dans la première partie de l’étude, les résultats montrent que les enseignants avaient une croyance forte que le plus grand nombre a plus de facteurs, alors que dans la deuxième partie de l’étude, de nombreux enseignants ont répondu correctement. Zazkis écrit que la réussite des enseignants laisse penser qu’ils n’ont pas eu recours à la règle intuitive pour répondre ; cependant, une étude plus approfondie des réponses des enseignants montre que certains étudiants n'ont pas modifié leurs croyances intuitives, mais qu’ils ont été en mesure d’identifier les « cas spéciaux » comme des exceptions.

Elle indique que la règle « the more of A, the more of B » semble être robuste et n'est pas facilement abandonnée par certains participants, même quand ils ont été confrontés à de nouvelles preuves. Pour elle, ceci ce n’est pas surprenant, car d’après Fischbein (1987), l'expérience a montré que des intuitions fortes ont tendance à survivre même lorsqu’elles sont contredites par l'instruction formelle systématique. La modification de la règle pourrait être un premier pas vers la confrontation de ses intuitions.

Elle explique, en se référant à Stavy et Tirosh (1996), que la connaissance de règles intuitives des étudiants permet aux professeurs et aux chercheurs de prévoir des réactions inadaptées possibles des étudiants ; ceci est crucial pour développer des programmes d'études et planifier des activités d’enseignement. Elle souligne que l’application de cette règle n'est pas la seule croyance intuitive qui guide les étudiants dans la théorie élémentaire des nombres. Son travail avec Campbell (1996b) a décrit chez les étudiants une croyance implicite dans la possibilité d’avoir plus d'une décomposition en produit de nombres premiers pour un nombre composé donné. Cette croyance a été identifiée dans le cas d'un produit de deux nombres premiers «grands». En outre, les étudiants avaient une croyance selon laquelle « un grand » nombre composé devrait avoir « un petit » facteur premier. Zazkis enfin souligne que la croyance des étudiants selon laquelle le plus grand nombre a le plus de facteurs est cohérente avec leur croyance en l’existence d’un petit facteur premier.

I.3. 2 Travaux sur la décomposition en facteurs premiers

Nous présentons ici la suite de l’article de Campbell (2002) qui est proposé plus haut dans le paragraphe (I.1.1) relatif à la division euclidienne et la décomposition en facteurs premiers, ainsi que le travail de Zazkis et Campbell (1996) qui porte essentiellement sur la compréhension du théorème fondamental de l’arithmétique par les enseignants en formation.

I.3.2.1. Campbell (2002)

Nous rappelons que Campbell a proposé aux enseignants en formation de l’école primaire de trouver le quotient et le reste de la division M par 15 ; $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$.

Il a trouvé que les participants ont rencontré beaucoup de difficultés avec la nouvelle situation. Seuls quatre participants parmi dix-neuf ont réussi à identifier le reste égal à zéro avec les critères de divisibilité ; et huit autres participants ont calculé M et ont effectué la division de M par 15 pour déterminer le quotient et le reste ; certains participants ont confondu entre le quotient et le reste, ils ont donné le quotient en ces termes « ce qui vous reste : $M = 3^2 \times 5 \times 7$ », et ils se sont interrogés sur le quotient. Cette difficulté est liée à la relation entre la divisibilité et la division dans le cas où le reste est nul.

Campbell considère que ces difficultés peuvent être expliquées par l'extension inappropriée de concepts et de procédures familières et l'extension inappropriée dans la signification. Certains participants ont pu identifier le couple (q, r) lorsque ils ont calculé M et effectué la division de M par les nombres donnés, mais n'ont pas réussi à le justifier dans le contexte de la décomposition en facteurs premiers. La mauvaise application ou extension des procédures familières dans les nouveaux contextes est conforme aux résultats obtenus dans les travaux de Metz (1982).

I.3.2.1. Zazkis et Campbell (1996)

Les auteurs dans leur article « Prim decomposition : understanding uniqueness » se sont intéressés à l'étude des aspects procéduraux et conceptuels de la compréhension du théorème fondamental de l'arithmétique par des enseignants de l'école primaire en formation inscrits dans un cours intitulé « Bases des mathématiques pour les professeurs ». Les données ont été recueillies par un questionnaire écrit et des entretiens.

Les résultats obtenus dans cette étude ont montré que les participants ont des difficultés pour la décomposition en facteurs premiers. Les auteurs font l'hypothèse que ces difficultés pourraient provenir des expériences précédentes des étudiants pour exprimer des nombres composés comme produits, comme par exemple : $96 = 16 \times 6$ ou 8×12. Les participants avaient une compréhension insatisfaisante du théorème fondamental de l'arithmétique, l'idée de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers est apparue très difficile à saisir ; elle peut apparaître seulement quand le nombre est complètement décomposé en facteurs premiers. Les auteurs expliquent que ceci semble être la différence principale entre facteurs et facteurs premiers et que ceci nécessite plus d'attention pédagogique.

Ils soulignent que le concept de la décomposition en premiers facteurs premiers repose à la fois sur le concept de nombre composé et sur celui de nombre premier, ainsi que sur la relation entre les deux concepts. Si les concepts de nombre premier et de nombre composé n'ont pas été adéquatement construits, ceci empêchera probablement toute conceptualisation significative de la décomposition en facteurs premiers.

La réussite des enseignants en formation pour reconnaître que le nombre décomposé en facteurs premiers est divisible par les nombres figurant dans sa décomposition et leur échec pour reconnaitre que ce nombre n'est pas divisible par les nombres premiers qui n'apparaissent pas dans sa décomposition conduit l'auteur à émettre l'hypothèse suivante : le concept de la divisibilité est habituellement construit avant le concept de non divisibilité.

Ils montrent que cette étude a révélé que, dans la population étudiée, de nombreux étudiants pensent que la décomposition en facteurs premiers signifie la décomposition en petits facteurs premiers. Pour les auteurs, ceci peut être lié au fait que dans les expériences antérieures à l'école, de nombreux exemples utilisant de petits nombres premiers ont été rencontrés, ceci étant également le cas dans les manuels.

Nous présentons dans ce qui suit les travaux réalisés dans l'espace français sur l'objet de l'arithmétique.

I. 2. Travaux français

Les travaux français associés à l'arithmétique au sens de la théorie des nombres sont peu nombreux par rapport aux travaux anglo-saxons. Du fait que l'arithmétique ait été réintroduite dans les programmes de l'enseignement secondaire après une vingtaine d'années d'absence, les recherches se sont orientées vers l'identification des différentes contraintes et des conditions institutionnelles après cette réintroduction et sur l'étude des nouvelles fonctions de l'arithmétique. Par ailleurs, des ressources pour les enseignantes ont été publiées au sein des IREM. Nous présentons successivement les travaux de recherches en didactique des mathématiques, puis les ressources à destination des enseignants que nous avons retenus.

I.2.1 Les travaux de recherche en didactique des mathématiques

Dans cette partie, nous présentons brièvement les principaux résultats de travaux français de recherches en didactique des mathématiques sur l'arithmétique. Ces travaux concernent d'une part la terminale scientifique (Ravel, 2003) et (Battie, 2003), d'autre part les enseignants en formation de l'école élémentaire (Assude, 1998). Nous présentons ces travaux selon l'ordre chronologique.

I.2.1. Assude (1998)

Assude s'est intéressée à savoir pourquoi l'arithmétique continue à vivre dans la formation des professeurs des écoles dans les années 1990, alors qu'elle est disparue des programmes du collège, en sachant que le programme officiel pour la partie mathématique du concours des professeurs de PE1 est le programme de collège et certaines parties de programme de seconde. Elle analyse plus spécifiquement l'évolution des notions d'arithmétique : divisibilité, nombres premiers, pgcd et ppcm dans des programmes en s'appuyant sur l'approche écologique du didactique.

Dans un premier temps, Assude décrit l'évolution de la formation des instituteurs dans les trois périodes : la période classique (jusqu'à la fin des années soixante), la période moderne (correspondant à la reforme des mathématiques modernes dans les années soixante-dix), et la période actuelle (jusqu'à l'année 1998). Elle présente ensuite le contenu de l'arithmétique dans chaque période et les niches qu'elle occupait.

Elle montre que les notions en jeu, dans la période classique, sont présentes dans l'enseignement primaire et dans les écoles normales qui sont chargées de la formation des instituteurs, et les niches occupées par l'arithmétique sont : la niche « théorie des nombres » et la niche « calcul numérique ». Dans la période moderne, ces deux composantes de l'arithmétique sont présentes dans l'enseignement secondaire et dans la formation des instituteurs. Dans la période actuelle, des éléments de l'arithmétique tels que la recherche des multiples de 2 et 5, la division euclidienne et les critères de divisibilité par 2 ou 5 se trouvent dans les programmes de l'enseignement élémentaire, mais les notions en jeu « divisibilité, pgcd, ppcm, nombres premiers » ont disparu des programmes du collège.

En France, le savoir mathématique au sein de l'institution de formation des professeurs des écoles correspond au savoir du collège ; néanmoins, l'arithmétique continue à vivre dans cette institution.

Assude donne quatre hypothèses pour expliquer la continuité de l'arithmétique à vivre dans la formation des professeurs des écoles. La première hypothèse concerne les objets mathématiques et le besoin pour les professeurs des écoles de disposer des éléments théoriques et technologiques pour justifier les techniques concernant des objets enseignés à l'école élémentaire tels les opérations sur les nombres et les critères de divisibilité par 2 et 5.

La deuxième hypothèse est relative au calcul mental et au calcul réfléchi : le besoin d'une technologie qui peut justifier les techniques associées au calcul mental et au calcul réfléchi qui permettent de faire travailler par les élèves les propriétés des nombres.

La troisième hypothèse a trait à la résolution de problèmes : Assude souligne que l'accent est mis par les programmes des écoles sur le fait que les professeurs fassent travailler leurs élèves sur la résolution des problèmes ; or l'arithmétique permet de faire travailler les élèves sur des situations-problèmes, notamment avec la division euclidienne.

La quatrième hypothèse est associée à des contraintes institutionnelles : en se référant a Chevallard, Assude explique que le système de formation des professeurs des écoles et l'enseignement de l'arithmétique au collège sont soumis à la même idéologie, à savoir l'idéologie empiriste : « *Par cette idéologie empiriste, l'enseignement de l'arithmétique bascule du coté de la composante numérique dont le titre d'une des divisions actuels « travaux numériques » est l'emblème* ». (Assude, p.117).

Dans le système de formation des professeurs des écoles, cette idéologie a été confrontée à une autre idéologie, qui est l'idéologie de l'articulation entre la théorie et la pratique. L'issue de la négociation entre les deux idéologies a conduit à la coprésence des deux composantes de l'arithmétique - théorique et pratique - dans l'institution des professeurs des écoles.

Assude ajoute :

> « *Cette négociation ne se fait pas in abstracto mais par l'intermédiaires des différents acteurs de l'institution et notamment par les formateurs de l'IUFM. Il faut préciser qu'une partie de ces formateurs sont des ex-PEN*[9] *qui ont à enseigner les contenus disciplinaires notamment ceux qui concernent nos objets.*
>
> *Ainsi, on peut penser qu'à défaut d'un texte qui précise les contenus disciplinaires, ils reprennent ce qu'ils faisaient avant, par tradition et pour combler un vide qui s'installerait et qui serait « insupportable » du point de vue des besoins technologiques et théoriques concernant les différents objets que nous avons mis en évidence auparavant. » (ibid, p.117)*

I.2.2 Ravel (2003)

L'objet d'étude de la thèse de Ravel était d'expliciter les contraintes et les conditions qui pèsent sur le passage du programme à la classe pour un objet de savoir mathématique donné, l'arithmétique en terminale scientifique. Elle a distingué dans le processus de transposition didactique interne *le savoir à enseigner ; le savoir apprêté et le savoir enseigné*.

Elle a choisi de centrer son travail sur l'enseignement de l'arithmétique, qui venait d'être réintroduite dans les programmes de Terminale Scientifique après une vingtaine d'années d'absence.

Les travaux de recherche ont été réalisés à partir de l'analyse des programmes d'arithmétique des classes de terminale scientifique de 1886 à 2002, du point de vue de l'écologie des savoirs, de l'analyse écologique et praxéologique des manuels de la période contemporaine, et de l'analyse d'un questionnaire à destination des enseignants, et d'analyse des pratiques de deux enseignants dans deux classes de Terminale Scientifique, spécialité mathématiques, observées sur une année entière.

Elle a mis en œuvre une méthodologie d'analyse par zooms successifs sur les protocoles recueillis, afin d'articuler les analyses du niveau du domaine d'étude (l'arithmétique), du secteur et du thème d'étude (la division euclidienne) et enfin du sujet d'étude (la démonstration du théorème de la division euclidienne).

L'analyse des programmes a montré l'évolution des niches occupées par l'arithmétique au fil des changements de programme en terminale scientifique. Et elle a montré qu'il y a eu des orientations radicalement différentes en comparant le programme de 2002 et celui de 1971.

[9] Professeurs d'Ecole Normale

L'arithmétique en 1971 était associée à la fonction structurelle qui ne peut plus être occupée dans le programme actuel qui met en avant l'aspect algorithmique.

Or, l'analyse des manuels a montré que cet aspect est difficilement viable dans les manuels, les enseignants et les manuels favorisant explicitement l'aspect raisonnement de l'arithmétique au détriment de son aspect algorithmique.

Ravel précise trois types de contraintes susceptibles d'expliquer le fait que la volonté des concepteurs de programme de faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique ne soit pas reprise dans les manuels et ne soit pas mise en œuvre par les enseignants observés : des contraintes associées au fait que la mise en avant de l'aspect algorithmique est en rupture avec les représentations des mathématiques que peuvent avoir les auteurs de manuels et les représentations que les enseignants se font des mathématiques ; des contraintes de type matériel qui empêchent l'utilisation des outils informatiques dans les classes ; des contraintes concernant le manque de références et d'habitudes pour faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique dans les classes. En conséquence, Ravel fait l'hypothèse que ceci pourrait expliquer que les programmes soient modifiés en 2002 en mettant l'accent sur l'application d'outils informatiques sur des exemples, et sur l'aspect raisonnement. Elle considère que la première exigence du programme concernant l'utilisation de l'outil informatique pourrait répondre au facteur des contraintes relatives au manque de référence et d'habitude permettant de mettre en place de l'aspect algorithmique de l'arithmétique. La deuxième exigence de programme conforte les enseignants et les auteurs des manuels dans leur choix d'investir l'arithmétique pour développer les compétences liées au raisonnement.

Ravel souligne que les deux niches de l'arithmétique peuvent coexister dans un cours. Or, ce lien n'était pas évident chez la majorité des enseignants ayant répondu au questionnaire.

L'analyse de pratique de deux enseignantes lui a permis de montrer qu'il y avait une différence au niveau du savoir apprêté. Une des deux enseignantes a mis en place l'aspect informatique, alors que l'autre enseignante ne propose l'utilisation de la calculatrice que pour vérifier les calculs. Par contre, les deux enseignantes favorisent l'aspect raisonnement de l'arithmétique. Ravel souligne que les choix mathématiques et didactiques des deux enseignantes étaient différents, et elle a observé par ailleurs une grande stabilité des techniques didactiques utilisées par chacune des deux enseignantes.

I.2.3 Battie (2003)

Le travail de thèse de Battie (2003) a débuté dans le même contexte curriculaire que celui de Ravel (2003), c'est-à-dire au moment de la réapparition de l'arithmétique dans les programmes de la classe de terminale scientifique après de nombreuses années d'absence dans l'enseignement secondaire. En articulant analyse épistémologique et analyse didactique, Battie s'est intéressée aux spécificités et potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématique et en a étudié l'écologie en classe de terminale scientifique.

L'analyse épistémologique s'est appuyée sur la distinction entre deux dimensions du raisonnement que Battie a qualifiées respectivement de *dimension organisatrice* et *dimension opératoire :* la dimension organisatrice renvoie à la visée du mathématicien et la dimension opératoire correspond à l'ensemble des traitements opérés sur les objets en jeu (en particulier les entiers) qui permettent la mise en oeuvre de la dimension organisatrice. A travers l'étude de nombreux exemples de preuves, Battie s'est attachée dans cette étude à identifier les formes que prennent ces dimensions. Par exemple, outre les figures usuelles du raisonnement mathématique, en particulier le raisonnement par l'absurde, elle identifie au niveau de la composante organisatrice le raisonnement par récurrence (et autres formes d'exploitation de la propriété de bon ordre de l'ensemble N), la disjonction de cas et la recherche exhaustive avec l'idée de ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas. Pour la composante opératoire, elle identifie par exemple les formes de représentation choisies pour les entiers (structuration autour des nombres premiers, congruences, etc.), les manipulations de nature algébrique et l'ensemble des traitements opératoires relevant de l'articulation entre la structure d'anneau de $(Z,+,\times)$ et celle d'ensemble bien ordonné de $(N, \leq)$ relative aux deux ordres divisibilité et ordre naturel. L'étude des spécificités en arithmétique de ces deux dimensions du raisonnement ainsi que celle de la nature de leurs interactions a permis de mettre en évidence les potentialités qui en résultent pour l'apprentissage du raisonnement mathématique.

Pour son analyse didactique, Battie a conjugué l'étude de différents corpus : sujets du baccalauréat et ressources destinées aux enseignants, pour le versant institutionnel, et copies d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat et transcriptions d'une séance de recherche en groupes, pour le versant travaux d'élèves de terminale scientifique. A travers l'étude menée sur le versant institutionnel, Battie a montré une exploitation certaine mais limitée des potentialités identifiées a priori et mis en évidence certains ressorts de la réduction opérée. Soulignons en particulier que les ressources destinées aux enseignants font vivre une grande richesse mais qu'elles supposent une certaine culture arithmétique du lecteur et laisse à la charge de ce dernier un travail non négligeable de transposition didactique pour un enseignement effectif. L'analyse de travaux d'élèves a quant à elle montré à la fois une réelle créativité mathématique des élèves et des difficultés de raisonnement indéniables et permis d'en préciser la nature. Mentionnons en particulier, pour les interactions entre dimensions organisatrice et opératoire, l'absence fréquente chez les élèves d'une claire conscience du champ concerné par l'arithmétique et, du côté de la dimension opératoire, la fragilité avec laquelle les élèves font le lien entre la relation divisibilité et la dichotomie « nombre pair/nombre impair » ou encore la difficulté avec laquelle les élèves traduisent la relation divisibilité (par exemple, écrire n = 3k avec k entier pour traduire la relation divisibilité entre n et 3).

Au-delà de ces résultats, l’exploitation de l’outil épistémologique a montré la pertinence de ce dernier pour l’analyse didactique tout en mettant à jour ses limites.

I.2.2 Des ressources à destination des enseignants

Pour cette partie de notre revue de travaux, nous avons retenu deux brochures, l’une publiée en 2004 par l’IREM de Lyon, et l’autre publiée en 2005 par l’IREM de Toulouse.

I.2.2.1 Brochure Irem de Lyon (2004)

Le groupe de l’IREM de Lyon a publié en 2004 une brochure intitulée « *De l’arithmétique au collège* ». Dans cette brochure, une première partie est consacrée à une réflexion sur les objectifs de l'enseignement de l'arithmétique et sur la place du calcul au collège. Dans la seconde partie, différentes activités sont analysées pour les différents niveaux de classe. Ces activités qui prennent des formes variées (résolution de problèmes, construction d'algorithme, recherche de preuve, jeu) ont toutes fait l'objet d'expérimentation. Nous présentons les principaux éléments de la première partie.

Les auteurs montrent que l'arithmétique n'occupe pas une place importante dans les programmes de collège de 1995, mais que cependant elle est considérée comme un outil pour de nombreuses activités.

> *« (Arithmétique) est sous-jacente à de nombreuses activités qui y sont pratiquées : calcul sur les mesures, calcul littéral, travail sur la proportionnalité. Si les exigences des programmes sont peu nombreuses, elles nécessitent néanmoins une certaines familiarisation avec les entiers » (Irem de Lyon, 2004, p.5)*

Les auteurs mettent en évidence les niches[10] que l’arithmétique occupe au collège : « Calcul numérique » ; « algorithmique » et « raisonnement », tout en soulignant que l’arithmétique intervient dans l’ensemble des mathématiques :

> *« Quant à l’algorithme, c’est un objet mathématique particulier, intrinsèque à l’informatique et il est nécessaire que les élèves se familiarisent avec cet objet, pour lequel l’arithmétique est indispensable.(….). L’arithmétique permet plus facilement que d’autres domaines des mathématiques de faire vivre la globalité de l’activité mathématique. Il y est en effet possible d’effectuer plusieurs essais, d’établir des conjectures, de les tester et d’engager la recherche d’une preuve, tout cela dans un temps raisonnable. (…) L’arithmétique est propice à l’initiation à la démonstration. »*

[10] Notons que les auteurs n’utilisent pas eux-mêmes ce terme.

Dans cette brochure ; les auteurs ont mis particulièrement l'accent sur les trois niches de l'arithmétique : « Calcul numérique » ; « algorithmique » et « raisonnement ».

I.2.2.2 Brochure de l'Irem de Toulouse (2005)

Sous le titre « *Pour un suivi en arithmétique de la troisième à la terminale* », le groupe second cycle de I'IREM de Toulouse[11] a publié en 2005 une brochure à destination des enseignants du secondaire dans laquelle les auteurs montrent que l'arithmétique peut-être considérée comme un outil pour aider les élèves à progresser en algèbre et en logique. Ils soulignent d'une part que les élèves ont des connaissances insuffisantes pour la partie arithmétique, et d'autre part, que l'arithmétique permet de travailler sur le raisonnement mathématique et favorise les démarches algorithmiques ; ceci les conduit à avancer la nécessité d'un enseignement continu de l'arithmétique tout au long de la scolarité.

La brochure comprend quatre parties : la première partie vise à identifier les compétences des élèves en arithmétique. Les auteurs dans cette partie présentent les résultats des tests ensuite ils mettent en évidence les erreurs classiques associées à la mauvaise application de l'arithmétique et enfin ils montrent, par des exemples, les connaissances arithmétiques minimales que les élèves doivent acquérir. La deuxième partie est associée au raisonnement : les auteurs proposent des problèmes dans lesquels ils montrent la diversité de raisonnement qu'on peut rencontrer en arithmétique. La troisième partie est liée aux algorithmes. Il s'agit de proposer des exercices qui nécessitent la mise en place d'algorithmes simples et parfois programmés sur la calculatrice. Enfin, la quatrième partie est consacrée à un recueil d'exercices variés.

Deux tests sont proposés dans la première partie de cette étude, le premier test a été élaboré à partir d'un problème posé en 2000 au brevet des collèges, et il est posé à 10 classes d'un lycée général, après avoir traité le chapitre d'arithmétique pendant deux mois. Le deuxième test est lié au raisonnement en arithmétique, il est proposé à une classe de 29 élèves de Première S où l'arithmétique ne figure pas dans le programme

Le premier test s'intéresse à la notion de PGCD et à son calcul. Les auteurs proposent des questions visant, d'une part, à savoir si les élèves de la classe de seconde connaissent le procédé de la décomposition en produit de facteurs premiers et s'ils arrivent avec cette méthode à calculer le pgcd, et d'autre part à savoir si les élèves connaissent encore les méthodes étudiées au collège pour la recherche de pgcd lorsqu'ils disposent d'une nouvelle méthode.

Les auteurs ont trouvé que la plupart des élèves avaient une bonne acquisition de la décomposition en facteurs premiers ; ils étaient capables de décomposer correctement les

[11] Le groupe Second Cycle de I'IREM de Toulouse est constitué de Bernard Destainville (responsable), Sophie Dupuy – Touzet (co-responsable) ; Marc Ducret ; Jean – Marc Gibert ; Alain Viet ; Bernard Vinter.

nombres donnés en facteurs premiers. Mais lorsqu'il s'agit d'utiliser la décomposition en facteurs premiers pour la recherche de pgcd, certains élèves avaient une certaine réticence pour s'approprier cette méthode. Les auteurs ont montré que la décomposition en facteurs premiers était privilégiée par les élèves même si elle n'est pas correctement maitrisée, et l'algorithme d'Euclide reste une méthode maitrisée même si elle moins pratiquée.

> « *On peut constater que à l'issu de la troisième, une large majorité d'élèves maitrisent un algorithme de calcul du PGCD de deux nombres, principalement algorithme d'Euclide. Après l'introduction des nombres premiers en Seconde, environ un élève sur deux connait encore un des algorithmes étudiés au collège, mais n'a pas toujours su s'approprier la technique du calcul du PGCD à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers.* » *(P.12)*

Les auteurs ont montré dans le second test que les élèves avaient des difficultés associées au manque dans le raisonnement arithmétique.

Ils identifient ensuite les erreurs faites par les élèves :

- Erreurs associées au langage : les auteurs montrent qu'il y a une mauvaise maitrise du vocabulaire de l'arithmétique : des expressions du langage courant sont associées aux entiers : les entiers sont appelés « nombre rond », « vrai nombre » et la « division tombe juste » lorsque le quotient est entier.

- Erreurs liées au statut des nombres : les auteurs expliquent que les élèves n'ont pas une bonne compréhension de l'ensemble des nombres et le fait que les ensembles de nombres soient inclus les uns dans les autres n'est pas évident pour les élèves.

- Erreurs dues à une méconnaissance de l'enjeu : les élèves n'arrivent pas à résoudre des exercices qui ne demandent que la reconnaissance de certaines notions déjà apprises, ou ils justifient leurs réponses à l'aide d'exemples : « *La méconnaissances de l'utilité de certaines notions peut entraîner un blocage de la part des élèves qui n'en comprennent pas l'enjeu* » (p.17)

- Autres erreurs : les auteurs ont trouvé qu'il y a des erreurs relatives à :

  - La généralisation erronée du théorème de Gauss.
  - La généralisation du fait que la multiplication est une opération interne pour les entiers conduisant à considérer que le produit de deux nombres premiers est premier.
  - Oublier 1 et n dans la recherche de la liste des diviseurs de n. Les auteurs mettent ce résultat en lien avec la perception des élèves selon laquelle le diviseur sert à partager ; du fait que $n|1 = n$ et $n|n = 1$, *1* et *n* pourraient ne pas être vus comme de vrais diviseurs.

Les auteurs à la fin de cette étude soulignent l'importance de l'arithmétique dans l'apprentissage des mathématiques et ils proposent que « *Son efficacité dans l'apprentissage* *et la consolidation des acquis ne seront réels que si un meilleur suivi de ce domaine est réalisé à travers les programmes des classes du collège et du lycée. » (p.69)*

Ils insistent sur le fait que l'arithmétique doit être présentée chez les élèves et les enseignants et mettent en avant ses apports pour un travail sur le raisonnement.

Conclusion

La revue de travaux anglo-saxons que nous avons présentée met en évidence des difficultés rencontrées par les enseignants de l'école primaire avec les concepts de la théorie des nombres ; ces difficultés se manifestent essentiellement par le manque d'articulation entre ces concepts, et par les confusions qui peuvent être induites par certains termes tels que multiple, diviseur, quotient.

Nous soulignons que la plupart de ces travaux mettent l'accent sur le concept de divisibilité et ses relations avec les autres concepts de la théorie de nombres, alors que dans l'étude institutionnelle que nous avons conduite sur les programmes français, il apparaît que la divisibilité n'est pas un enjeu important au collège.

Les travaux français mettent en évidence l'importance des apports de l'arithmétique pour la niche raisonnement, et la niche algorithmique. Ils montrent également que cette dernière n'a pas trouvé sa place dans les pratiques des enseignants, ce qui conforte les résultats de l'analyse des manuels.

Les résultats de cette étude seront exploités plus particulièrement dans la troisième partie de notre mémoire de thèse, tant pour l'élaboration des questionnaires que pour nos analyses *a priori*.

CHAPITRE II

Cadre théorique général et méthodologie de la recherche

Le cadre théorique dans lequel nous nous plaçons est constitué essentiellement de différents aspects de la théorie anthropologique du didactique et des questionnements relatifs à l'écologie des savoirs. Il s'appuie également sur la notion de statut outil-objet des concepts mathématique, et sur une étude épistémologique des définitions.

I. Théorie anthropologique du didactique

Les questions auxquelles nous essayons de répondre se situent assez naturellement dans le cadre théorique de la transposition didactique (Chevallard, 1985) et de la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, 1992), l'écologie des savoirs étant un de ses principaux moteurs.

I.1. Transposition didactique (Chevallard, 1985, 1991 ; Arsac & al.1989, Arsac, 1992)

Le concept de transposition didactique qui désigne globalement « le passage du savoir savant au savoir enseigné » a été introduit par Yves Chevallard lors d'un cours donné à la première école d'été de didactique des mathématiques en1980. Ce passage se décompose en deux étapes :

Objet de savoir $\longrightarrow$ objet à enseigner $\longrightarrow$ objet d'enseignement

La première étape concerne la transposition externe, la seconde la transposition interne.

Notre travail portera sur l'étude de l'arithmétique dans le savoir savant, ainsi que sur le passage de l'objet de savoir à l'objet à enseigner.

La transposition didactique externe est effectuée par ce que Chevallard appelle la noosphère où les représentants du système d'enseignement rencontrent les représentants de la société. La fonction de la noosphère est de décider, parmi les savoirs dits savants, lesquels deviendront objets d'enseignement :

> *« C'est elle (la noosphère), dès lors, qui va procéder à la sélection des éléments du savoir savant qui, désigne par là comme « savoir à enseigner », seront alors soumis au travail de transposition ; c'est elle, encore, qui va assumer la partie visible de ce travail, ce qu'on peut appeler le travail externe de la transposition didactique, par opposition au travail interne, qui se poursuit, à l'intérieur même du système d'enseignement, bien après l'introduction officielle des éléments nouveaux dans le savoir enseigné. » (Chevallard, 1991, p.30-31)*

Ainsi le savoir à enseigner est le résultat du « travail externe de transposition didactique ».

Dans la transposition didactique interne, le choix des contenus à enseigner se fait par rapport aux programmes et aux instructions officielles.

Arsac (1989) précise que le savoir à enseigner ne se réduit pas au programme :

> *« Revenons tout de suite sur la notion de savoir à enseigner : ce dernier ne se réduit pas au programme, nous avons remarqué en effet qu'en texte de programme appelle une interprétation. Le savoir à enseigner est ce que l'enseignent pense qu'il a à enseigner quand les manuels publiés, les annales, les habitudes prises, ont fixé à peu près définitivement l'interprétation du programme. CHEVALLARD (1985) parle de texte du savoir », en soulignant que ce texte n'est complètement écrit nulle part. » (Arsac, 1989, p.12-13).*

Dans notre travail, nous retenons la définition d'Arsac en considérant que le savoir à enseigner se constitue de contenus de programmes et des interprétations courantes et des habitudes générales prises à propos de ce programme et/ou des anciens programmes, ainsi que de « ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner », mais aussi de ses connaissances et enfin des manuels scolaires.

Arsac (1992) explique que la théorie de la transposition didactique met en évidence deux grands types de questions :

- la légitimité d'un contenu d'enseignement par un savoir de référence.
- L'écart entre le savoir enseigné et savoir de référence qui le légitime, écart dû à des contraintes et des conditions pesant sur le fonctionnement du système d'enseignement et donc sur les savoirs.

Dans notre travail, nous nous posons les questions suivantes :

Qu'est ce qui fait qu'un savoir arithmétique est là, et pas un autre ? Qu'est-ce qui le rend légitime ? Et donc, quel est sa référence au niveau du savoir savant ? Quel écart entre le savoir savant et le savoir à enseigner ? Quelles conditions et contraintes sont explicatives de cet écart ? Nous reprenons le terme savoir savant pour désigner la référence qui légitime l'existence et la vie d'un savoir arithmétique dans l'institution d'enseignement.

Pour répondre aux questions précédentes, nous commençons par effectuer une enquête épistémologique, ensuite nous faisons une analyse des programmes et des manuels du collège et de la classe de seconde générale. Ceci est développé plus loin dans le paragraphe sur la méthodologie générale.

I. 2 Rapports institutionnels - rapports personnels (Chevallard, 1992)

La théorie anthropologique du didactique (TAD) de Chevallard s'inscrit dans le prolongement de la théorie de la transposition didactique. Nous en présentons quelques éléments ci-après.

Cette théorie a trois termes primitifs : les objets (O), les personnes (X), et les institutions (I).

La notion élémentaire est celle d'objet. Tout peut être considéré comme objet, en particulier, toute *œuvre*, c'est-à-dire tout produit de l'activité humaine, est un objet.

Un objet O existe dès lors qu'une personne *X* ou une institution *I* reconnait O comme un existant, ou de façon plus précise s'il existe *un rapport personnel* de X à O (noté R(X,O)) ou *un rapport institutionnel* de I à O (noté R (I,O)). Ainsi, un objet n'existe que parce qu'il est connu d'une personne (ou d'une institution), il n'existe qu'en tant qu'objet de connaissance.

Le rapport personnel est l'ensemble des interactions que *X* peut entretenir avec *O* (le manipuler, l'utiliser, en parler, y rêver, etc.)

Chevallard montre comment s'articulent objets et institution :

> *« A chaque institution I est associé un ensemble d'objets, OI, dit ensemble des objets institutionnels (pour I), qui est l'ensemble des objets O que connait I, c'est–à dire pour lesquels existe un rapport institutionnel RI (O). Un objet O est institutionnel pour I, autrement dit existe pour I, si I a défini un rapport (institutionnel) à O. » (Chevallard, 1992, p.88)*

La personne est définie comme le couple formé par un individu X et le système de ses rapports personnels R(X, O). Lorsqu'une personne entre dans une institution didactique, son rapport personnel à un objet de savoir O s'établit (s'il n'existait pas auparavant) ou se modifie (s'il existait déjà) sous la contrainte du *rapport institutionnel* à cet objet.

> *« Au cours du temps, le système des rapports personnels de X évolue : des objets qui n'existaient pas pour lui se mettent à exister ; d'autres cessent d'exister ; pour d'autres enfin le rapport personnel de X change. Dans cette évolution, l'invariant est l'individu ; ce qui change est la personne. » (Chevallard, 2003, p.81)*

Chevallard décrit le lien entre les individus et les institutions en termes d'assujettissement. Etre sujet d'une institution, cela veut dire à la fois être soumis à et soutenu par l'institution. Une personne peut être sujet de plusieurs institutions.

Par l'entrée de la personne X dans l'institution I où vit un objet O : *« L'objet O va se mette à « vivre » pour X sous la contrainte du rapport institutionnel RI(O). En d'autre termes, un rapport personnel R(X, O) va se construire, ou va changer, sous la contrainte RI(O)- et, plus largement, sous la contrainte du contrat institutionnel CI ».* (Chevallard, 1992, P.89)

Si le rapport personnel R(X, O) change, alors il y a un apprentissage pour X, relativement à un objet O. Au contraire, il n'y a pas d'apprentissage si le rapport personnel n'évolue pas, c'est donc une modification de la personne.

L'univers cognitif d'un individu X que Chevallard note U (X) est l'ensemble des couples

(O, R(X, O)) tels que R(X, O) $\neq \phi$.

Chevallard explique que le rapport personnel R(X, O) comporte deux composantes : la composante publique et la composante privée :

> *« Au demeurant, le rapport personnel R(X, O) se présente à I comme clivé. Il comporte une composante publique (relativement à I), qui se donne à voir dans I et sur l'examen de laquelle sera fondé éventuellement le verdict de conformité de R(X,O) à RI(p,O) ; et institutionnellement invisible (depuis I), une composante privée, qui échappe à l'évaluation par I. Notons ici que ce clivage n'est en rien un absolu : il est relatif à l'institution I, et ce qui du rapport personnel se dérobe à tel institution pourra apparaître en pleine lumière à telle autre. »*
>
> *(Chevallard, 1992, p.91)*

Une personne devient un bon (ou un mauvais) sujet de l'institution relativement à O, si la composante publique de son rapport personnel est jugé conforme (ou non conforme) au rapport institutionnel à O.

Du point de vue anthropologique, notre recherche portera sur l'étude du rapport institutionnel à l'objet de savoir *arithmétique*. Les rapports personnels des enseignants et des élèves relatifs à l'objet d'arithmétique se construisent sous les contraintes et les conditions du rapport institutionnel dans les deux institutions envisagées : celle du collège et celle de la classe de seconde en France.

Ainsi, à la lumière de ce cadre théorique, nous essayons de répondre aux questions suivantes :

Quels sont les rapports institutionnels à l'objet d'arithmétique dans les deux institutions : au collège et en classe de seconde ? Quelles sont les conditions et les contraintes pesant sur le rapport personnel des enseignants et des élèves ?

Les analyses de programmes et de manuels permettent de dégager le rapport institutionnel de l'arithmétique au collège et en classe de seconde. Le rapport personnel des enseignants et des élèves est construit à partir d'un questionnaire auprès des enseignants de classe de seconde et d'un questionnaire adressé aux élèves de seconde.

Le rapport institutionnel s'appuie en partie sur l'écologie des savoirs que nous présentons plus loin. Nous cherchons les traces de l'organisation mathématique dans le savoir savant de l'arithmétique et dans l'analyse institutionnelle. Nous développons ci-dessous la notion d'organisation mathématique présentée par Chevallard (1999).

I. 3 Praxéologie mathématiques (Chevallard, 1999)

Pour analyser le rapport institutionnel aux objets de savoir, Chevallard 1999 introduit la notion de *praxéologie mathématique* pour décrire une *organisation mathématique*.

Une praxéologie est constituée du quadruplet [T/τ/θ/Θ] où :

- T est un type de tâches, contenant au moins une tâche t, présente dans une institution donnée,

- τ est une technique permettant d'accomplir la tâche t,

- θ est une technologie justifiant la technique τ,

- Θ est une théorie justifiant la technologie θ.

En termes de praxéologie mathématique, nous reformulons de nouveau quelques-unes des questions initiales.

Quels types de tâches autour de l'objet de savoir *arithmétique* existent dans l'institution classe de Seconde ? Quelles techniques associées sont enseignées ? Lesquelles sont privilégiées ? Quels sont les discours technologiques justifiant ces techniques ? Quels sont les éléments théoriques associés à ces discours présents en Seconde ?

I. 4 Ecologie des savoirs (Artaud, 1997)

Artaud (1997) souligne que le questionnement écologique était présent dès les premières études sur les processus transpositifs. La théorie de la transposition didactique identifiait déjà trois grands ensembles de conditions permettant aux mathématiques d'exister dans le système d'enseignement :

> *« Tout d'abord, les mathématiques enseignées doivent être compatibles avec leur environnement social, en particulier avec la sphère de production des mathématiques, d'une part, avec l'institution des "parents" d'autre part. Ensuite, les mathématiques enseignées doivent pouvoir être présentées séquentiellement, les notions mathématiques se succédant sur l'axe temporel linéaire du temps didactique (chronogénèse). Enfin, elles doivent définir deux rapports institutionnels, l'un en position de professeur, l'autre en position d'élève (topogénèse). » (Artaud, 1997, p.103- 104)*

Les questionnements écologiques permettent de s'interroger sur l'existence des objets :

> *« La problématique écologique se présente, d'emblée, comme un moyen de questionner le réel. Qu'est ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi ? Et qu'est-ce qui pourrait exister ? Sous quelles conditions ? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions ? « (Artaud, 1997, p.101)*

Un objet ne peut pas vivre de façon isolée, il est nécessaire qu'il prenne place au sein d'une organisation mathématique plus ou moins développée. Il doit donc entrer en interrelation avec d'autres objets. Les différents lieux où vont se nouer ces interrelations constituent des *habitats* pour l'objet. Les fonctions que remplit un objet au sein d'un habitat donné constituent les *niches* de l'objet

> *« Un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour des fonctions génératrices. Il convient donc d'examiner les différents lieux où l'on trouve des fonctions génératrices et les objets avec lesquels elles entrent en association, ce que l'on appellera les habitats. Puis regarder en chacun de leurs habitats, la niche écologique qu'elles occupent, c'est-à-dire, en quelque sorte, la fonction qui est la leur. » (ibid, p.111)*

L'articulation des deux notions d'habitat et de niche permet de définir une méthodologie pour décrire le rapport institutionnel de I à O : il s'agit d'examiner en quels lieux dans I l'objet O est présent, et dans les différents lieux où O est présent, quels sont les autres objets présents, quelles relations ils entretiennent entre eux, quel est le rôle de O dans le système d'objets avec lesquels il est en relation.

En référence à ces éléments théoriques, nous réalisons une analyse écologique de programmes et de manuels de au collège et en classe de seconde en France.

Nous nous posons donc les questions suivantes dans les termes de cette analyse :

- Quels objets d'arithmétique existent dans le savoir savant, et sous dans quelle conditions ?
- Quelle sont les objets d'arithmétique vivant dans les deux institutions, et pourquoi ? Quels sont les objets absents, et pourquoi?
- Quelles sont les conditions qui ont amené à faire vivre ces objets ?
- Quelle niche et quel habitat de l'arithmétique peut-on identifier au collège et en classe de seconde ?
- Comment ces objets prennent-ils leur place dans les pratiques des professeurs et dans les activités des élèves ?

II. Notion de statut outil – objet des concepts mathématiques (Douady, 1986)

La prise en compte de la dialectique outil/objet pour les concepts mathématiques est due à R. Douady (1986), qui s'est intéressée aux processus d'acquisition de connaissances mathématiques par les élèves en situation scolaire.

Douady différencie entre le statut outil et le statut objet d'un concept :

> *« Nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. […]. Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement. » (Douady, 1986, p. 9).*

Le statut outil d'un concept peut fonctionner implicitement ou explicitement. Lorsqu'un élève dispose d'une procédure pour résoudre un problème, mais qu'il ne peut pas justifier cette procédure qui fait référence à des notions qu'il ne maîtrise pas, ou lorsqu'il peut seulement exprimer ces notions en termes d'actions dans un contexte particulier, on dit que l'élève met en œuvre des outils implicites. Au contraire, Lorsqu'un élève peut formuler et justifier l'emploi de certaines notions dans sa procédure, on dit qu'il met en œuvre des outils explicites.

Pour Douady, un élève a des connaissances mathématiques s'il met en œuvre des outils explicites dans la résolution des problèmes ou s'il les adapte dans les nouvelles conditions :

> *« Nous disons qu'un élève a des connaissances en mathématique des s'il est capable d'en provoquer le fonctionnement comme outils explicites dans des problèmes qu'il doit résoudre, qu'il y ait ou non des indicateurs dans la formulation, s'il est capable de les adapter lorsque les conditions habituelles d'emploi ne sont pas exactement satisfaites, pour interpréter les problèmes ou poser des questions à leurs propos » (ibid, p. 11-12)*

Un outil est adapté à un problème s'il est nécessaire ou efficace pour le résoudre. Il peut être adapté éventuellement à plusieurs problèmes, et plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème.

Dans ce travail, nous allons distinguer l'arithmétique comme outil et l'arithmétique comme objet, plus précisément, nous allons étudier le statut des concepts d'arithmétique comme objet et comme outil dans les programmes et les manuels dans les deux institutions. Nous allons également nous intéresser aux statuts outil/ objet dans le rapport personnel des enseignants et des élèves.

III. Enquête épistémologique sur les différents types de définition (Ouvrier – Buffet, 2003)

Nous nous baserons sur les travaux d'Ouvrier-Buffet (2003)[1] pour analyser le statut des définitions relatives à l'arithmétique et mettre en place les différents types de définitions dans le savoir savant et le savoir à enseigner.

[1]La thèse de Cécile Ouvrier –Buffet est intitulée : « Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques ».

L'étude épistémologique conduite par Ouvrier-Buffet comporte des considérations sur les définitions en général, mais aussi une ouverture sur les processus de construction de définition. Cette étude s'appuie en particulier sur les travaux d'Aristote, Leibniz, Kant, Durkheim, Popper …

Ouvrier – Buffet nous présente tout d'abord les premiers éléments de la classification des définitions dans le cadre du débat essentialiste-nominaliste qui portait sur la distinction entre la réalité et le concept.

Elle présente le nominalisme comme étant une théorie selon laquelle les idées n'ont pas d'existence réelle mais sont seulement des mots issus de la perception, des étiquettes qui servent à désigner de la même manière plusieurs individus. Cette présentation du nominalisme place les définitions suivant deux fonctions : dénominative et abréviative. L'auteur explique qu'en mathématiques, les héritiers du nominalisme sont les formalistes, elle dit à ce propos :

> *« Le langage est primordial, les mathématiques apparaissent comme un langage, un discours bien formé, avec des termes primitifs, des axiomes, des règles de déduction. C'est un peu la position actuelle des logiciens. Ceux-ci classent les énoncés mathématiques en deux catégories :*
>
> *- les énoncés démontrés (théorèmes)*
>
> *- les énoncés primitifs posés sans démonstration (axiomes). » (*Ouvrier – Buffet, *p.26)*

Ouvrier-Buffet souligne que les logiciens attestent qu'une définition doit être sous la forme d'une équivalence entre la notion à définir et une expression ne contenant que des notions dont le sens est évident ou déjà expliqué. Cette position a été critiquée par Poincaré, qui note que toute définition implique un axiome où l'on affirme l'existence et l'unicité de l'objet défini. Elle présente également le nominalisme suivant une seconde théorie dite méthodologique selon laquelle la science ne décrit pas le monde tel qu'il est mais seulement tel que la raison peut le connaître.

Concernant le courant essentialiste, Ouvrier-Buffet explique que selon les héritiers de ce courant, les mathématiques ont une certaine réalité où il serait préférable de parler du sens plutôt que de l'essence. Les caractéristiques principales de ce courant dans lequel s'inscrivent Aristote, Leibniz, Frege sont: *« caractériser, rechercher l'existence, montrer la fécondité d'une définition, élaborer une théorie non-contradictoire. » (P.* 28)

Dans ce qui suit, en nous référant aux travaux d'Ouvrier-Buffet, nous représentons brièvement les classifications du concept de la définition proposées par Aristote, Leibniz, Kant et Durkheim qui nous semblent pertinentes pour mettre en place une typologie de définitions relatives à l'arithmétique.

Classification aristotélicienne de la définition

Aristote s'intéresse au concept de définition du point de vue du discours qui exprime l'essence de la chose **:**

> **«** *Pour connaître l'essence, il faut trouver le genre auquel appartient la chose puis un trait particulier qui différencie cette chose des autres éléments du genre. »* (ibid, P.29)

L'acte de définition est dénommé et se fait donc par le *genre* et la *différence spécifique.*

Pour lui, la définition doit utiliser des notions antérieures et connues. Cette idée préfigure le point de vue des logiciens contemporains qui parlent de définitions équivalentes. Aristote dénonce le cercle vicieux, et il s'intéresse à l'étude d'une définition et de son rapport à la démonstration.

Dans les *Seconds Analytiques*, Aristote explique que la définition ne prouve pas que la chose définie existe. On peut lire :

> *« Les définitions ne vont pas jusqu'à démontrer que la chose définie puisse exister, ni qu'elle est ce qu'on prétend définir : il est toujours possible de demander le pourquoi »*
>
> *(Aristote – Seconds Analytiques II,7 p.185, in* Ouvrier – Buffet, *p.30)*

Ouvrier-Buffet souligne trois types de définitions distingués par Aristote :

1. *La définition nominale*, donnant la signification d'un mot sans établir son existence. Il s'agit d'un discours indémontrable de l'essence.

2. *La définition par la cause* : il s'agit d'un discours montrant l'existence de la chose.

3. *La définition des choses qui n'ont pas de cause* : il s'agit d'un discours concluant la démonstration de l'essence.

Théorie de la définition chez Leibniz

Leibniz a développé une théorie de la définition. Pour lui, une démonstration se manifeste comme un enchainement de définitions donnant ainsi une grande importance à l'analyse et à la synthèse de cet enchainement.

Selon Ouvrier-Buffet, Leibniz distingue plusieurs types de définitions :

1. *La définition nominale,* ce type de définition est repris de la classification d'Aristote. Selon Leibniz, d'une part les définitions nominales permettent de distinguer un objet des autres, d'autre part elles représentent pour lui un danger de contradiction, dans le sens où il est impossible de montrer l'équivalence entre deux définitions nominales d'un même concept.

2. *La définition réelle* : désignée par Ouvrier-Buffet de *définition rassurante* au regard du discours sur les définitions nominales. Ce type de définition implique la possibilité des êtres introduits en évitant le risque de contradiction. De ce fait, l'usage de ce type de définition

assure les enchaînements démonstratifs tandis que les conclusions obtenues par des définitions nominales ne sont qu'hypothétiques.

3. *La définition réelle causale* : dans laquelle la démonstration se fait à l'aide de moyens purement logiques, et n'a pas recours à l'expérience. Si la définition est plutôt constructive, cela règle la génération de la chose, sinon la preuve de l'existence se fait à l'aide de moyens purement logiques sans recours à l'expérience (Ouvrier-Buffet, 2006). Par ailleurs, les définitions réelles sont comme des axiomes ou des postulats.

4. *La définition parfaite ou essentielle*, dans ce type de définition les notions primitives sont accomplies par une analyse qui a besoin a priori de la preuve de sa possibilité sans rien supposer.

Définitions chez Kant

Les travaux de Kant s'inscrivent dans un discours métaphysique qui l'éloigne de la pensée nominaliste et de la vision abréviative des définitions. Selon Kant, les concepts ne sont pas empiriques, ils appartiennent à l'entendement et à la pensée. Par ailleurs, il oppose la méthode philosophique qu'il désigne par analytique à la méthode mathématique désignée par synthétique. Ouvrier-Buffet note à ce propos :

> *« Pour lui (Kant), les arguments mathématiques sont synthétiques car constructifs et l'acquisition de connaissances passe par un acte de recherche et de résolutions. C'est ce point précis qui l'amène à la distinction entre définitions analytiques et définitions synthétiques plaçant les définitions philosophiques à la fin d'un processus et les définitions mathématiques au commencement. » (Ouvrier-Buffet, 2003, p. 35)*

Ainsi, Kant classe les définitions suivant deux types :

1. *Définition analytique*, qui apparait le plus souvent en philosophie, dans laquelle aucune construction n'est effectuée, il s'agit de décomposer un concept déjà existant.

2. *Définition synthétique* : qui apparait en mathématique, il s'agit d'une définition d'un concept fabriqué qui compose le concept et le forme de toute pièce.

En ce qui concerne l'aspect *existence* de l'objet défini, cet aspect est écarté par Kant.

La délimitation de l'emploi d'un terme est la principale fonction des définitions, Ainsi, la fonction de reconnaissance d'une définition et tout caractère opératoire de celle-ci apparait fondamentale.

Modes de définitions chez Durkheim

Selon Ouvrier-Buffet, Durkheim propose trois manières pour définir les choses :

1. *Définition par génération :* ce mode de définition est le plus parfait chez Durkheim, il s'agit d'expliquer la façon de formuler les choses, conformément aux critères essentialistes.

2. *Définition par compréhension* : il s'agit d'énumérer tous les caractères sans avoir la nécessité de tous les donner, car selon Durkheim, certains peuvent être inclus dans les précédents. Ce mode de définition est approprié au processus aristotélicien de définition par genre et différences spécifiques.

- *Définition par extension* : qui s'inscrit dans une perspective de construction de définition et qui peut être considérée comme un processus de définition. Cette définition désigne les objets définis pour lesquels toutes les formes de l'idée que l'on veut définir sont énumérées. Pour Durkheim, c'est le mode le plus défectueux.

Ouvrier-Buffet souligne :

> « Sur les définitions elles-mêmes, Durkheim affirme qu'elles doivent être *courtes*, *claires*, *adéquates* à l'objet défini : ceci est très aristotélicien. » (p.38)

Comme conclusion de cette étude, Ouvrier-Buffet nous propose un bilan de certains points dégagés de l'étude de définitions :

- Une définition peut être vue comme un **énoncé** qui vérifie les conditions suivantes :

1. il doit être court, clair, adéquat (Durkheim), non ambiguë.
2. il doit montrer explicitement le défini et le définissant (Aristote).
3. il ne se réduit à une dénomination (Aristote, Leibniz).

- De l'**activité de définition**, en dialectique avec la construction d'un objet ou d'un concept, il ressort les points suivants :

1. le problème de l'existence de l'objet défini est un faux problème (Kant)

« Dans le sens où il est possible de travailler à la construction d'un objet mathématique sans nécessairement pré-supposer son existence ».

2. l'existence et de la preuve de l'existence sont essentielles chez Aristote ou Leibniz.

- L'objectif de l'action de définir est :

1. de désigner ce concept en vue de le connaître, de le reconnaître (Leibniz),
2. d'appliquer cette définition dans une démonstration (Durkheim).
3. pas seulement de montrer ce qu'il en est (Kant).
4. de construire un exposé théorique et de préserver la cohérence axiomatique

(non-contradiction : Leibniz, Frege).

- En ce qui concerne les processus de définition, il en résulte :

1. la méthode de définition *par genre et différences spécifiques* (Aristote, Durkheim),
2. la définition *par génération* et la définition *par compréhension* (Durkheim).

Cette étude fait émerger une typologie des définitions que nous pouvons mettre en place au sujet de l'arithmétique selon différents points de vue dont : le nominalisme et la logique (abréviation, dénomination, équivalence), l'essentialisme (existence), les fonctions des définitions.

IV. Méthodologie générale de la recherche

Nous présentons dans ce paragraphe la méthodologie générale que nous avons mise en place pour conduire notre recherche ainsi que l'organisation de notre mémoire de thèse. Dans un premier temps, nous conduisons une analyse épistémologique pour décrire les organisations mathématiques dans le savoir savant, ce qui nous permet d'identifier les démarches théoriques possibles pour proposer les notions d'arithmétique. Cette étude, qui sera présentée dans le chapitre III, nous permet aussi de repérer les écarts entre la vie de l'objet de savoir arithmétique dans chacune des deux institutions choisies, entre elles et avec le savoir savant. Nous prendrons comme référence le contenu de l'arithmétique présenté au niveau de l'Université en France pour conduire une première analyse et ouvrir un premier champ de questions sur les organisations mathématiques des savoirs à enseigner et les pratiques institutionnelles possibles. Le travail d'Ouvrier-Buffet sur les définitions est mis en œuvre dans cette étude afin d'identifier les différents types de définitions dans le savoir savant de l'arithmétique.

Dans un deuxième temps, nous effectuons une analyse institutionnelle sur les contenus d'arithmétique dans deux institutions : au collège et en classe de Seconde.

Le chapitre IV présentera l'analyse des programmes depuis 1902 jusqu'aux programmes actuels dans l'objectif de dégager les aspects essentiels du rapport institutionnel aux objets d'arithmétique en jeu dans les deux institutions ; ceci va nous permettre de mieux éclairer les choix actuels des programmes. En particulier, nous nous attacherons par un questionnement écologique à analyser l'évolution de l'enseignement des concepts de l'arithmétique afin de mieux comprendre le rôle qu'ils sont censés jouer dans l'évolution des programmes, et décrire les diverses fonctions que l'arithmétique peut occuper dans l'ensemble de l'enseignement au collège et en classe de Seconde. Nous effectuons ensuite une analyse institutionnelle des traces des organisations mathématiques de référence au collège et en classe de seconde pour l'objet d'arithmétique dans l'évolution des programmes, ainsi qu'une étude sur les différents types de définitions que les programmes proposent en faisant référence au travaux de Ouvrier-Buffet (2003) que nous avons présentés au paragraphe III.

Nous pensons en effet que cette triple étude peut nous permettre de repérer des conditions écologiques viables dans l'enseignement ancien pour des objets d'enseignement encore présents dans les programmes actuels. Par suite, il nous semble pertinent d'interroger l'actualité de ces conditions pour réintroduire l'arithmétique et éclairer des choix possibles pour l'enseignement actuel.

L'analyse des manuels de 1970 à 2010, qui est présentée dans le chapitre V, permet de dégager les aspects essentiels du rapport institutionnel aux objets d'arithmétique. Dans cette étape, le jeu des conditions et des contraintes institutionnelles, où les auteurs de manuels gardent une certaine marge de manœuvre, conduit déjà à une certaine interprétation des termes du programme.

Nous chercherons à rendre compte de la vie de l'arithmétique dans les manuels des deux institutions. Nous cherchons plus particulièrement à répondre aux questions suivantes : Quel est *l'écart* entre les intentions des programmes et l'application de ces intentions dans les manuels ? Quelles libertés ont pris les auteurs de manuels par rapport aux contraintes institutionnelles ? Les fonctions que l'arithmétique occupe dans les programmes sont elles les mêmes dans les manuels ? Nous étudierons également l'organisation mathématique de chacune des deux institutions, et nous identifierons les différents types de définitions proposés par les manuels pour les concepts d'arithmétique. Nous complèterons cette étude par l'analyse écologique et praxéologique de trois manuels de Seconde les plus utilisées par les enseignants interrogés dans notre questionnaire.

Dans un troisième temps, nous complétons les études précédentes par la caractérisation des rapports personnels des enseignants et des élèves à propos de l'objet d'arithmétique.

Pour les enseignants, nous cherchons plus particulièrement à répondre aux questions suivantes : Quelles sont les caractéristiques du rapport personnel des enseignants à l'objet arithmétique ? Et notamment quel est le degré d'adéquation entre le rapport personnel et le rapport institutionnel à cet objet ?

Pour répondre à ces questions, nous avons élaboré un questionnaire adressé aux enseignants de classe de seconde. L'analyse de ce questionnaire nous donne des moyens pour savoir s'il y a une variabilité entre les enseignants pour l'enseignement de l'arithmétique ; elle nous permet aussi de relever les difficultés d'apprentissage des concepts de l'arithmétique que les enseignants repèrent chez leurs élèves. Ceci est présenté dans le chapitre VI.

Dans le but d'étudier le rapport personnel des élèves à l'arithmétique, nous avons élaboré un questionnaire pour les élèves de la classe de seconde, où les élèves complètent leurs connaissances de l'arithmétique étudiées au collège, en nous basant sur l'analyse institutionnelle réalisée précédemment.

Le questionnaire-élèves a été proposé dans des classes de seconde dont l'enseignant avait accepté de répondre au questionnaire-professeur. Ces questions nous permettent de voir si les élèves mobilisent leurs connaissances relatives aux concepts de l'arithmétique dans différents contextes. Ces contextes peuvent ne pas être habituels pour eux dans la mesure où nous empruntons une partie de nos questions à l'enseignement antérieur à la réforme des mathématiques modernes où la notion de divisibilité, le pgcd et le ppcm étaient fortement articulés avec la décomposition en facteurs premiers ce qui n'est plus vraiment le cas aujourd'hui, ainsi qu'à certains des travaux anglo-saxon sur la compréhension des concepts d'arithmétique, que nous avons présentés au chapitre VII.

Étant donné que les concepts d'arithmétique sont étudiés tout au long du collège, en continuité en classe de Seconde, nous cherchons à savoir s'il y a une rupture dans l'enseignement de l'arithmétique entre le collège et le lycée, en particulier en classe de seconde. Il se peut que les élèves ne parviennent pas à « faire des liens entre les concepts d'arithmétique appris dans deux institutions ».

Il ne s'agit pas de comparer les connaissances des élèves actuels à celles des élèves d'hier, mais il s'agit plutôt de relever les difficultés rencontrées par les élèves pour les objets d'arithmétique.

Notre but est de caractériser les techniques et si possible les technologies mises en œuvre par les élèves de seconde dans leurs réponses aux questions, d'analyser les résultats obtenus et les erreurs commises pour certaines questions dans le questionnaire en relation avec les techniques utilisées, de repérer certaines difficultés rencontrées par les élèves et d'analyser les écarts éventuels entre le rapport institutionnel et le rapport personnel des élèves.

L'analyse des résultats de notre questionnaire nous permet de pointer certains phénomènes relatifs aux connaissances des élèves d'aujourd'hui sur les concepts d'arithmétique. Elle nous permet notamment de poser des questions d'ordre écologique. Enfin, nous mettrons en perspective les réponses des enseignants avec la réponse de leurs élèves. Ceci sera présenté dans le chapitre VII.

Les résultats obtenus permettent de faire une synthèse du rapport institutionnel aux objets d'arithmétique, ainsi que des rapports personnels des enseignants et des élèves. Cette synthèse sera présentée dans la Conclusion, où nous indiquerons nos perspectives de recherche ; nous comptons en particulier réinvestir les résultats obtenus pour mener une étude didactique sur l'enseignement de l'arithmétique en Syrie.

CHAPITRE III

Organisations mathématiques et définitions en arithmétique

Nous menons dans ce chapitre, dans un premier temps, une étude portant sur les choix possibles d'organisations des savoirs arithmétiques dans plusieurs ouvrages universitaires. Nous allons nous limiter aux objets d'arithmétique que nous avons retenus pour notre étude. Dans un deuxième temps, nous allons dégager les différents types de définitions dans les ouvrages universitaires analysés en faisant référence au travail d'Ouvrier–Buffet (2003) que nous avons présenté au chapitre II.

Nous avons analysé onze manuels et deux cours proposés à l'Université Lyon 1. Ces manuels, ainsi que les notes de cours introduisant les éléments de base de la théorie des nombres, sont destinés aux différentes institutions (cours de base du baccalauréat en mathématiques, Université). Ils sont susceptibles de servir de référence aussi bien théorique que pratique pour les enseignants et les étudiants.

I. Organisations mathématiques dans quelques manuels et notes de cours du supérieur

Dans ce paragraphe, nous rendons compte de l'étude que nous avons conduite pour tenter de dégager l'organisation des notions d'arithmétique à travers les définitions, les théorèmes et les propriétés, afin de nous permettre d'identifier les différents choix possibles. Cette étude nous servira pour l'étude des programmes et des manuels français que nous présentons respectivement aux chapitres IV et V. Nous nous sommes intéressée à l'étude de l'arithmétique dans plusieurs manuels français et anglais, et quelques notes de cours, pour avoir une idée claire sur la manière de traiter l'arithmétique dans deux institutions différentes. Nous avons choisi les manuels et notes de cours dont les titres et les auteurs apparaissent dans le tableau ci–dessous, ils sont ordonnés suivant la date d'édition.

Titre de manuels anglais	Année	Titre de manuels français	Année
Introduction to analytic number theory Auteur: Tom M.Apostol	1976	Arithmétique générale Auteur: A.Doneddu	1962
Elementary theory of numbers Auteur: William J.Leveque	1962	Arithmétique systèmes linéaires structures Auteur: Jacques Pichon	1992
Number theory Auteur: George E.Andrews	1971	Introduction à la théorie des nombres Auteurs: Jean-Marie De Koninck Armel Mercier	1994
A computational Introduction to Number Theory And Algebra Auteur: Victor Shoup	2005	Mathématiques discrètes 1 Fondements et arithmétique entière Auteur: Hans-Heinrich Nägeli	1998
		Mathématiques : Arithmétique Cours & Exercices Auteur: André Warusfel et al	2002
		Mathématiques d'école, nombres, mesures et géométrie. Auteur: Daniel Perrin	2005
		« Introduction à la théorie des nombres » traduit « An Introduction to the Theory of Numbers » Traduction, François Sauvageot G.H.Hardy E.M.Wright	2007
		Cours DEUG- MIAS – Unité d'enseignement 11 - Université Lyon I – Arithmétique. Auteur: Cours - Pierre Lavaurs -	2002
		Cours Battie,V à l'université Lyon 1 « Arithmétique des entiers naturels » au sein de l'enseignement « Arithmétique et nombres complexes » à destination des étudiants inscrits en AUP (Année Universitaire Préparatoire)	2007/2008 2008/2009

Nous remarquons que l'arithmétique est indiquée dans les manuels anglais sous le titre : « Théorie des nombres » ou « Théorie élémentaire des nombres », tandis que la plupart des manuels français introduisent le terme « Arithmétique » dans le titre.

I.1 Organisations mathématiques

Nous tentons d'examiner comment sont structurées les notions d'arithmétique à travers les définitions, les théorèmes et les propriétés dans les manuels étudiés, afin de mettre en évidence les différents choix possibles pour présenter des notions d'arithmétique.

I.1.1 Les titres des chapitres

Il nous semble intéressant d'étudier le titre des chapitres sous lequel les notions d'arithmétique que nous étudions dans notre travail de thèse sont présentées dans ces manuels ; ceci nous donne des indications sur l'entrée qui est privilégiée par les auteurs des manuels.

Les manuels anglais :

Deux manuels privilégient les nombres premiers pour proposer les notions d'arithmétique sous l'intitulé *« The fundamental theorem of arithmétic » ;* un autre manuel met l'accent sur l'aspect algorithmique de l'arithmétique en proposant le chapitre intitulé : *« The euclidean algorithm and its consequences »*, alors que le choix du quatrième manuel consiste à mettre en avant le fait que l'arithmétique est relative aux entiers, en proposant un chapitre intitulé : *« Basic properties of the integers ».*

Les manuels français :

Le titre du chapitre dans trois manuels et dans les deux cours proposés à l'université s'intitule *« Arithmétique ».* Un autre manuel choisi comme titre *La divisibilité,* alors qu'un autre manuel propose un chapitre intitulé *« La suite des nombres premiers ».* Un manuel choisit de proposer les notions d'arithmétique dans trois chapitres : un premier chapitre intitulé *« Divisibilité »* dans lequel il propose la relation de divisibilité, la division euclidienne et l'algorithme d'Euclide ; un deuxième chapitre intitulé *« Nombres premiers » ;* et un troisième chapitre intitulé *« Les grands théorèmes »* dans lequel il propose les notions de PGCD et PPCM. Un manuel propose les notions d'arithmétique sous l'intitulé « Les nombres naturels ».

I.1.2 Les différentes notions d'arithmétique dans les ouvrages et notes de cours étudiés

Pour chacune des notions ou groupes de notions ci-dessous, nous présentons et commentons quelques définitions, théorèmes et propriétés rencontrés dans les différents ouvrages et notes de cours étudiés : Division euclidienne, Divisibilité, PGCD, PPCM et nombres premiers entre eux, Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers.

- Division euclidienne

La division euclidienne est définie par un théorème-définition ou par une propriété-définition permettant de traiter l'aspect existence et l'unicité du couple (q, r) où q désigne le quotient et r le reste.

La définition de la division euclidienne se présente de la manière suivante :

> « ***Définition*** *: L'opération qui à a et b associe q et r vérifiant a= bq+r et $0 \leq r < b$ s'appelle la* ***division euclidienne*** *de a par b. Dans cette opération on dit que a est le* ***dividende****, b le* ***diviseu****r, q le* ***quotien****t et r le* ***reste****. » (Perrin, 2005, p.11)*

Suivant les auteurs, la division euclidienne est proposée avant, ou après, la relation de divisibilité, voir après l'ensemble des notions élémentaires d'arithmétique. Le choix de proposer la division euclidienne à la suite de la divisibilité peut être justifié par le fait que la démonstration de l'unicité du couple (q, r) s'appuie sur les propriétés de divisibilité (dans le cas r = 0, on a (a ∣ b) ; nous pouvons lire par exemple :

> *« **Théorème :** (division euclidienne) Soit a, b ∈ Z avec a > 0 ; alors, il existe des entiers q et r tels que $b = a\, q + r$, où $0 \leq r < a$. De plus, si a ne divise b, alors $0 < r < a$.*
>
> *Démonstration : considérons l'ensemble : $S = \{b - ma \backslash m \in Z, b - ma \geq 0\}$*
>
> *Il est facile de voir que $S \subset N \cup \{0\}$ et que $S \neq 0$, d'où, d'après le principe du bon ordre[1], on conclut que S contient un plus petit élément $r \geq 0$. Soit q l'entier satisfaisant à $r = b - q\, a$. Ainsi, on a $b = a\, q + r$. il reste à montrer que $r < a$. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $r \geq a$. Alors, dans ce cas, on a*
>
> *$b - q\, a \geq a$, ce qui est équivalent à $b - (q+1)\, a \geq 0$;*
>
> *mais $b - (q + 1)\, a \in S$ et $b - (q+1)\, a < b - q\, a$, ce qui contredit le fait que b- q a est le plus petit élément de S. Donc, $r < 0$. Enfin, il est clair que si r =0, on a a| b, d'où la seconde affirmation du théorème. » (Mercier et De Doninck, 1994, p.5)*

En ce qui concerne l'unicité du couple (q, r) ; voici la démonstration :

> *« Les entiers q et r dans le théorème (1.9)[2] sont uniques. En effet, s'il existe deux autres entiers q_1 et r_1 tels que $b= a q_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 < a$, alors $a\,(q_1 - q) = r - r_1$ et ainsi $a|(r - r_1)$. En vertu du théorème 1.8v (qui est **(a| b and b ≠ 0 ⇒ ∣ a ∣ ≤ ∣ b∣)**,* on a, si *$r - r_1 \neq 0$, $|\, r - r_1 \,| \geq a$. Or, cette dernière inégalité est impossible puisque $-a < r - r_1 < a$. Donc, $r = r_1$ et, puisque $a \neq 0$, alors $q_1 = q$; d'où l'unicité. » (Ibid, p.6)*

Cette démonstration de l'unicité du couple (q, r) repose sur les éléments suivants :

- a = b c ⇒ c ∣ a (définition de divisibilité).
- (a| b *and* $b \neq 0$ ⇒ ∣ a ∣ ≤ ∣ b∣) (au sens de l'ordre de divisibilité)

Ceci permet de proposer l'étude de la division euclidienne après l'étude de la divisibilité. Cependant, la preuve donnée ci-après nous montre que l'unicité de couple (q, r) peut être démontrée sans utiliser les propriétés de divisibilité.

[1] Bon ordre : tout ensemble non vide S inclus dans N contient un plus petit élément.
[2] Le théorème précédent de la division euclidienne.

« Pour montrer l'unicité, raisonnons par l'absurde. Si on a deux écritures distinctes

$a = bq + r = bq' + r'$ on a $q \neq q'$ (si $q = q'$ on a aussi $r = r'$ et les écritures sont identiques) et on peut supposer, par exemple, $q > q'$, donc $q - q' \geq 1$. On a alors, par différence,

$b(q - q') = r' - r$, d'où $r' - r \geq b$. Mais, par définition de la division, on a $0 \leq r' - r \leq r' < b$, d'où une contradiction. » (Perrin, p.11)

Ceci montre qu'il est possible de proposer la division euclidienne en premier, ce qui permet de définir la relation de divisibilité comme un cas particulier de la relation « $a = bq + r$, avec q et r entiers et $0 \leq r < a$ » : lorsque le reste est nul, la relation devient « $a = bq$ », ce qui permet de définir la relation de divisibilité : « b divise a » et « q divise a ».

On peut également se poser la question de la place de la division euclidienne par rapport au PGCD.

Le choix de présenter la division euclidienne avant l'introduction du pgcd peut être justifiée par deux raisons :

- La démonstration de l'unicité du pgcd repose sur la division euclidienne (nous traiterons ce cas dans le paragraphe consacré au PGCD).
- La démonstration du théorème de Bézout repose sur plusieurs types de démonstrations, dont l'une fait appel explicitement à la division euclidienne. Ravel (2003) cite dans sa thèse trois types de preuves pour démontrer ce théorème :

*« 1. **Démonstration par les idéaux de Z**, qui est hors programme : PGCD (a, b)=1 équivaut*

*à (a)+(b)=(1)=**Z**, où (a) est l'idéal engendré par a ;*

*2. **Démonstration utilisant la division euclidienne et**, de façon sous-jacente, la notion*

*d'idéal avec **l'ensemble G={am+bn/m∈Z et n∈Z}** : on montre que **G** admet un plus petit élément D puis on prouve par l'absurde que D divise a et D divise b ;*

*3. **Démonstration par l'algorithme d'Euclide étendu** (par méthode de descente ou de remontée): les restes successifs de l'algorithme d'Euclide sont écrits sous la forme au+bv. » (Ravel,2003, p.54)*

- Divisibilité

La relation de divisibilité est définie en termes de multiplication de la manière suivante :

*« Soient a, b ∈ Z. On dit que b divise a et on note b| a s'il existe q∈ Z avec a = b q. On dit aussi que b est un **diviseur** de a ou que a est un **multipl**e de b .» (Perrin, p.19).*

Elle peut être définie aussi en termes de division exacte : a | b si et seulement si b ÷ a = d ; d est un nombre entier naturel. Comme nous l'avons vu plus haut, elle peut également être définie en référence à la division euclidienne : si le reste de la division euclidienne de a par b est nul, on dit que b divise a.

Lorsque l'on travaille dans Z, les deux définitions, la première relative à la multiplication et l'autre à la division euclidienne sont apparemment la même chose ; ce n'est plus le cas dans un anneau quelconque :

> *« En effet, la divisibilité peut être définie dans n'importe quel ensemble muni d'une loi qui vérifie les propriétés de la multiplication ; en fait, on peut définir cette notion de divisibilité dans tout anneau. Par contre la division euclidienne est plus particulière et son existence fait l'objet d'un théorème qui, dans Z, met en jeu la relation d'ordre. L'existence de la division euclidienne est une propriété très forte de Z ; elle n'existe pas dans tous les anneaux, et l'étude des anneaux dans lesquels il est possible de définir une division euclidienne fait l'objet d'une attention particulière ; les propriétés qui en découlent sont très fortes. » (Pichon, 1992. p.15)*

La définition relative à la divisibilité (division exacte) est présente dans la majorité des manuels analysés. Rappelons que la divisibilité est notée par une barre verticale (a | b) pour souligner que a divise b.

Nous reprenons ci-dessous les propriétés de la divisibilité telles qu'elles sont présentées dans Apostol (1976).

« Theorem: Divisibility has the following properties:

(a) $n | n$ (reflexive property)

(b) $d | n$ and $n \backslash m$ implies $d | m$ (transitive property)

(c) $d | n$ and $d \backslash m$ implies $d | (an+ bm)$ (linearity property)

(d) $d | n$ implies $ad | an$ (multiplication property)

(e) $ad | an$ and $a \neq 0$ implies $d | n$ (cancellation law)

(f) $1 | n$ (1 divides every integer)

(g) $n | 0$ (every integer divides zero)

(h) $0 \backslash n$ implies $n = 0$ (Zero divides only zero)

(i) $d | n$ and $n \neq 0$ implies $| d | \leq | n |$ (comparison property)

(j) $d | n$ and $n \backslash d$ implies $| d | = | n |$

(k) $d | n$ and $d \neq 0$ implies $(n / d) \backslash n$

(Apostol, 1976, p.14)

Les propriétés précédentes sont proposées au sens de l'ordre de divisibilité qui constitue une relation d'ordre partiel sur N. Notons que dans le théorème énoncé ci-dessus les quantificateurs sont systématiquement omis.

- PGCD, nombres premiers entre eux, algorithme d'Euclide, et PPCM

L'analyse des manuels nous a conduite à distinguer principalement deux façons de définir le PGCD et le PPCM :

- Définir les notions de PGCD et de PPCM en termes ensemblistes.
- Définir ces notions à partir de la décomposition en facteurs premiers.

Il y a d'autres manières de définir le PGCD ; nous nous limitons aux définitions proposées dans les manuels analysés.

Nous allons d'abord présenter la définition du PGCD en termes ensemblistes.

1 : Définir le PGCD en termes ensemblistes se scinde en deux manières différentes : la relation de divisibilité | et le terme intersection ∩.

1.1 Définition avec la relation de divisibilité : elle peut être proposée sous deux formes équivalentes en distinguant l'ordre naturel et l'ordre de divisibilité :

1.1.1 La première consiste à définir le PGCD comme le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs de a et de b au sens de l'ordre naturel, nous pouvons citer la définition proposée par Perrin (2005) :

> *« Proposition – Définition : Soient a, b∈ N non tous deux nuls. L'ensemble D des diviseurs communs de a et b admet un plus grand élément. On l'appelle le plus grand commun diviseur de a et b et on le note pgcd (a, b).*
>
> *Démonstration. L'ensemble D est non vide (il contient 1) et fini (si a est non nul tout diviseur de a est ≤ a,.) donc D contient un plus grand élément en vertu [3]de1.4.2 » (Perrin, 2005, p.24).*

L'algorithme d'Euclide est proposé à la suite de la définition du PGCD ; ce choix peut être justifié du fait que l'algorithme d'Euclide est considéré comme une méthode pratique de la recherche de PGCD. La démonstration de cet algorithme montre l'existence du PGCD ; elle s'appuie sur la définition de diviseur commun de deux entiers. Nous proposons dans ce qui suit la démonstration de l'algorithme d'Euclide telle qu'elle est proposée dans Apostol (1976).

[3] « Toute partie finie non vide de N a un plus grand élément » (Perrin, 2005, p.10).

« Theorem: The Euclidean algorithm. Given positive integer a and b, where b no divides a.

Let $r_0 = a$, $r_1 = b$, *and apply the division algorithm repeatedly to obtain a set of remainders* r_2 , r_3, …, r_n, $r\, r_{n+1}$ *defined successively by the relations:*

$$r_0 = r_1\, q_1 + r_2\ , \qquad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2\, q_2 + r_3\,, \qquad 0 < r_3 < r_2$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}\, q_{n-1} + r_n\ , \qquad 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n\, q_n + r_{n+1}\ , \qquad r_{n+1} = 0$$

Then r_n *the last nonzero remainder in this process, is (a, b), the gcd of a and b.*

Proof: There is a stage at which $r_{n+1} = 0$ *because the* r_i *are decreasing and nonnegative. The last relation,* $r_{n-1} = r_n\, q_n$ *shows that* r_n / r_{n-1}*.The next to last show* r_n / r_{n-2}*. By induction we see that* r_n *divides each* r_i*. In particular* $r_n / r_1 = b$ *and* $r_n / r_0 = a$, *so* r_n *is a* ***common divisor*** *of a and b.*

Now let d be any common divisor of a and b. The definition of r_2 *shows that* d/ r_2*. The next relation shows that* d/ r_3*.By induction, d divides each* r_i *so* d/ r_n*. Hence* r_n *is the required gcd.”* *(*Apostol*, 1976, p.20)*

1.1.2 Une deuxième manière de définir le PGCD consiste à proposer un théorème-définition ou une proposition-définition qui permet de traiter l’aspect existence et unicité du PGCD. Nous sommes ici en présence de l’ordre divisibilité et de l’ordre naturel. Voici l’énoncé de cette définition telle qu’elle est proposée dans Andrew (1971) :

Definition: « if a and b are integers, not both Zero, then an integer d is called ***the greatest common divisor*** *of a and b if*

(i) *d > 0,*

(ii) *d is a common divisor of a and b, and*

(iii) *each integer f that is a common divisor of both a and b is also a divisor of d.*

Theorem: « If a and b are integers, not both zero, then g.c.d exists and is unique. “

(Andrews, 1971, p.15-16)

La démonstration de ce théorème est proposée plus loin.

Comme nous l'avons dit, les deux définitions précédentes sont équivalentes, ce qui diffère c'est que la première définition repose sur l'ordre naturel et peut nous assurer l'aspect existence et l'unicité du pgcd. A ce propos, nous pouvons lire ce que Nägeli (1998) explicite sur l'ordre naturel et l'ordre divisibilité :

> *« Pour définir ce « plus grand » commun diviseur, nous pourrions envisager deux relations : la relation $\leq$ et la relation de divisibilité. La première présente l'avantage d'être une relation d'ordre total, ce qui garantit tant l'existence que l'unicité du plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs de deux nombres non tous deux nuls : cet ensemble est en effet fini puisque, par (si $x \mid y \wedge y \neq 0$, alors $|x| \leq |y|$ [Z]), un diviseur d'un entier non nul ne saurait le dépasser en valeur absolue. Dans ce contexte, il parait plus naturel de considérer " le plus grand " au sens de la relation de divisibilité : il s'agit de la borne inférieure, (..,) sur la relation de divisibilité » (Nägeli, 1998, p.146).*

D'un point de vue technologique, et dans certains cas, chacun de ces ordres est au service de l'autre comme nous le montre Battie (2003) ; un lien entre les deux ordres peut être précisé à partir de deux relations :

- $a \mid b \Rightarrow a \leq b$
- $a \mid b$ et $b \mid a \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow a \leq b$ et $b \leq a$

> *« C'est l'ordre divisibilité qui a priori est au service de l'ordre naturel puisque la réciproque n'est pas vraie. Ce dernier interviendra pour établir des résultats de divisibilité lorsque l'égalité sera en jeu, comme en atteste le deuxième lien.(…).Avec le fait donc que, dans Z, le plus grand commun diviseur au sens de l'ordre naturel soit aussi le plus grand au sens de l'ordre divisibilité, on peut penser que, dans le cas des problèmes où la notion de PGCD est en jeu, l'ordre naturel puisse aussi être au service de l'ordre divisibilité au niveau de la composante opératoire. » (Battie,2003, p.80-81)*

Ainsi, la troisième condition (iii) dans la définition précédente du PGCD peut se traduire par : « d est, pour la relation de divisibilité, « le plus grand » diviseur commun ».

D'après Perrin[4], le résultat suivant : « Si d est le pgcd de a et b et si δ est un diviseur de a et b, alors δ divise d » est « le cœur de l'arithmétique » car avec lui on a facilement le théorème de Gauss et donc l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Nous revenons maintenant au théorème qui affirme l'existence et l'unicité du PGCD de deux entiers ('' *If a and b are integers, not both zero, then g.c.d exists and is unique''*).

La démonstration de ce théorème proposée par Andrew (1971) repose sur l'algorithme d'Euclide, qui fait appel à l'application répétée de la division euclidienne :

« Proof: Clearly g.c.d.(a, b) is not affected by the signs of a and b. We have asserted that not both a and b are zero; however, if either is zero, say b = 0, then g.c.d.(a, 0) is clearly equal to |a|. In the following proof, we may therefore assume that $a \geq b > 0$.

By ***Theorem 2-1***[5]*, there exist* q_1 *and* r_1 $(0 \leq r_1 < b)$ *such that* $a = b\,q_1 + r_1$.

If $r_1 > 0$*, there exist* q_2 *and* r_2 *such that* $b = r_1\, q_2 + r_2$*, where* $0 \leq r_2 < r_1$.

If $r_2 > 0$*, there exist* q_3 *and* r_3 *such that* $r_1 = r_2\, q_3 + r_3$*, where* $0 \leq r_3 < r_2$.

This process may be continued as long as the newly arising r_i *does not equal zero.*

Since $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > 0$,

We see, by mathematical induction, that $0 \leq r_i < b - i$ *. Therefore, in at most b steps, we shall obtain an* r_n *that is zero.*

Thus the last application of Theorem 2-1 in our procedure leads to the result $r_{n-2} = r_{n-1}\, q_n + 0$;

That is, $r_n = 0$.

(…) We have constructed the r_i *so that* $r_{n-1} > 0$*. By working backward from the final equation, we may establish successively that* r_{n-1} *divides* r_{n-2}, r_{n-3}, … r_2, r_1*,b, and a. Finally, if f divides both a and b , we may proceed successively from the initial equation to deduce that f divides* $r_1\ r_2 \ldots r_{n-2}$*, and* r_{n-1}*. (Mathematical induction is tacitly used in both of these procedures). Thus* r_{n-1} *satisfies the requirements of Definition 2-1*[6]*; therefore,* r_{n-1} *= g.c.d.(a, b).*

Each pair of integers has only one greatest common divisor; for, if both d1 and d2 are greatest common divisors of some pair a and b, it follows from (iii) of Definition 2-1 that

g d1 = d2 and h d2 = d1, where h and g are positive integers; hence, d2= ghd2; thus 1 = gh, and so g=h=1. We conclude that d1 =d2. » (Andrews, 1971, p.17)

[4] Ceci est extrait d'une correspondance entre Perrin et Battie, mis en ligne par Daniel Perrin sur son site dans la rubrique « Documents pour la préparation au CAPES » : le fichier correspondant à ce document intitulé « Sur quelques questions d'arithmétique » a pour nom Battie.pdf.

[5] Theorem 2-1 : (Euclide division Lemma) : For any integers k (k > 0) and j, there exist unique integers q and r such that $0 \leq r < k$ and $j = q\,k + r$.

[6] Definition 2-1 : C'est la définition de PGCD citée dans le paragraphe 1.1.2

1.2 Une deuxième façon de définir le PGCD en termes ensemblistes repose sur l'intersection de deux ensembles :

« Nous savons que D(a) et D(b) sont finis. Leur intersection D(a, b) est donc finie aussi. Elle admet par suite un plus grand élément que l'on appelle plus grand commun diviseur de a et b que l'on note : δ (a, b), ou plus simplement δ lorsque aucune confusion n'est à craindre. D(a) est majoré par a, D(b) est majoré par b, donc les deux nombres a et b majorent :

$D(a) \cap D(b) = D(a, b)$. » (Doneddu, 1962, p.171)

2. Une autre façon de définir le PGCD est de partir de la décomposition en facteurs premiers ; cela est lié au caractère factoriel de l'anneau Z qui fait que tout entier n peut s'écrire sous la forme factorisée :

$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha i}$ avec p_i décrivant l'ensemble des nombres premiers, $\alpha i \in$ N, où seul un nombre fini des αi sont non nuls.

L'utilisation de la décomposition en facteurs premiers dans la définition du PGCD justifie le choix d'aborder les notions de nombre premier et la décomposition en facteurs premiers avant d'introduire le PGCD.

Le PGCD peut être défini dans ce cas là par un théorème-définition de la manière suivante :

« Théorème : pour tout couple (a, b) d'entiers naturels de décomposition en facteurs premiers $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha i}$, $b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta i}$, l'ensemble des leurs diviseurs communs est l'ensemble des diviseurs de l'entier $d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma i}$ avec, pour tout indice i, $\gamma = \min(\alpha i, \beta i)$.

Définition : Pour tout couple (a, b) d'entiers naturels a et b non nuls, on appelle PGCD (plus grand commun diviseur) de a et b, et l'on note PGCD (a, b), ou $a \wedge b$, voire même (a, b) l'entier d défini par le théorème précédent. (Warusfel et al, 2002, p.113).

Ainsi la notion de PGCD peut-être introduite soit avant l'étude des nombres premiers avec la définition ensembliste, soit après la définition des nombres premiers dans le cas où la définition du PGCD est basée sur la décomposition en facteurs premiers ; notons que dans ce dernier cas, ceci néanmoins ne signifie pas que la décomposition en facteurs premiers soit nécessairement privilégiée pour la recherche du PGCD de deux nombres.

Comme nous l'avons dit plus haut, le choix de proposer l'algorithme d'Euclide pour démontrer l'existence et l'unicité du PGCD de deux entiers est possible ; ce choix met davantage en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique.

Dans ce qui suit, nous indiquons les propriétés du PGCD proposées par Apostol (1986), qui adopte le point de vue selon lequel le PGCD de deux nombres permet de définir une loi de composition interne sur l'ensemble des entiers :

« Theorem: The gcd has the following properties:

(a) $(a, b) = (b, a)$

$aDb = bDa$ *(commutative law)*

(b) $(a, (b, c)) = ((a, b), c)$

$aD(bDc) = (aDb)Dc$ *(associative law)*

(c) $(ac, bc) = |c|(a, b)$

$(ca)D(cb) = |c|(aDb)$ *(distributive law)*

(d) $(a, 1) = (1, a) = 1, (a, 0) = (0, a) = |a|$

$aD1 = 1Da = 1, aD0 = 0Da = |a|$ *"*

(Apostol, 1976, p. 16)

«Théorème: soit $d = (a, b)$ *et soit* $m \in Z$ *; alors :*

i) $(a, b+ma) = (a,b) = (a,-b)$

ii) $(am,bm) = m\,(a, b)$ *où* $m \neq 0$

iii) $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{d}\right) = 1$

iv) Si $g \in Z$ *¡{0} tel que* g/a *et* g/b*, alors* $\left(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}\right) = \frac{1}{|g|}(a, b)$

(Mercier et al, 1994, p.9)

I.1.2.3.3 Nombres premiers entre eux

En ce qui concerne la notion de « nombres premiers entre eux », elle est rattachée à la notion de PGCD, ce qui rend nécessaire de la présenter après l'étude des notions de diviseur commun et de plus grand diviseur commun. Par exemple, Perrin (2005) donne la définition suivante :

« Soient a, b ∈ N. On dit que a et b sont ***premiers entre eux*** *si l'unique diviseur commun de a et b (dans N) est 1. » (Perrin ,2005, p.24)*

I.1.2.3.4 Multiple communs et PPCM

Quant à la notion de multiple commun et celle de plus petit multiple commun, elles sont le plus souvent proposées à la suite du PGCD.

Comme dans le cas du PGCD, la notion de PPCM peut être proposée selon deux manières : sous forme ensembliste, ou à partir de la décomposition en facteurs premiers.

La seconde fait appel à la décomposition en facteurs premiers de la manière suivante :

$$\{a, b\} = \prod_{p1} p^{\max(\alpha i, \beta i)} \quad ; \qquad a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha i} \text{ , } b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta i}$$

Dans les manuels étudiés, les deux notions de PGCD et PPCM interviennent de façon isolée ; chacune joue un rôle « objet-outil », en particulier pour rendre irréductible les fractions (PGCD) et réduire au même dénominateur (PPCM). On peut néanmoins utiliser la relation liant ces deux notions pour trouver l'une des valeurs à partir de l'autre ; cette relation fait l'objet d'un théorème dans Warusfel et al. (2002) :

> *« Théorème : Pour tout couple (a, b) d'entiers relatifs de PGCD d et de PPCM m, on dispose de l'égalité $|ab| = dm$. »*
>
> *(Warusfel et al, 2002, p.124)*

Nous remarquons que le PPCM est souvent proposé après l'étude de PGCD ; cependant, il est également possible de l'introduire avant l'étude du PGCD, car la démonstration de l'existence et l'unicité du PPCM est indépendante de la notion de PGCD. Nous présentons ici le théorème relatif au PPCM dans le Cours de Pierre Lavaurs (2002) à Lyon 1.

> *Théorème : Soit $a \geq 1$ et $b \geq 1$ deux entiers. Alors il existe un unique entier $M \geq 1$ tel que pour tout $m \geq 1$: m multiple de a et b $\Leftrightarrow$ m multiple de M.*
>
> *Cette démonstration est la plus ´élémentaire ; elle consiste `a choisir pour M le multiple commun de a et b le plus "petit" (au sens de la relation habituelle $\leq$), puis vérifier qu'il marche. La preuve est en deux parties : d'abord l'existence de M (partie significative) puis son unicité (partie très facile).*
>
> ** Existence de M.*
>
> *Introduisons l'ensemble A formé des entiers strictement positifs simultanément multiples de a et de b. L'ensemble A n'est pas vide, puisqu'il contient l'entier ab. Il admet donc un plus petit élément M. On va vérifier que ce M convient.*
>
> *Pour faire cette vérification, soit un $m \geq 1$; nous avons désormais `a montrer une équivalence, distinguons méthodiquement les deux sens.*
>
> *• Preuve de ==>): Supposons donc que m est un multiple commun de a et b, et montrons que c'est un multiple de M. Pour ce faire, effectuons la division euclidienne de m par M, soit $m = Mq + r$, avec $0 \leq r < M$. Comme m et M sont des multiples de a, $r = m - Mq$ aussi ; de même avec b. Ainsi r est un multiple commun de a et b. Si r était un entier strictement positif, vu l'inégalité´ $r < M$ il contredirait la minimalité de M. C'est donc que $r = 0$ et donc que m est un multiple de M.*

• Preuve de $\Leftarrow$: Supposons ici que m est un multiple de M. Comme M est lui-même multiple de a, m est `a son tour multiple de a ; de même avec b. C'est réglé.

** Unicité de M.*

Soit M et M' vérifiant les hypothèses du théorème. Comme M est multiple de M, c'est un multiple commun de a et b, donc un multiple de M'. De même, M' est un multiple de M. Comme ils sont tous deux strictement positifs, ils sont forcément égaux. » (Lavaurs, 2002.)

Notons enfin que définir le PGCD et PPCM de deux entiers à partir de la décomposition en facteurs premiers implique de les proposer après avoir étudié les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers.

- Les nombres premiers et le théorème fondamental de l'arithmétique

Les nombres premiers

Le choix d'introduire les nombres premiers à la suite de la divisibilité, est justifié par le fait que la définition des nombres premiers repose sur la divisibilité.

Un nombre entier est soit premier, soit composé. Les deux définitions s'appuient essentiellement sur la notion de diviseur et donc sur la relation de divisibilité. Tout nombre entier vérifie les deux propriétés : « Tout entier est divisible par 1 » et « Tout entier est divisible par lui-même » ; les nombres premiers sont ceux qui n'admettent pas d'autres diviseurs que 1 et eux-mêmes ; un nombre est dit composé si et seulement si il est supérieur strictement à 1 et s'il n'est pas premier :

« Un entier naturel n est premier s'il admet exactement deux diviseurs (1et n). Sinon et s'il est strictement supérieur à 1, il est dit composé. » (Warusfel et al, 2002, p.68)

Un nombre composé, est donc un nombre qui s'écrit comme un produit de deux nombres différents de 1 et de lui-même :

« Dire qu'un entier a > 1 est composé signifie que a s'écrit a = bc avec 1< b< a et

1< c<a. » (Perrin, 2005, p.30)

Les nombres premiers occupent une place privilégiée dans la théorie des nombres ; à ce propos nous pouvons lire :

« Les nombres premiers forment le noyau essentiel de l'arithmétique supérieur (encore appelée théorie des nombres). L'extrême simplicité de leur définition ainsi que les mystères de leurs propriétés en font un thème d'actualité indémodable, qui constitue l'un des rares sujets de

recherche toujours actifs en mathématiques et connus du plus large public ». (Warusfel et al, p.68)

En général, la définition des nombres premiers se fait sur l'ensemble des entiers naturels. Cependant, il est possible de définir ces nombres sur les entiers relatifs en prenant en compte les valeurs +1, -1, p, -p de la manière suivante :

« Définition : Un entier relatif n est premier s'il admet exactement quatre diviseurs

(1, -1, n et –n). Sinon et s'il est strictement supérieur à 1 en valeur absolue, il est dit composé. » (Warusfel et al, 2002, p.68).

Le théorème suivant nous précise à quelle condition un entier relatif est premier :

« Théorème : Un entier relatif est premier si et seulement si sa valeur absolue est un entier naturel premier. » (ibid, p.68).

Dans les manuels, les nombres premiers se notent souvent par p, q, n,…

Le théorème fondamental de l'arithmétique

La décomposition en facteurs premiers, qui se trouve souvent dans les manuels étudiés sous la rubrique « le théorème fondamental de l'arithmétique », est nécessairement proposée après l'étude des nombres premiers. Le théorème fondamental de l'arithmétique affirme l'existence et l'unicité de la décomposition en facteurs premiers pour tout entier strictement plus grand que 1 ; sa démonstration comporte deux parties : celle qui établit que chaque nombre peut être écrit comme un produit de nombres premiers ; et celle qui établit que deux représentations d'un même nombre sont essentiellement les mêmes, à l'ordre près.

Plusieurs types de preuve existent pour le théorème fondamental de l'arithmétique. Nous nous intéressons à la preuve de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, car elle permet de justifier le choix de proposer les nombres premiers et le théorème fondamental de l'arithmétique avant ou après le PGCD et les nombres premiers entre eux ; pour cela nous allons présenter deux types de preuves :

A. La preuve de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers s'appuie sur le lemme d'Euclide dont la démonstration repose sur le théorème de Gauss, dont la démonstration repose sur le théorème de Bézout, et sur la notion de pgcd et de nombres premiers entre eux. Ceci permet de légitimer le choix de proposer le théorème fondamental de l'arithmétique après le PGCD. Nous allons dans ce qui suit présenter la démonstration de chaque théorème pour mettre en évidence ce choix. Nous commençons par le théorème de Gauss :

*« **Le théorème de Gauss** : Soient a, b, c$\in$ Z. On suppose que a et b sont **premiers entre eux** et que a divise b c. Alors a divise c.*

*Démonstration : La seule évocation de nombres premiers entre eux doit faire penser à **Bézout** : il existe λ, μ $\in Z$ avec $\lambda a + \mu b = 1$. On multiple alors par c et on obtient $\lambda a\ c + \mu b\ c = c$. Comme a divise a c (c'est clair) et b c (par hypothèse), a divise c par2.3. (2.3 : Si n divise a et b, alors n divise a + b et a – b) ». (Perrin, 2005, p.27)*

Dans cette démonstration, nous voyons que le théorème de Gauss repose sur théorème de Bézout et sur les notions de PGCD et de nombres premiers entre eux, mais il est possible de démontrer ce théorème sans utiliser le théorème de Bézout en s'appuyant sur le théorème-définition de PGCD, nous n'entrons pas en détail dans ce sujet[7] ; il nous suffit de signaler que le théorème de Gauss fait appel aux notions de PGCD et de nombres premiers entre eux, et que ce théorème est considéré comme très important pour démontrer le lemme d'Euclide et le théorème fondamental de l'arithmétique. Parmi les manuels étudiés, deux présentent les nombres premiers et le théorème fondamental de l'arithmétique après la divisibilité, et repoussent la démonstration de lemme d'Euclide et celle de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, qui sont abordés après le theorème de Gauss. La démonstration ci-dessous du lemme d'Euclide est basée sur le théorème de Gauss :

*« **Lemme d'Euclide** : Soit p un nombre premier. On suppose que p divise le produit ab avec a, b $\in N$. alors p divise a ou b.*

Démonstration : Si p divise a le résultat est acquis. Sinon, c'est que p et a sont premiers entre eux par (si p est un nombre premier et a un entier quelconque, on a l'équivalence :

p est premier aves a $\Leftrightarrow$ p ne divise pas a). Mais alors p divise b en vertu du théorème de Gauss. »(ibid,p.32-33)

Le lemme d'Euclide permet de démontrer l'unicité de la décomposition en facteurs premiers (partie unicité du théorème fondamental de l'arithmétique) comme dans la démonstration ci-dessous :

« Théorème : Soit $n \in N$, $n > 1$. On suppose que l'on a

$$n = p_1 \ldots. p_r = q_1 \ldots \ q_s$$

avec r, s $\in N$, où les p_i et les q_j sont des nombres premiers vérifiant $p_1 \leq \ldots \leq p_r$ et $q_1 \leq \ldots \leq q_s$

Alors on a r = s et pour i = 1,.., r, $p_i = q_j$.

Démonstration : On raisonne par récurrence sur n. L'assertion est vraie pour n = 2. En effet, tout nombre premier est ≥ 2 donc l'unique décomposition possible de 2 vérifie r = s = 1et $p_1 = q_1 = 2$. Supposons l'assertion vérifiée pour les entiers $\leq n$ et montrons-la pour n+1. Si on a deux décompositions de n+1 comme ci-dessus, supposons, par exemple, qu'on a $p_1 \leq q_1$.Le nombre premier p_1 divise $q_1 \ldots q_s$ donc aussi l'un des q_j par (4.11).Comme q_j est premier on a

[7] Ce choix est celui qui est suivi dans le cours de Battie (2008).

donc $p_1 = q_j$*, donc aussi* $p_1 = q_1$*puisqu' on a* $p_1 \leq q_1 \leq q_j$*. On a alors* $n = n' \, p_1$*, le nombre* n' *s'écrit*

$$n' = p_2 \ldots . p_r = q_2 \ldots q_s$$

et, comme on a $n' \leq n$*, l'hypothèse de récurrence implique qu'on a r – 1 =s – 1 et* $p_i = q_j$ *pour* $i \geq 2$*, d'où le résultat. » (ibid, p.33)*

Comme nous l'avons dit, le théorème de Gauss permet de donner une nouvelle démonstration de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers de la manière suivante :

« Démonstration : Soit, il existe, le plus petit entier naturel N sans décomposition essentiellement unique, vérifiant donc deux égalités de la forme

$$N = p_1 \ldots . p_k = q_1 \ldots q_H$$

Avec les conventions $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k$ *et* $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_H$ *.*

Soit p_1 *était égale à un* q_j*, en divisant N par* p_1*, on obtiendrait un nombre* $N' < N$ *sans décomposition essentiellement unique, ce qui est exclu.*

A fortiori le nombre premier p_1 *ne divise aucun* q_j*, et est donc premier avec chacun d'eux et avec leur produit N bien qu'il le divise, d'où une contradiction. » (Warusfel et al 2002, ,p. 133)*

B. La démonstration de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers peut être indépendante de la notion de PGCD, ce qui permet de choisir de présenter le théorème fondamental de l'arithmétique avant la notion de PGCD, comme la démonstration suivante le montre :

« Proof: As a preliminary step we note that if an integer n has the unique factorization property, and if a prime p divides n, then p actually occurs in the prime factorization of n; for otherwise we could write n | p as a product of primes, not necessarily unique, and multiplying through by p would yield a second representation for n as a product of primes.

Prime, by definition, have unique factorization; so let us consider an integer n > 1 which is not prime and let us suppose, as induction hypothesis, that all integer a with 1< a < n have the unique factorization property. Suppose that n does not have it, and that we have the two representations : $n = p_1 \, p_2 \ldots = p_1' \, p_2' \ldots,$

Where we again order the factors so that $p_1 \leq p_2 \ldots$ *and* $p_1' \leq p_2' \leq \ldots$

We can suppose that no p_i *is the same as any* p_i'*, since otherwise the common factor could be cancelled and the induction hypothesis applied.*

Because there are at least two factors in each representation, we have

$n \geq p_1 \, p_2 \geq p_1^{\,2}$ *or* $p_1 \leq \sqrt{n}$, *And similarly* $p_1^{'} \leq \sqrt{n}$ *thus the number a = n -* $p_1\ p_1^{'}$ *is nonnegative*

If a were 0, we would have

$$n = p_1\ p_1^{'} = p_1\ p_2 \cdots$$

$$p_1^{'} = p_2 \ldots,$$

and hence $p_1^{'} = p_2$ *contrary to our assumption. Therefore a ≥ 1. But we also find that a ≠ 1, since a = 1 would give n =* $p_1\ p_1^{'}$ *+1 a number not divisible by* p_1 *. Hence a > 1. By the induction hypothesis, a has unique factorization; and since both* p_1 *and* $p_1^{'}$ *and divide a, it follows from the preliminary remark that both of these primes must actually occur in the factorization of a. Furthermore, they are distinct, and consequently a =* $p_1\ p_1^{'}\ b$ *, where b is a positive integer. But then*

$$n = a + p_1\ p_1^{'} = p_1\ p_1^{'}(b+1) = p_1\ p_2 \ldots,$$

$$p_1^{'}(b+1) = p_2 \ldots,$$

And since $p_2 \ldots$ *is a number with unique factorization and divisible by* $p_1^{'}$*, it must be that* $p_1^{'}$ *is one of the primes* $p_2 \ldots$*, contrary to our hypothesis. This contradiction shows that n has unique factorization, and it follows from the induction axiom that all integer larger than 1 have this property. » (Leveque, 1962, p .27-28)*

Dans cette démonstration, ce sont les propriétés de la divisibilité qui sont mobilisées, en particulier la propriété suivante : « si *n* divise *a* et *b*, alors *n* divise *a* + *b* et *a* – *b* ».

I. 2 Ordre théorique des notions d'arithmétique

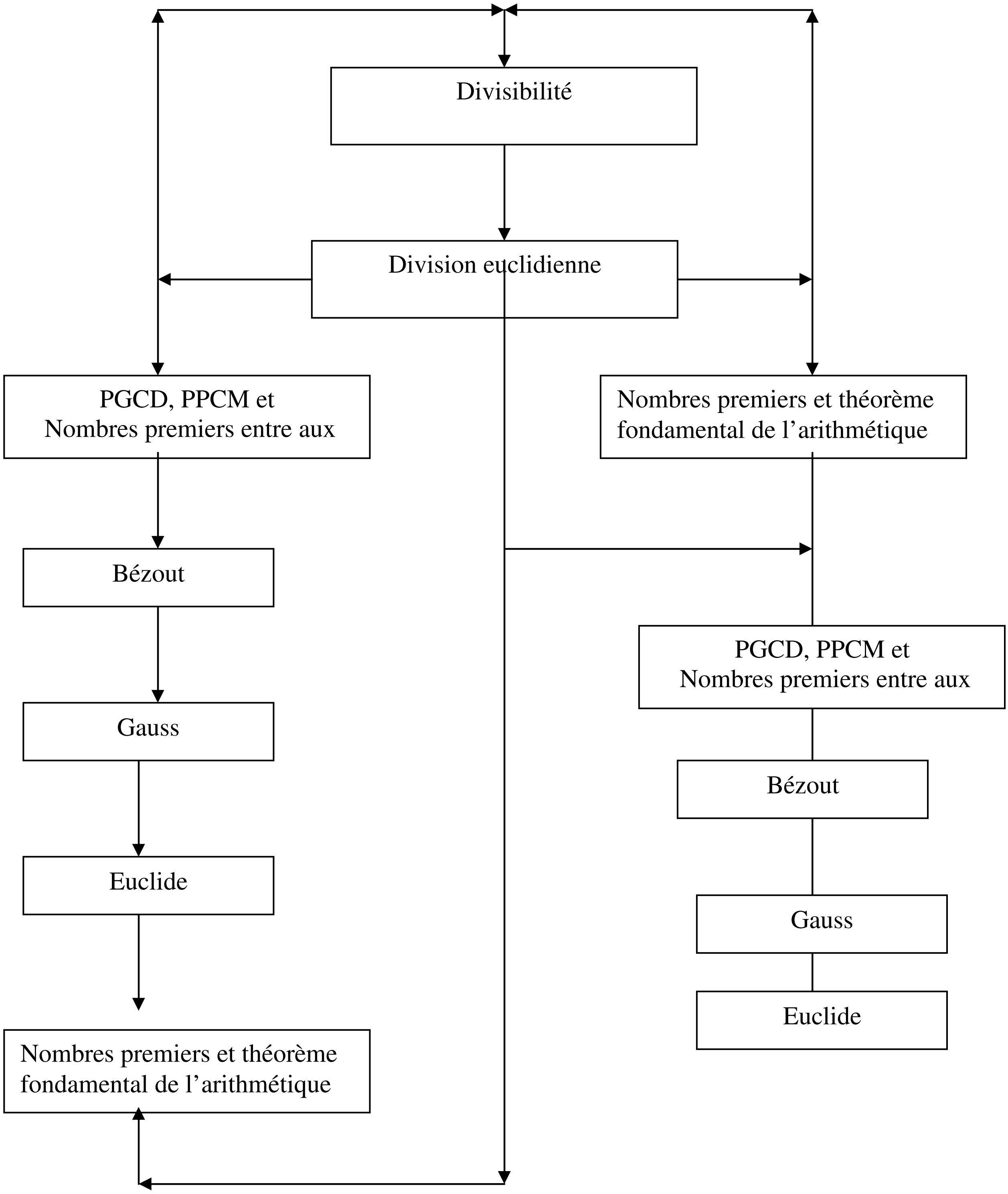
L'étude que nous venons de mener met en évidence qu'il n'y pas un choix unique pour présenter les notions d'arithmétique. En particulier, l'étude du PGCD et du PPCM peut être faite soit avant, soit après l'étude des nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers. Nous présentons dans les deux tableaux ci-dessous les différents choix possibles de présentation des notions d'arithmétique que nous avons identifiés selon deux ordres : dans le premier cas, on propose l'étude du PGCD et du PPCM avant l'introduction des nombres premiers ; dans le second cas, on introduit les nombres premiers avant l'étude du PGCD et du PPCM .

Premier ordre des notions d'arithmétique			
1. Divisibilité	**1. Division euclidienne**	1. Divisibilité	1. Divisibilité
2. Division euclidienne	2. Divisibilité	2. PGCD, nombres premiers entre eux et PPCM.	**2. Division euclidienne et algorithme d'Euclide**
3. PGCD, algorithme d'Euclide et nombres premiers entre eux et PPCM.	3. PGCD, algorithme d'Euclide et nombres premiers entre eux et PPCM.	3. Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers.	3. PGCD, nombres premiers entre eux et PPCM.
4. Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers.	4. Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers.	**4. Division euclidienne et algorithme d'Euclide**	4. Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers.

Figure 1 : Le PGCD est introduit avant l'étude des nombres premiers

Deuxième ordre possible des notions d'arithmétique			
1. Divisibilité	**1. Division euclidienne**	1. Divisibilité	1. Divisibilité
2. Division euclidienne	2. Divisibilité	2. Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers.	2. Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers.
3. Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers.	3. Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers.	3. Pgcd, nombres premiers entre eux et ppcm.	**3. Division euclidienne**
4. Pgcd, algorithme d'Euclide et nombres premiers entre eux et ppcm.	4. Pgcd, algorithme d'Euclide et nombres premiers entre eux et ppcm.	**4. Division euclidienne algorithme d'Euclide**	4. Pgcd, algorithme d'Euclide et nombres premiers entre eux et ppcm.

Figure 2 : Le PGCD est introduit après l'étude des nombres premiers


Divisibilité
Division euclidienne
PGCD, PPCM et
Nombres premiers entre aux
Nombres premiers et théorème
fondamental de l'arithmétique
Bézout
Gauss
Euclide
Nombres premiers et théorème
fondamental de l'arithmétique
PGCD, PPCM et
Nombres premiers entre aux
Bézout
Gauss
Euclide

II. Les différents types de définition

Nous allons maintenant dégager de l'étude que nous venons de mener, les différents types de définitions des notions d'arithmétique en faisant référence au travail de Ouvrier-Buffet (2003) présenté dans le chapitre II. Nous reprenons les définitions proposées dans cette étude pour repérer le statut des définitions relatives à chaque notion en suivant la même organisation que celle que nous avons adoptée dans la première partie de ce chapitre.

Nous allons étudier le statut de définitions selon les critères suivants :

- le type de définition proposée.
- la forme langagière d'une définition.
- la nature de l'objet défini suivant qu'il propose une relation / propriété.
- l'aspect existence et unicité de l'objet défini.

- Division euclidienne

Comme nous l'avons déjà dit, la division euclidienne peut être proposée comme un théorème-définition ou une propriété-définition. La définition proposée ci-dessous est du type *Dénomination.* Elle introduit le vocabulaire de la division euclidienne sous la forme « s'appelle.. », en montrant la relation existant entre les éléments de la division euclidienne de la manière suivante : $b= aq+r$ *et* $0 \leq r < b$.

> « ***Définition*** *: L'opération qui à a et b associe q et r vérifiant* $a= bq+r$ *et* $0 \leq r < b$ *s'appelle la division euclidienne de a par b. dans cette opération on dit que a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste. »* *(Perrin, 2005, p.11)*

> « ***Théorème :*** *(division euclidienne) Soit* $a, b \in Z$ *avec* $a > 0$ *; alors, il existe des entiers q et r tels que* $b = a q + r$*, où* $0 \leq r < a$*. De plus, si a ne divise b, alors* $0 < r < a$*.*

> *(Mercier et al, 1994, p.5)*

La question de l'unicité qui n'apparaît pas dans l'énoncé est traitée dans la preuve donnée par l'auteur.

- Divisibilité

La définition proposée pour la divisibilité est une définition de type *dénomination*. La forme langagière de cette définition est de la forme « on dit que… » :

> *« Soient* $a, b \in Z$*. On dit que b divise a et on note* $b\backslash a$ *s'il existe* $q\in Z$ *avec* $a = b q$*. On dit aussi que b est un* ***diviseur*** *de a ou que a est* ***multipl****e de. » (Perrin, 2005, p.19).*

Elle permet aussi de mettre en évidence l'équivalence entre les deux expressions « est divisible par » et « est multiple de », qui ont la même signification ; on a donc pour la relation « être multiple de » une définition de type *équivalence.*

Ainsi dans l'ouvrage de D. Perrin, la définition de la divisibilité met en jeu une définition de type *Dénomination* et une définition de type *Equivalence.*

- PGCD et PPCM et nombres premiers entre eux

Nous allons étudier le statut des définitions proposées pour le PGCD suivant les deux manières dont il peut être défini : en termes ensemblistes et en référence à la décomposition en facteurs premiers.

I. la définition en termes ensemblistes : la définition proposée ci-dessous propose le PGCD comme le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs pour la relation d'ordre naturel dans N. Elle permet d'évoquer l'aspect existence du PGCD. La forme langagière est « on appelle … », ce qui correspond à une définition de type *Dénomination.*

> *« Proposition – Définition : Soient a, b∈ N non tous deux nuls. L'ensemble D des diviseurs communs de a et b admet un plus grand élément. On l'appelle le plus grand commun diviseur de a et b et on le note pgcd (a, b) » (Perrin, 2005, p.24)*

Cette définition s'appuie sur la relation de la divisibilité qui explicite que d= PGCD divise les deux nombres : d| a et d | b. Elle n'explicite pas le fait que le PGCD est également le plus grand élément au sens de l'ordre partiel de divisibilité. Il en est de même dans la définition donnée ci-dessous, qui met l'accent sur les propriétés liées à l'ordre naturel :

> *« Nous savons que D(a) et D(b) sont finis. Leurs intersection D (a, b) est donc finie aussi. Elle admet par suite un plus grand élément que l'on appelle plus grand commun diviseur de a et b que l'on note : δ (a, b), ou plus simplement δ lorsque aucune confusion n'est à craindre D(a) est majoré par a, D(b) est majoré par b, donc les deux nombres a et b majorent :*
>
> *D(a) ∩ D(b) = D(a, b). (Doneddu, 1962, p.171)*

Dans la définition ci-dessous, l'ordre naturel et l'ordre de divisibilité sont explicitement pris en compte ; elle est proposée sous la forme « si … alors ».

> *Definition: « if a and b are integers, not both Zero, then an integer d is called* ***the greatest common divisor*** *of a and b if*
>
> *(iv) d > 0,*
>
> *(v) d is a common divisor of a and b, and*
>
> *(vi) each integer f that is a common divisor of both a and b is also a divisor of d.*
>
> *Theorem: « If a and b are integers, not both zero, then g.c.d exists and is unique. »*
>
> *(Andrews, 1971, p.15-16)*

Cette deuxième définition est plus complète puisqu'elle met en valeur la présence des deux ordres, ordre naturel et ordre divisibilité. Notons que l'existence et l'unicité n'apparaissent pas dans la définition, mais font l'objet d'un théorème.

Quant à la définition proposée du PGCD à l'aide de la décomposition en facteurs premiers, elle met en évidence l'ordre divisibilité sans expliciter l'ordre naturel.

> *Définition : Pour tout couple (a, b) d'entiers naturels a et b non nuls, on appelle PGCD (plus grand commun diviseur) de a et b, et l'on note PGCD (a, b), ou a $\wedge$ b, voire même (a, b) l'entier d défini par le théorème précédent. (Warusfel et al, 2002, p.113).*

Les définitions du PPCM prennent le même statut que le PGCD.

Pour la définition de nombres premiers entre eux, on rencontre une définition de type Dénomination en utilisant la forme langagière « On dit que ».

> *« Soient a, b $\in$ N. On dit que a et b sont* **premiers entre eux** *si l'unique diviseur commun de a et b (dans N) est 1. » (Perrin, 2005, p.24)*

En résumé, les définitions du PGCD et du PPCM et des nombres premiers entre eux donnent lieu à des définitions de type *Dénomination* sous les formes langagières : « on appelle » ; « On dit que ».

- Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers

Dans l'ouvrage de Warusfel, la présentation des nombres premiers met en évidence une propriété caractéristique, utilisant la forme langagière « … est », ce qui donne lieu à une définition de type *dénomination.*

> *« Un entier naturel n est premier s'il admet exactement deux diviseurs (1et n).Sinon et s'il est strictement supérieur à 1, il est dit composé. »* (Warusfel, 2002, p.68)

La décomposition en facteurs premiers est en général donnée via le théorème fondamental de l'arithmétique qui affirme l'existence d'une telle décomposition et son unicité.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rendu compte de l'étude que nous avons conduite sur les choix possibles d'organisation mathématique des savoirs arithmétiques et sur les types de définitions rencontrées dans plusieurs manuels universitaires qui nous ont servi de référence.

Nous avons identifié les différents choix possibles pour proposer les éléments essentiels de la théorie des nombres à travers l'étude des théorèmes, des propriétés et des définitions des notions d'arithmétique. La variété des choix d'organisations est particulièrement importante en ce qui concerne les notions élémentaires de la théorie des nombres ; nous avons choisi de présenter ces organisations suivant la place du PGCD. Cette étude montre que l'approche du

PGCD par la décomposition en facteurs premiers fait appel à une approche théorique, reposant sur le théorème fondamental de l'arithmétique ; tandis que la mise en avant de l'algorithme d'Euclide autorise une approche moins théorique et plus opératoire.

Concernant les définitions, nous en avons identifié principalement deux types : définition de type *Dénomination,* avec les formes langagières *:* « on dit que » ; « on appelle », et définitions de type *Equivalence.* Selon les cas, la définition peut affirmer ou ne pas affirmer l'existence ; l'unicité n'apparaît pratiquement jamais dans les définitions, et pas toujours dans les théorèmes ; dans ce dernier cas, elle apparaît dans les preuves.

Nous nous réfèrerons à cette étude dans les chapitres IV et V pour l'étude des organisations mathématiques et des types de définitions proposées dans les programmes et les manuels du collège et de la classe de Seconde.

PARTIE 2

CHAPITRE IV

Analyse écologique des programmes du collège et de seconde depuis 1905 jusqu'à 2010

Introduction

Les programmes constituent la première étape de l'étude de la transposition didactique, puisqu'ils sont le résultat de la transformation du savoir savant en savoir à enseigner.

L'analyse des programmes permet d'identifier un rapport institutionnel à l'objet d'arithmétique dans les deux institutions : collège et classe de seconde. Cette analyse nous permet de mettre en évidence certaines contraintes et conditions auxquelles le rapport personnel est soumis. En particulier, nous nous attacherons par un questionnement écologique à analyser l'évolution de l'arithmétique depuis la réforme 1902 jusqu'au dernier programme. Comme nous l'avons rappelé dans la présentation de notre cadre théorique en référence à Artaud (1997), l'analyse écologique nous permet d'identifier l'évolution de l'habitat et des niches de l'arithmétique.

Pour ce faire, nous analysons les programmes et les textes officiels dans deux institutions : le collège et la classe de Seconde depuis 1902. Nous faisons un découpage en périodes qui nous ont paru significatives pour étudier l'évolution des programmes d'arithmétique. Pour la première institution, au collège, les différentes périodes qui marquent le changement des programmes sont les suivants :

1 .La période classique 1902 – 1968.

2 .La période de la réforme des mathématiques modernes 1969 – 1985.

3 .La période de la contre-réforme 1986 – 1995.

4. La période contemporaine 1996 – 2004.

5. Les deux derniers programmes d'arithmétique 2005 et 2009.

Le point de repère souligne le changement de programme à partir de la classe de sixième (par exemple : les nouveaux programmes de la période de la contre-réforme rentrent en vigueur en 1986 en classe de sixième, en 1987 en classe de Cinquième, en 1988 en classe de quatrième, en 1989 en classe de Troisième).

En ce qui concerne la deuxième institution, la classe de Seconde, les périodes correspondant aux changements des programmes sont :

1. La période classique 1902 – 1968.

2. La période de mathématiques modernes : 1969 – 1979.
3. La période de la contre-réforme 1980 – 1998.
4. La période contemporaine 1999 – 2008.
5. Le dernier programme 2010.

Les points de repère sont les moments de réformes de l'enseignement des mathématiques en France : « La réforme de 1902 » ; « La réforme des mathématiques modernes » ; « la contre-réforme ». Le choix de considérer la période classique de 1902 jusqu'à 1968 peut être justifié par le fait que le programme d'arithmétique reste relativement stable dans cette période comme l'indique Assude :

> *« Dans la période classique [qui va jusqu'à la fin des années 60], l'enseignement était organisé essentiellement en trois grands domaines dont l'un était l'arithmétique. Ce domaine était constitué d'un corpus stabilisé d'objets (même s'il y a des variations selon les réformes jusqu'à la période moderne) autour de quatre blocs : les nombres entiers et décimaux, les fractions, les mesures et les rapports et proportions.* » (Assude 1998, p. 108)

Après les modifications que les programmes ont subies dans les années soixante-dix, l'arithmétique reste stable dans la période des mathématiques modernes jusqu'à la période de la contre-réforme à partir de 1985, qui a apporté des changements significatifs au programme d'arithmétique : on assiste alors à une quasi-disparation de l'arithmétique. Des nouveaux changements sont ensuite apportés aux programmes dans la période contemporaine qui voit le retour de l'arithmétique dans l'enseignement secondaire.

Nous repérons durant l'évolution des programmes en collège l'habitat où l'arithmétique est explicitement traitée et les niches qu'elle occupe dans ces programmes, et nous identifions dans ces programmes le contenu d'arithmétique comme objet d'étude et comme outil. Plus particulièrement, le contenu lié aux propriétés des entiers, en mettant en évidence les différences et les similitudes des différents programmes. Ceci permet de montrer l'organisation mathématique de l'arithmétique dans les différents programmes.

Nous étudions la question de la transition entre le collège et le lycée, en ce qui concerne l'arithmétique, en éclairant l'habitat et les niches que l'arithmétique occupe lors cette transition entre le collège et la classe de seconde, en mettant l'accent sur les relations entre les contenus d'arithmétique du collège et de lycée.

Nous allons présenter dans un premier temps l'analyse écologique des programmes de collège pour chaque période de changement des programmes, ensuite l'évolution des programmes de Seconde. Dans un deuxième temps, nous présentons l'organisation mathématique et le statut des définitions durant le changement des programmes du collège et de Seconde.

I. Les programmes de collège

I.1 La période classique : de 1902 – 1968

Le programme de l'enseignement secondaire en France pour les garçons est différent de celui des jeunes filles[1] jusqu'à la réforme 1924. Le fait que l'enseignement secondaire de la première période des jeunes filles soit limité aux trois premières années, ce qui ne nous permet pas de mettre en évidence l'évolution de l'arithmétique de la 6ème jusqu'à 3ème, nous avons choisi de nous limiter à l'étude de l'arithmétique dans les programmes de l'enseignement secondaire des garçons.

I.1.1 Les rubriques présentées dans les programmes dans la période classique

Dans cette période, l'objet d'arithmétique était présent dans l'enseignement du collège, son contenu était constitué par les rubriques que nous résumons dans le tableau ci -dessous :

Arithmétique dans la période classique
1) Numération décimale. 2) Les entiers : addition, soustraction et multiplication des nombres entiers. Division, quotient, reste, critère de divisibilité Diviseur et multiple, diviseur et multiple commun, PGCD et PPCM Nombres premiers, pratique de la décomposition en produit de facteurs premiers sur des exemples. Problèmes mettant en jeu les quatre opérations, dont les données sont des nombres entiers et des nombres décimaux ou des fractions 3) Fractions ordinaires et fractions décimales. Fractions de grandeurs, Nombres décimaux et opérations sur les nombres décimaux. 4) Application aux fractions : réduction de plusieurs fractions au même dénominateur, simplification, fractions égales, comparaison de deux fractions. 5) Puissances et racine carrée d'un nombre entier ou décimal : 6) Produit de facteurs, produit d'une somme ou d'une différence par un nombre 7) Système métrique.

[1] L'enseignement secondaire des jeunes filles comprend cinq années d'études, il dure de 12 jusqu'à 17 ans. Il est divisé en deux périodes :
- La première période (12-15 ans), elle comprend trois années.
- La deuxième période (15-17 ans), elle comprend deux années.

8) Rapports-proportions : Grandeurs proportionnelles, Pourcentage, Mélange, Règle de trois, Calcul de l'intérêt et de l'escompte. Mélanges, Alliages, Règle d'intérêts, Escompte.

9) Progressions arithmétique et géométrique.

10) Arithmétique appliquée : Mesure des longueurs, Mesure des aires, Mesure des volumes et capacités, Mesure des poids, Mesure des angles, Mesure du temps, Vitesse.

Figure 1 : Bloc du contenu d'arithmétique depuis 1902 - 1968

Comme le tableau ci-dessus nous le montre, l'arithmétique dans la période classique comportait la partie relative aux propriétés des entiers (les notions en jeu : la division, la divisibilité ; les nombres premiers ; la décomposition en facteurs premiers, PGCD ; PPCM), il comprenait aussi les objets tels que la numération décimale ; les fractions ordinaires et décimales et les opérations sur les nombres décimaux ; fractions de grandeurs, application aux fractions ; puissances et racine carrée.

Ces blocs étaient relativement stabilisés dans cette période, mais la place de l'arithmétique changeait au collège à cette époque selon les modifications qui étaient faites dans les programmes. Nous allons dans ce qui suit montrer la place que l'arithmétique occupait dans l'enseignement secondaire dans cette période.

I.1.2 Les changements des programmes 1902- 1968

I.1.2.1 La réforme de 1902

L'arithmétique dans ces programmes occupe une place importante. Elle constitue un habitat indépendant intitulé « Arithmétique» qui apparaît exclusivement en 4ème B (classe sans latin) et en classe de 3ème A (avec latin)[2]. Cependant, nous repérons dans la rubrique « Calcul » du programme de la classe de 6ème et de 5ème des blocs concernant l'arithmétique tels que réduction au même dénominateur, opérations sur les fractions et nombres décimaux (en classe de 6ème A et B) et système métrique, règle de trois (en classe de 5èmeA et 6ème B).

Les programmes de 4ème B et 3ème A sont divisés en trois parties : Arithmétique, Algèbre, Géométrie. Les contenus d'arithmétique en 4ème B comportent les notions suivantes:

[2] Deux cycles sont institués dans l'enseignement secondaire, le premier cycle comprend des classes de la 6ème à la 3ème, où on trouve une section A avec latin et une section B sans latin. Le deuxième cycle comporte les classes de la seconde à la terminale. On trouve quatre sections : A (Gréc-latine) ; B (latin-langues vivantes) ; C (latin-sciences) et D (sciences-langues-vivantes). Ces études sont couronnées par quatre baccalauréats : philosophie (A et B) d'une part et mathématiques (C et D) d'autre part.

« Numération décimale.

Addition et soustraction des nombres entiers.- Justification, par des explications concrètes, des règles pour ajouter une différence à un nombre, pour en retrancher une somme ou une différence.

Multiplication des nombres entiers.- Multiplication d'une somme par un nombre. – Dans un produit, on peut intervertir l'ordre des facteurs, remplacer tels facteurs que l'on veut par leur produit effectué.

***Division des nombres entiers.- Définition du quotient et du reste**.- Théorème relatif à la multiplication ou à la division du dividende et du diviseur par un même nombre.-*

Règle pratique pour effectuer une division (sans théorie).

Critère de divisibilité par 2, 5, 9, 3.- Preuve par 9.

***Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple** de deux ou plusieurs nombres. (Pour le plus petit commun multiple, on pourra se borner à l'énoncé de la règle, sans démonstration.).*

*Définition des **nombres premiers**.- On énoncera, sans la démontrer, la proposition relative à l'infinité des nombres premiers. **Décomposition d'un nombre en facteurs premiers** : On admettra d'un nombre, sans démonstration, que cette décomposition ne peut être effectuée que d'une seule façon.*

Condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre, décomposé en facteurs premiers, soit divisible par un autre nombre, décomposé aussi en facteurs premiers.-Composition du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de nombres décomposés en facteurs premiers.

Fractions ordinaires.- Opérations.

Fractions décimales.- Opérations sur les nombres décimaux.- Quotient de deux nombres entiers ou décimaux, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.

Carré. – Racine carrée d'un nombre entier ou décimal, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné. (Règle pratique, sans théorie.) »

Le contenu d'arithmétique en $3^{ème}$ A est le même que le contenu de $4^{ème}$ B sauf pour la partie concernant les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers qui n'appartient pas au programme de l'arithmétique en $3^{ème}$ A. Ceci empêche de faire vivre, dans cette classe, la partie qui concerne la divisibilité d'un nombre et le pgcd et le ppcm à partir de la décomposition en facteurs premiers.

Nous résumons le contenu d'arithmétique de $3^{ème}$ A en présentant les blocs suivants :

1) Numération décimale.

2) Les entiers : Addition, soustraction, multiplication et division des nombres entiers.

Critère de divisibilité. PGCD et PPCM.

3) Fractions ordinaire et décimales et les opérations sur les décimales.

4) Racine carrée.

Les notions que nous étudions dans ce travail sont proposées ensemble dans le même programme, et présentées après la numération et les opérations sur les entiers. La notion de nombres premiers entre eux est absente du programme du collège. Nous constatons que le programme précise le contenu d'arithmétique, en particulier, les notions au programme sont données en termes de théorèmes, définitions, propriétés et règles ; ceci va changer comme nous allons le voir dans les programmes de 1905.

I.1.2.2 le changement en 1905

En 1905, un changement concerne la place de l'arithmétique dans l'enseignement de collège : les notions liées aux propriétés des nombres entiers sont introduites dès la classe de 5ème B et de 4ème A.

La rubrique « Arithmétique » dans les programmes est présentée également en classe de 3ème, et en classe de 4ème B. Nous citions dans le tableau ci-après les programmes d'arithmétique en 4ème A et 3ème A, tandis que nous résumons les programmes de 5ème B et 4ème B par des blocs annoncés dans le tableau.

1912	**4ème A** : Arithmétique *« Produit de facteur. Puissance.* ***Critère de divisibilité par 2, 5, 9, 3.*** ***Nombres premiers**. Règles pratiques pour **la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers**, pour la recherche du **p.g.c.d.**, du **p.p.c.m**.* *Exercices sur le système métrique, les fractions et les grandeurs directement et inversement proportionnelles. Règle pratique pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.* » **3ème A** : Arithmétique *« Rapports et proportions ».*

	5ème B : Elle comporte les objets de 4ème A, ainsi que les blocs suivants : 1) Numération décimale. 2) Addition, soustraction, multiplication et **division des nombres entiers.** 3) Produit d'une somme ou d'une différence par un nombre. 4) Révision du système métrique. **4ème B** : L'arithmétique contient les blocs suivants : 1) Fractions ordinaire et décimales et les opérations sur les nombres décimaux. 2) Racine carrée. 2) Progressions arithmétique et géométrique. 3) Calcul de l'intérêt et de l'escompte.

Figure 2 : la place de l'arithmétique et ses contenus en 1912 dans les classes classique A et moderne B

Le programme de 1905 introduit l'étude des puissances avant l'étude des notions en jeu, et il place l'étude les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers avant le pgcd et le ppcm ; ceci met l'accent sur la méthode de la décomposition en facteurs premiers pour la recherche du pgcd et du ppcm. Nous constatons que la division euclidienne n'est pas reprise avec l'ensemble des notions en jeu en classe de 4ème A, tandis qu'elle reste dans l'ensemble du programme d'arithmétique en classe de 5ème B. Nous remarquons que les définitions et les explications commentées pour chaque notion d'arithmétique présentée dans le programme de 1902 ont disparu du programme de 1905 et que la composante pratique de l'arithmétique est mise en avant. Notons enfin que, le travail sur les fractions telle la réduction des fractions au même dénominateur et les opérations sur les fractions sont traitées en classe de 6ème sans recours aux critères de divisibilité qui sont étudiés en classe de 4ème A et de 5ème B. Le travail sur les fractions en référence aux critères de divisibilité sera pris en compte dans les programmes de 1925 qui introduisent les critères de divisibilité en classe de 6ème comme nous allons le voir dans la suite.

I.1.2.3 La réforme de 1925

A la suite de la réforme de 1925, les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire sont identiques pour les deux divisions A et B depuis la classe de Sixième jusqu'à la classe de Première. La rubrique « Arithmétique » dans les programmes du collège se présente en classe de 4ème et en classe de 3ème. Cependant, nous trouvons des blocs qui font partie de l'arithmétique sous la rubrique intitulée « Mathématiques » tels que : applications aux fractions en classe de 6ème, et système métrique, règle de trois, en classe de 5ème.

Comme nous l'avons déjà dit, les critères de divisibilité sont introduits depuis 1925 en classe de 6ème pour le travail sur les fractions. Ainsi, les notions d'arithmétique relatives aux propriétés des entiers sont proposées séparément au collège. Le texte suivant du programme figurant sous la rubrique « Mathématiques », nous présente la partie de l'arithmétique qui se trouve en classe de 6ème :

> « *Révision des* ***opérations sur les nombres entiers****.*
>
> *Exercice de calcul mental. Condition de* ***divisibilité par 2, 5, 9, 3.***
>
> *Problèmes sur les grandeurs représentées par des nombres entiers.*
>
> *Fractions de grandeurs, notions de fractions, fractions égales, réduction de plusieurs fractions au même dénominateur.*
>
> *Problèmes sur les fractions de grandeurs, opérations sur les fractions, fractions décimales, nombres décimaux ».P.11*

Les fractions irréductibles ne sont pas présentes en tant que telles dans les programmes mais la question est soulevée ; voici ce que les instructions de programme de 6ème mentionnent à ce propos :

> *« Il sera bon de marquer, à ce propos (pour les réduction des fractions), le doute qui subsiste provisoirement au sujet de l'irréductibilité d'une fraction dont les termes sont premiers entre eux : on se heurte une fois de plus au théorème fondamental de la divisibilité. Cela n'empêchera pas d'appliquer les notions acquises à de nombreux exercices de réduction au même dénominateur, avec le souci d'utiliser, dans des cas simples, le plus petit multiple commun des dénominateurs données : ce sera le cas de revenir aux décompositions en facteurs qui ont déjà fait l'objet du calcul mental. » (Instruction de Programme de classe de 6ème, P.252).*

En classe de 4ème, nous trouvons les notions de pgcd, ppcm, nombre premier et la décomposition en facteurs premiers.

Le programme de 4ème est scindé en deux parties : géométrie et arithmétique. Le programme d'arithmétique est présenté ci-dessous :

> *«Partie aliquote commune à deux grandeurs. Notions du* ***P.G.C.D*** *et du* ***P.P.C.M*** *de deux nombres.*
>
> ***Nombres premiers.*** *– Règles pratiques pour* ***la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers****, pour la recherche du P.G.C.D. et du P.P.C.M.*
>
> *Exercices sur le système métrique, les fractions ordinaires ou décimales, les grandeurs directement ou inversement proportionnelles.*

Définition de la racine carrée. Règle pratique pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné »

En classe de troisième, l'habitat de l'arithmétique se présente avec la partie Algèbre comportant les objets suivants : Puissances, Rapport de deux grandeurs. Grandeurs proportionnelles. Nous constatons que l'étude des puissances n'est pas traitée avant l'étude de la décomposition en facteurs premiers comme c'était le cas dans les programmes de 1905.

I.1.2.4 Les programmes de 1938

Cette organisation va changer dans les programmes de 1938. La rubrique « Arithmétique » se trouve en classe de 6ème, 5ème et 4ème. Son habitat se présente en 5ème et 4ème avec l'habitat algébrique, dans un chapitre du programme intitulé « Arithmétique et Algèbre ». En classe de 6ème, l'habitat de l'arithmétique se trouve indépendamment de l'algèbre dans un chapitre intitulé « Arithmétique appliquée » qui comporte la mesure des longueurs, des aires, des poids, etc. En ce qui concerne les notions relatives aux propriétés des entiers, elles sont aussi proposées séparément au collège. Nous trouvons une partie de ces notions dans le programme de 5ème sous l'intitulé « Arithmétique et Algèbre » qui se divise en deux parties. La première partie est intitulée : « Révision d'une partie du programme de l'enseignement primaire élémentaire et compléments » dans laquelle nous pouvons relever les notions de la division euclidienne et les critères de divisibilité :

Numération décimale. Nombres entiers. Nombres décimaux.

***Division : Quotient** de deux nombres entiers à une unité près ; quotient de deux nombres entiers ou décimaux à une approximation décimales donnée.*

Reste de divisibilité d'un nombre entier par 2, 5, 9, 3.

***Caractères de divisibilité par ces nombres.** Preuve par 9 des opérations.*

Multiplication et division d'une grandeur par une fraction.

Rapport de deux grandeurs. Fractions égales, Opérations sur les fractions exposées à partir de problèmes concrets.

La deuxième partie de programme de la classe de 5ème est consacrée au « Programme particulier à la classe ». Cette partie propose d'abord des problèmes arithmétiques simples dans le but d'initier à l'algèbre, puis elle présente des objets relatifs à l'Algèbre.

En classe de 4ème, l'habitat de l'arithmétique se trouve avec l'habitat algébrique dans la rubrique intitulée « Arithmétique et Algèbre ». Elle est scindée en trois parties dont une partie concerne exclusivement les notions relatives aux propriétés des entiers :

III : Arithmétique.

> *Pratique, sur des exemples simples, de la* ***décomposition d'un nombre en facteurs premiers****, de la recherche du* ***plus grand commun diviseur*** *et du* ***plus petit commun multiple*** *; application aux fractions.*

Nous trouvons que la notion de nombre premier est absente. Par contre, nous constatons que le programme recommande l'application aux fractions du travail sur le pgcd et le ppcm. Nous remarquons que, dans la partie relative à l'algèbre, le programme replace l'étude des puissances avant l'étude de la décomposition en facteurs premiers.

En classe de 3ème, la notion de racine carrée qui faisait partie de l'arithmétique se trouve dans la partie algèbre.

I.1.2.5 Les programmes 1942

En 1942, l'habitat de l'arithmétique va réapparaître tout au long du collège indépendamment de l'habitat algébrique. La division euclidienne et les critères de divisibilité sont introduits en classe de 6ème comme le montre le texte du programme :

> *I. Exercices simples, toujours concrets, empruntés à la vie courante et dont les données seront toujours choisies avec simplicité et vraisemblance sur les principales questions figurant aux programmes du cours moyen de l'enseignement primaire.*
>
> *II. Nombres entiers ou naturels. Etude concrète de la numération décimale.*
>
> *Addition, Soustraction. Multiplication.*
>
> *Propriétés fondamentales des sommes, différence et produits dégagées de l'étude d'exemples concrets.*
>
> ***Division, quotient, reste****. Explication, sur des exemples numériques simples, du procédé opératoire connu des élèves.*
>
> ***Condition de divisibilité par deux, cinq, neuf et trois*** *(Elles résulteront de l'observation des premiers multiples de ces nombres et seront généralisées sans justification.)*
>
> *Preuve par 9 des opérations.*

La détermination du quotient et du reste dans la division euclidienne prend une place importante dans les programmes. En classe de 5ème, la notion de nombres premiers réapparaît. Le programme de l'arithmétique est divisé en trois parties, la première propose les notions relatives aux propriétés des entiers ; la deuxième présente les applications aux fractions ; la troisième suggère d'utiliser les quatre opérations pour la résolution de problèmes, et de résoudre des problèmes concernant les objets tel que les pourcentages ou les mélanges, comme le montre le texte suivant :

> ***I. Diviseur d'un nombre entier.*** *Exemples de* ***nombres premiers et de*** *décomposition en facteurs premiers, de* ***diviseurs communs et de multiples communs.***

II. Fractions de grandeurs, notion de fraction. Division d'une grandeur en grandeurs égales. Produit d'une grandeur par une fraction. Fractions équivalentes. Comparaison de deux fractions. Réduction de plusieurs fractions au même dénominateur.

Problèmes sur les fractions de grandeurs. Opérations sur les fractions.

Fractions décimales. Nombres décimaux.

Calcul du quotient de deux nombres entiers, décimaux ou fractionnaires à une approximation décimale donnée (dixième, centième ou millième).

III. Emploi des opérations élémentaires pour la résolution de problèmes concrète, dont les données sont des nombres entiers, des nombres décimaux ou des fractions. Emploi d'une lettre pour désigner une inconnue. Problèmes de pourcentages, d'intérêts simples, de mélanges. Vitesse d'un mouvement uniforme.

Nous constatons que le programme introduit la notion de diviseur d'un nombre entier, et qu'il propose l'étude des nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers par des exemples. De même, les diviseurs communs et les multiples communs sont proposés par des exemples ; le PGCD et PPCM ne sont pas mentionnés. La troisième partie du texte du programme citée ci-dessus nous montre que l'habitat de l'arithmétique se trouve avec l'habitat de l'algèbre bien que la rubrique soit intitulée « Arithmétique » ; ceci permet de faire vivre la niche « calcul algébrique » de l'arithmétique au sens général. Ce choix est pris en compte en classe de 4ème où le programme mentionne à ce propos :

« L'enseignement de l'arithmétique a désormais pour objet principal une prudente initiation aux méthodes et aux notations de l'algèbre appliquées à des nombres arithmétique. »(p.114)

Il s'agit ici d'avancer les notions de puissances et d'exposants, de présenter des objets relatifs à la partie « Algèbre » tels que les expressions littérales, et de proposer des problèmes conduisant à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

En classe de 3ème, l'arithmétique comporte la notion de racine carrée d'un nombre entier ou décimal, celle de proportion et celle de rapport de deux grandeurs.

I.1.2.6 les programmes de 1946

En 1946 de nouveaux textes sont publiés ; il y a peu de modifications. Les programmes de 1938 sont plus ou moins reconduits. Les contenus de la rubrique : « Arithmétique appliquée » proposée dans les programmes de 6ème en 1938, sont proposés dans les programmes de 1946 en classe de sixième, mais le titre « Arithmétique » n'apparaît pas à ce niveau. La rubrique «Arithmétique » se trouve par contre dans les programmes des classes de 5ème, 4ème, 3ème du collège.

Le programme d'arithmétique de 1946 de la classe de cinquième ressemble à celui de 1938 en classe de 5$^{\text{ème}}$. Nous résumons le contenu de l'arithmétique à ca niveau en présentant les blocs suivants :

- Numération décimale. Nombres décimaux et les opérations sur les nombres décimaux.
- Nombres entiers, addition, soustraction et multiplication des nombres entiers.

  Division, quotient, reste, critère de divisibilité
- Fractions de grandeurs. Fractions égales
- Problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue. Equations.

Nous constatons que cette partie comporte des objets de l'algèbre.

En classe de 4$^{\text{ème}}$, les programmes de 1946 proposent les notions relatives aux propriétés des entiers, comme c'était le cas dans les programmes de 1938. La notion de nombre premier disparaît des programmes, par contre, les notions de PGCD et PPCM sont explicitement mentionnées. En classe de troisième, l'arithmétique est présentée sous forme de blocs : Rapport, Proportions, Grandeurs proportionnelles, Racine carrée.

I.1.2.7 Les programmes de 1958

Aucun changement en classe de sixième avec les programmes de 1958, l'arithmétique se présente implicitement pour faire des exercices qui *«pourront consister en construction de tables de valeurs numériques, de tables de correspondance entre les mesures de deux grandeurs liées, de calculs faits à partir d'une formule littérale dans laquelle on donne aux lettres diverses valeurs numériques.»*

Le programme annonce que :

> *«Bien que le programme de la classe ne comprenne pas d'arithmétique, il importe que, par le moyen de travaux pratiques appropriés, les enfants conservent leurs acquisitions des classes antérieures.» (P.60)*

En classe de 5$^{\text{ème}}$**,** des changements sont introduits dans le programme. La rubrique «Arithmétique» est divisée en trois parties : «Nombres entiers», «Nombres fractionnaires» et «Application». C'est dans la partie «Nombres entiers» que nous trouvons les notions d'arithmétique relatives aux propriétés des nombres entiers. Voici le texte tel qu'il figure dans le programme de 1958:

> *I. Nombres entiers.*
>
> *1° Notions de nombre entier ; suite naturelle des entiers.*
>
> *Nombres égaux, nombres inégaux. Notation décimale.*

2° Addition, somme ; propriétés de l'addition. Multiplication, produit, propriétés de la multiplication. Définitions du carré, du cube, de la puissance

Conventions d'écriture relatives aux signes opératoires dans une suite d'additions et de multiplications ; usage des parenthèses.

Produit d'une somme par un nombre ; mise en facteurs ; produit de deux sommes.

Pratique de l'addition et de la multiplication.

3° Problèmes de la soustraction ; différence.

Opérations sur les sommes, les différances et les produits.

Pratique de la soustraction.

*4° **Multiples d'un nombre ; diviseurs d'un nombre.***

*Problèmes de **la division** : **quotient exact, quotient à une unité près et reste.***

Pratique de la division.

*5° **Caractères de divisibilité par 2, 4, 4, 25, 9, 3.***

*Notion de **diviseur communs** et des **multiples communs** déduites de la comparaison de tables de diviseurs et de multiples.*

II. Nombres fractionnaires.

1° Fractions de grandeurs (segments, angles, arcs d'un même cercle…).

Notion de fraction. Fraction égales, Fraction inégales.

Simplification : réduction à un même dénominateur.

2° Opérations sur des fractions (présentées en liaison avec des problèmes concrets).

Multiplication, produit, propriétés de la multiplication ; définitions du carré, du cube, de la puissance « n-ième ».

Problème de la division ; quotient exact ; inverse d'un nombre. Propriétés du quotient exact.

Addition, somme : propriétés de l'addition.

Problème de la soustraction ; différence.

Comparaison des nombres fractionnaires.

Extension aux nombres fractionnaires des propriétés des sommes, des différences et des produits de nombres entiers.

Produit et quotient de deux puissances entières d'un même nombre.

3° Fraction décimales ; nombres décimaux.

Pratique de l'addition, de la soustraction, de la multiplication des nombres décimaux.

Division d'un nombre par un autre (nombres entiers, fractionnaires, décimaux) ; quotient exact ; quotient approchés à une unité près, à un deuxième près…, à un centième près…

Pratique de l'opération.

III. Application.

Résolution de problèmes concrets dont les données sont numériques, et dont l'inconnue est représentée par une lettre. (Il s'agit seulement de problèmes au sujet desquels ne doit point se poser pratiquement la question de l'existence des éléments que l'on recherche, et dont la solution peut être calculée par l'application des propriétés des opérations élémentaires de l'arithmétique).

Nous constatons que le programme introduit la notion de multiple, et qu'il place l'étude de la notion de diviseur et celle de multiple avant l'étude de la division euclidienne, afin de proposer ensuite l'étude de diviseurs communs et de multiples communs.

La présentation des notions d'arithmétique trouve ses points de départ, dans cette classe, dans le domaine concret ; elle conduit à découvrir les propriétés des nombres qui seront la base de l'algèbre comme cela apparaît dans les commentaires du programme :

« Il convient d'attirer l'attention sur l'importance de la pratique du programme d'arithmétique qui concerne la construction progressive des nombres et leurs propriétés ; c'est sur cette base que s'édifiera, un peu plus tard, l'algèbre. Elle doit donc être établie avec beaucoup de soin en partant du domaine concret, en s'aidant de travaux pratiques variés, pour aborder la voie de la généralisation et de l'abstraction. »

Le programme de la classe de $4^{\text{ème}}$ présente l'arithmétique relative aux propriétés des nombres entiers :

Pratique, sur des exemples, de ***la décomposition d'un nombre entier en un produit de nombres premiers ;*** *pratique de la recherche du* ***plus grand diviseur commun*** *et du* ***plus petit multiple commun*** *de deux ou plusieurs nombres. Application*.

La rubrique « Arithmétique » apparaît aussi dans le programme de troisième incluant la notion de racine carrée. Les programmes de 1958 resteront relativement stables jusqu'à la réforme des mathématiques modernes 1968.

I.1.3 Bilan

Dans la période classique, comme nous l'avons vu, l'habitat de l'arithmétique change à plusieurs reprises au collège, mais il n'y a de changement ni sur les contenus ni sur les objectifs. Les types de tâches qui apparaissent à travers des contenus tels que la réduction de plusieurs fractions au même dénominateur, problèmes sur grandeurs proportionnelles, etc.

permettent de faire des calculs. Les notions de pgcd et de pppcm sont utilisées pour réduire au même dénominateur et simplifier les fractions. Ce sont les moyens qui justifient l'habitat et les niches occupées par l'arithmétique au collège. Nous pouvons lire à ce propos ce que souligne Assude :

> *« L'enseignement de l'arithmétique se donnait les moyens de justifier sa place et son importance et d'être légitimé par les niches qu'il occupait : d'une part, il permettait aux commerçants de s'approprier des méthodes plus simples que celles de l'algèbre, d'autre part l'organisation de cet enseignement faisait référence à des savoirs savants par l'introduction de certains chapitre plus théoriques : le chapitre sur la divisibilité en faisait partie. En outre, l'algèbre apparaissait par la suite comme « une arithmétique généralisée » ce qui lui donnait aussi un statu privilégie. » p(108)*

Dans le programme, les opérations sur les entiers et le travail sur les fractions représentent la composante pratique de l'arithmétique. Ce programme permet de faire vivre la niche « calcul numérique », qui est renforcée par les applications de l'arithmétique aux mesures des longueurs, des volumes et des poids et par la présence dans la partie d'arithmétique des progressions arithmétique et géométrique. Notons que les notions d'arithmétique relatives aux propriétés des nombres entiers sont présentées comme objet d'étude dans les programmes. Elles représentent la composante théorique de l'arithmétique. Ceci donne à l'arithmétique la niche « Théorie de nombres »

> *« Une des niches occupées par nos objets consiste à donner à l'arithmétique une consistance théorique par rapport à l'algèbre. […] En résumant, les objets qui nous intéresse ont une pertinence théorique importante dans l'organisation de l'enseignement de l'arithmétique : on a alors dans l'enseignement deux composante de l'arithmétique, la composante 'théorie des nombres' et la composante 'calcul numérique » (ibid, P. 109)*

Comme nous l'avons remarqué, la niche « calcul numérique » est mise en avant par rapport à celle de « théorie des nombres » dans les programmes. Nous soulignons que la notion des nombres premiers entre eux est institutionnellement absente des programmes du collège dans cette période. Notons enfin que l'habitat de l'arithmétique avec l'algèbre permet de faire vivre la niche « Calcul algébrique ». Dans notre travail, nous n'avons pas étudié cet aspect, nos objets d'étude correspondent à la théorie élémentaire des nombres.

I.2 La période de la réforme des mathématiques modernes de 1969-1985

Les années 1970 constituent un moment très important pour l'enseignement des mathématiques ; elles marquent en effet un changement d'orientation total. C'est la période des mathématiques modernes. Cette réforme entre en vigueur pour les classes de sixième et de seconde en 1969. Elle touche les classes de cinquième en 1970, les classes de quatrième en 1971, les classes de troisième en 1972.

En ce qui concerne l'arithmétique au collège, des changements s'opèrent sur les contenus d'arithmétique. Ces changements ont amené la disparition de certaines notions, tandis que d'autres sont conservées : par exemple les contenus traditionnels de l'arithmétique, qui correspondent aux propriétés des nombres entiers, restent dans les programmes de 1970, comme la notion de multiple et de diviseur et les nombres premiers, tandis que d'autres notions qui faisaient partie de l'arithmétique ont disparu des programmes telles que la racine carré, le système métrique et la numération décimale. L'arithmétique est ainsi associée aux nombres entiers, à leurs propriétés et aux relations entre nombres entiers.

La distribution classique des mathématiques enseignées au collège entre arithmétique, algèbre et géométrie est remplacée par une autre organisation. En classe de 5ème, cinq parties sont créées : « Relation », « Arithmétique », « Nombres relatifs », « Première étude concrète de l'espace », « Repérage ».

Ainsi, l'habitat de l'arithmétique dans la réforme des mathématiques modernes est réservé à la classe de 5ème. Le tableau suivant montre les contenus d'arithmétique qui restent stable jusqu'en 1985 dans le programme de 5ème.

Arithmétique en 5ème dans la période de la réforme des mathématiques modernes
Ensemble des multiples d'un nombre. Division euclidienne d'un nombre naturel par un nombre naturel. Diviseur d'un nombre naturel. Nombres premiers. Sur des exemples : pratique de la décomposition d'un nombre naturel en produit de facteurs premiers. Exercices sur les multiples communs et diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres naturels.

Figure 3: Arithmétique en 5ème dans la période de la réforme des mathématiques modernes

Nous remarquons que les critères de divisibilité ne font pas partie du programme de la classe de 5ème ; la notion de « nombres premiers entre eux » est aussi absente des programmes. Les notions de pgcd et ppcm ne sont pas explicitement dans l'esprit du programme dans cette période. Nous trouvons que le travail sur les fractions est mis à l'écart des programmes de 1970, mais les programmes de 1978 le réintroduisent en classe de 4ème comme un élément important sous la rubrique « Calcul numérique ». Nous pouvons lire dans les instructions des programmes :

« En calcul la nouveauté réside dans l'accent qui est mis sur la notion de fraction, et dans la possibilité qu'elle procure d'aborder, si on le désire, les rationnels avant les réels. On pourra donc, soit –comme dans les programmes précédentes- considérer les rationnels comme des réels particuliers (quotients d'entiers), soit présenter la notion de fraction à l'aide d'exemples relevant de la pratique usuelle (découpage, engrenages, échelles,… ; diviseurs d'un entier naturel) et introduire l'équivalence de deux fractions, … » (Programme de 1979, P. 29)

Cependant, nous trouvons que l'arithmétique occupe la niche « calcul numérique » en classe de 5ème :

« Les propriétés admises des opérations sur les nombres entiers seront utilisées pour le calcul mental ; il ne s'agit pas de voir se dérouler dans sa tête, grâce à une certaine imagination visuelle, une opération écrite, mais de trouver des procédés directs de calcul utilisant les propriétés signalées. » (Programme de 1973, P.176)

La niche « théorie des nombres » est présente aussi dans cette réforme comme le souligne Assude (1998) :

« Nous pouvons dire que la réforme des maths modern n'a pas fait disparaitre l'enseignement de l'arithmétique dans l'enseignement secondaire et les deux composantes de l'arithmétique (théorie des nombres et calcul numérique) y sont présentes, par exemple, dans la classe de cinquième (programme de 69- 70-71-72), le chapitre 2 intitulé « arithmétique » comporte les éléments suivants : Ensemble des multiples d'un nombre ; division euclidienne d'un nombre naturel ; nombres premiers. Sur des exemples : pratique de la décomposition d'un nombre en un produit de nombres premiers et exercices sur les multiples communs et diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres naturels. [….] la composante théorique y est présente ainsi que la composante calcul numérique. » (Assude, 1998, p111- 112).

L'arithmétique occupe en outre une nouvelle niche, la niche «Ensembliste». En effet, la rubrique «Arithmétique» se présente après la rubrique «Relation», d'où l'étude de l'arithmétique est basée sur les notions d'ensemble et de relations.

«Ces notions (ensemble et relation) sont mentionnées simultanément en tête du programme parce qu'elles doivent être utilisées, comme il est dit, au cours de l'étude des chapitres ultérieurs; il pourra cependant sembler opportun de réserver l'introduction de chacune d'elles, sous ces aspects divers, pour le moment même de son emploi.» (Programme de 1973, P.173)

En synthèse, les propriétés sur les nombres entiers et les notions associées constituent l'essentiel de l'enseignement de l'arithmétique au collège. Trois niches sont associées à l'arithmétique dans cette période : niche « théorie des nombres », niche « calcul numérique » et niche « Ensembliste ».

I.3 La période de la contre-réforme : de 1986 - 1996

Dans cette période, l'enseignement de l'arithmétique est réduit de manière très significative. Les objets « nombres premiers » ; « décomposition en facteurs premiers » ; « diviseur commun » ; « multiple commun », ont disparu des programmes de collège, qui depuis 1985 sont organisés en trois parties : Travaux géométriques ; Travaux numériques ; Organisation et gestion de données. Fonction. C'est dans la partie « Travaux numériques » qu'on trouve les éléments d'arithmétique qui restent au programme dans cette période.

En classe de 6ème, nous trouvons la division euclidienne et les critères de divisibilité qui sont réinstallés avec les programmes de 1985 ; nous trouvons aussi le travail sur les fractions qui s'appuie sur les critères de divisibilité pour simplifier les fractions.

La compétence à acquérir concernant la division euclidienne est indiquée dans la partie « Complémentaire » qui se trouve au dernier paragraphe du programme :

> *« Effectuer la division avec reste d'un nombre entier par un nombres entier d'un ou deux chiffres. »*

Les compléments de programme de la partie « Travaux numérique » des classes de 5ème et 4ème indiquent que les notions de PGCD et PPCM sont hors programme.

> *«L'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire ou la recherche d'une simplification d'écriture peut demander dans certaines situation la détermination d'un multiple ou d'un diviseur communs à deux nombres entiers, mais les notions de plus petit multiple commun et plus grand diviseur commun sont hors programme. » (Programme de 4ème)*

En synthèse, l'arithmétique disparaît totalement des programmes du lycée dans un premier temps, puis de ceux du collège à partir de 1985 :

> *« L'enseignement des mathématiques au collège, comme l'a montré Yves Chevallard, est soumis à une forte idéologie qui est celle de l'empirisme : on doit être proche du concret.*
> *Ainsi, par cette idéologie empirisme, l'enseignement de l'arithmétique bascule du côté de la composante numérique dont le titre d'une des divisions actuelles « travaux numériques » est l'emblème. Ainsi, actuellement quand on dit que l'arithmétique a disparu au collège on parle plutôt de la théorie des nombres où la divisibilité, nombres premiers, PGCD, PPCM avaient une part symbolique non négligeable. Le numérique prend en revanche une part considérable et toute la partie théorique disparaît de l'enseignement au collège et aussi de l'enseignement au lycée. » (Assude 1998, p. 116)*

Ainsi, les deux niches de programme 1970 : « Théorie des nombres » et « Ensembliste » ont disparu des programmes de la contre-réforme. Il reste seulement la niche « Calcul numérique » à travers le travail sur les fractions et sur la pratique de la division.

I.4 La période contemporaine : de 1996 - 2004

L’arithmétique est réintroduite, après des années d’absence, dans les programmes de l’enseignement secondaire : à la rentrée 1999, en troisième.

Elle apparaît dans les programmes dans la partie « travaux numériques » dans la colonne « Nombres entiers» sans aucune notion préalable d'arithmétique. Mais le mot arithmétique apparaît dans le document d’accompagnement dans la partie « Activités numériques » du programme de sixième :

> *« La résolution de problèmes numériques et, plus tard, le calcul algébrique supposent une bonne maîtrise des relations arithmétiques entre les nombres inférieurs à 100. »*

Nous trouvons aussi le terme « arithmétique » dans la partie « Place des calculatrices et de l’informatique » dans le document d’accompagnement du programme de sixième :

> *« On visera en particulier la maitrise des tables de multiplication, de l’addition des petits nombres et des relations arithmétiques entre les nombres notamment les multiples de 2, 3, 4, 5, 10, 12, 15. »*

L’arithmétique est réintroduite en classe de 3ème avec la notion de diviseur commun et de nombres premiers entre eux. Nous allons montrer par l’analyse écologique les nouveaux habitats et niches que l’arithmétique occupe au collège.

- Le programme de la classe de 6ème indique une seule compétence concernant la division euclidienne :

> *« Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d’un nombre entier par un nombre entier d’un ou deux chiffres. »*

Contrairement au programme de 1986, les critères de divisibilité n’ont pas de place privilégiée dans le nouveau programme de 6ème ; nous trouvons seulement un commentaire relatif à l’« Ecriture fractionnaire » qui se trouve dans la colonne « Contenu » du programme :

> *« A l’occasion de simplification, on pourra faire intervenir des critères de divisibilité, sans nécessairement les justifier. »*

- La notion de ppcm n’est pas réintroduite dans les nouveaux programmes. En classe de 4ème, le programme indique que le ppcm n’est pas une compétence exigible dans le travail sur les fractions :

> *« L’addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire peut demander un travail sur la recherche de multiples communs à deux ou plusieurs nombres entiers. La recherche du plus petit commun multiple pour l’obtention d’un dénominateur commun et celle du plus grand diviseur commun pour l’obtention de la forme irréductible ne sont pas exigibles. »*

- En classe de troisième, nous trouvons la notion de diviseurs communs et de nombres premiers entre eux. La notion de diviseurs communs se trouve avec les fractions irréductibles dans la colonne « Contenus », tandis que les nombres premiers entre eux donnent lieu à une compétence exigible :

« Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux. »

Les programmes de 3ème mettent l'accent sur le travail sur les fractions, nous trouvons deux compétences exigibles :

« Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible. »

On voit ici que la notion de «nombres premiers entre eux » comme outil permettant de simplifier les fractions justifie la niche « Calcul numérique » que l'arithmétique occupe. En lisant le commentaire du programme de 3ème relatif à la partie «Nombres entiers et rationnels» du contenu de programme, nous trouvons une autre niche que l'arithmétique peut occuper : «la niche culturelle » :

« Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves. »

Si nous continuons de lire la suite du commentaire du programme de 3ème, nous trouvons une nouvelle niche pour l'arithmétique : «la niche algorithmique ». Le texte suivant du programme figurant dans la colonne « Commentaire » met en évidence que l'algorithme d'Euclide est privilégié pour la recherche du pgcd en lien avec les tableurs et d'autres logiciels non précisés :

« Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit. »

Le changement de programme en faveur de l'aspect algorithmique répond aux objectifs de programme de la classe de troisième, nous pouvons lire dans la partie « Présentation », qui se trouve avant la partie qui décrit les contenus de la classe :

«Le programme de la classe de troisième a pour objectif : dans le domaine numérique : [….], de permettre : de faire une première synthèse sur les nombres avec un éclairage historique et une mise en valeur de processus algorithmiques »

Ainsi, les deux nouvelles niches « niche culturelle » et niche algorithmique » apparaissent dans les programmes de 1996.

Pour mettre en évidence la différence entre les programmes de 1996 et ceux de 1970, nous résumons le contenu d'arithmétique et son habitat au collège dans le tableau ci-dessous :

Les contenus d'arithmétique	Les programmes de 1970	Les programmes de 1996
6ème	-------------	La division euclidienne et simplifier les fractions avec les critères de divisibilité.
5ème	Multiple et diviseur. Division euclidienne Nombres premiers. Sur des exemples : pratique de la décomposition d'un nombre naturel en produit de facteurs premiers. Exercices sur les multiples communs et diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres naturels.	Travail sur les nombres en écritures fractionnaire : Simplification Additionner et soustraire des fractions ayant des dénominateurs égaux ou multiples.
4ème	--------------	Réduire au même dénominateur qui demande la recherche de multiples communs.
3ème	----------------------	Nombres premiers entre eux. Diviseur commun. Fraction irréductible.
2d	----------------------	Nombres premiers. Décomposition en produit de facteurs premiers.

Figure 4 : Comparaison des contenus d'arithmétique au collège : Programmes de 1970 et de 1996

Le tableau ci-dessus nous montre qu'il y une différence significative entre le programme de 1996 et celui de 1970.

Le cadre théorique de l'arithmétique n'est aujourd'hui plus abordé au collège, c'est-à-dire que la niche « théorie des nombres » n'est plus viable dans le programme de 1996. Le contenu d'arithmétique est réparti dans deux niveaux différents de l'enseignement secondaire. En sixième nous trouvons la division euclidienne, et en troisième, les notions de diviseur commun et de nombres premiers entre eux. Le contenu d'arithmétique réintroduit n'a plus l'orientation ensembliste théorique qui prévalait en 1970. La notion de pgcd ne figure pas en tant que connaissance exigible en tant qu'objet : c'est un outil pour obtenir une faction irréductible.

L'algorithme d'Euclide est réintroduit dans le programme de 1999 pour trouver le pgcd, alors que cet algorithme n'était pas utilisé dans la recherche du pgcd en 1971. La décomposition en facteurs premiers était dominante pour trouver le pgcd. Le document d'accompagnement du programme de troisième de 1999 indique que l'algorithme d'Euclide et l'algorithme des différences sont privilégiés pour trouver le PGCD, sans recours à la décomposition en facteurs premiers.

> *« Après avoir travaillé au cycle central sur les notions de multiples et de diviseurs, il est nécessaire de savoir si deux entiers sont ou non premiers entre eux. Pour l'obtention du PGCD de deux entiers, le programme préconise l'algorithme d'Euclide ou éventuellement un algorithme de différence : la répétition de la transformation qui à un couple d'entiers (a, b) fait correspondre le couple constitué de leur minimum et de leur écart, par exemple qui à (285, 630) fait correspondre (285, 345) – plutôt que le recours à la décomposition en facteurs premiers. Il n'est pas inutile de rappeler que l'arithmétique ait été bannie des programmes de mathématique du collège précisément à cause de l'abus du recours à la décomposition en produit de facteurs premiers. Certes les facteurs premiers de petits nombres, 924 ou 1999 pour donner des exemples, s'obtiennent facilement. Mais il n'en est plus du tout de même pour de plus grands nombres, dont l'ordinateur rend aujourd'hui naturelle la considération. C'est ainsi qu'il sera par exemple beaucoup plus facile d'établir directement que les deux nombres 12345678910111213 et 10000000000000007 ne sont pas premiers entre eux que d'essayer de trouver leur décomposition en facteurs premiers.*
>
> *Certains domaines d'application avancée, tel le chiffrage de messages (cryptage et décryptage), s'appuient largement sur la difficulté pratique d'obtention de certaines décompositions. »*
>
> *(Document d'accompagnement de classe de Troisième, 1999)*

La volonté des concepteurs de ce programme est ainsi de faire vivre la niche « algorithmique» pour proposer des exemples concrets qui permettent la mise en œuvre d'algorithmes à l'aide de calculatrices ou de tableurs en arithmétique.

C'est ainsi que, nous trouvons trois niches attribuées à l'arithmétique en classe de 3ème dans les programmes de 1999 : une niche algorithmique, une niche de sensibilisation à la culture mathématique, et une niche calcul numérique. L'orientation algorithmique prise par l'enseignement de l'arithmétique en 1999 est soutenue par le développement récent de l'informatique qui utilise de nombreux résultats d'arithmétique (cryptage).

I.5 Les deux derniers programmes d'arithmétique de 2005-2010

Après neuf ans d'application, le programme de mathématiques de 1996 a subi deux changements : le premier changement touche la classe de 6ème en 2005, la classe de 5ème en 2006, la classe de 4ème en 2007 et enfin la classe de 3ème en 2008. La rubrique « Travaux numériques » du programme de 1996 a été remplacée en 2005 par la rubrique « Nombre et calcul » dans laquelle on trouve le contenu d'arithmétique. Le deuxième changement concerne le contenu d'arithmétique entre en vigueur en 2009 pour toutes les classes de collège. Ce changement rapide, qui concerne toutes les classes de collège, est intervenu durant notre travail de thèse. Ceci nous a conduite à nous interroger sur les raisons de cette modification ; pour tenter d'apporter des réponses à cette question, nous avons choisi de comparer les programmes de 1996 avec les deux derniers programmes du collège entre 2005 et 2009

I.5.1 Comparaison des programmes de collège de 1996, 2005 et 2009

I.5.1.1 Classe de 6ème

Les modifications apportées en 2005 visent à insister davantage sur la maîtrise des vocabulaires arithmétiques et sur les relations arithmétiques entres les nombres entiers. L'accent est mis dans les programmes sur le langage et sur la division euclidienne. Nous trouvons sous la rubrique « Nombre et Calcul » :

> *« La notion de quotient occupe une place en sixième, sous ses différences significations : quotient euclidienne, quotient décimal, quotient fractionnaire. »*

Le programme de 2005 donne une place à la division euclidienne dans la colonne « Connaissance » sous le titre « Division, quotient : la division euclidienne et son sens ». Nous trouvons trois capacités associées à la division euclidienne :

- « Reconnaître les situations simples qui peuvent être traitées à l'aide d'une division euclidienne portant sur des nombres de taille raisonnables et interpréter les résultats obtenus.
- Calculer le quotient et le reste d'une division d'un entier par un entier dans des cas simples (le calcul mental, posé, instrumenté).
- Connaître et utiliser le vocabulaire associé (dividende, diviseur, quotient, reste). »

Ceci contraste avec la place réduite de la division euclidienne dans les programmes de 1996 où une seule compétence était exigible « *Calculer le quotient et le reste d'une division d'un entier par un entier dans des cas simples* », ceci en lien avec les techniques opératoires dans la colonne « Contenus ».

En ce qui concerne les programmes actuels (2009), nous ne trouvons aucune place privilégiée pour la division euclidienne. Le mot « division euclidienne » n'existe plus dans les programmes. Le titre « Opération » dans la colonne de Connaissance englobe la division des entiers et la division décimale. Les trois capacités relatives à la division euclidienne qui se trouvaient dans les programmes de 2005, sont réduites à une seule capacité qui met l'accent sur les vocabulaires relatifs aux quatre opérations :

« Connaître la signification du vocabulaire associé : somme, différence, produit, terme, facteur, dividende, diviseur, quotient, reste. »

Les critères de divisibilité occupent une place de plus en plus importante dans les programmes de la classe de sixième. Si le programme de 1996 ne mentionne aucune compétence exigible relative aux critères de divisibilité, les programmes de 2005 leur accordent une place dans la colonne « Capacités », en faisant un lien avec les notions de multiple et de diviseur, qui sont rappelées sur des exemples numériques en sixième. Les programmes actuels font le même choix que le précèdent en s'intéressant davantage aux notions de multiple et de diviseur, ces dernières font partie des connaissances de programmes de 2009.

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les modifications apportées aux programmes 1996, 2005 et 2009 associées au contenu d'arithmétique en classe de $6^{ème}$:

$6^{ème}$	Connaissances	Compétences exigibles	Commentaires
Programmes 1996	**Nombres entiers et décimaux : écriture et opérations** Technique opératoire Ecriture factionnaire	Calculer le *quotient* et le *reste* de la division euclidienne d'un nombre entier par un nombre entier d'un ou deux chiffres.	A l'occasion de simplification, on pourra faire intervenir des *critères de divisibilité,* sans nécessairement les justifier.
Programmes 2005	**Division, quotient** La division euclidienne et son sens. Ecriture fractionnaire	- Reconnaître les situations simples qui peuvent être traitées à l'aide d'une division euclidienne et interpréter les résultats obtenus. - Calculer le quotient et le reste d'une division d'un entier par un entier dans des cas simples (le calcul mental, posé, instrumenté). - Connaître et utiliser le vocabulaire associé (dividende, diviseur, quotient, reste). - Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 2, 4, 5, 3 et 9.	La notion de *multiple* a été introduite à l'école' primaire. Elle est rappelée, sur des exemples numériques, en même temps qu'est introduite celle de *diviseur*. Les différentes significations de ce dernier terme doivent être explicitées.
Programmes 2009	**Opérations** Addition, soustraction, multiplication et	- Connaître et utiliser les *critères de divisibilité* par 2, 5 et 10.	La notion de *multiple* a été introduite à l'école' primaire. Elle est rappelée, sur

	division. Multiple et diviseurs. Sens des opérations. Techniques élémentaires de calcul.	- Connaître et utiliser les *critères de divisibilité* par 3, 4 et 9. - Connaitre la signification du *vocabulaire* associé : Somme, différence, produit, terme, facteur, dividende, diviseur, quotient, reste.	des exemples numériques, en même temps qu'est introduite celle de *diviseur*. Les différentes significations de ce dernier terme doivent être explicitées.

Figure 5 : Comparaison des contenus d'arithmétique au collège : Programmes de 1996, 2005, 2009

I.5.1.2 Classe de 5ème

Les programmes en vigueur 1997 ne portent pas sur des objets d'arithmétique. Tandis que, le programme de 2006 donne une place importante aux notions de multiple et de diviseur. Le programme de 2009 fait le même choix que celui de 2006, comme le tableau ci-dessous nous le montre :

5ème	Connaissances	Compétences exigibles	Commentaires
Programmes de 1997	------	---------	----------
Programmes de 2006 et programmes de 2009	**Nombres entiers et décimaux positifs : calcul, divisibilité sur les entiers** Multiple et diviseur, divisibilité.	Reconnaitre, dans des cas simples, si un nombre entier positif est multiple ou diviseur d'un autre nombre entier positif. .	Les notions de multiple et diviseurs sont entretenues. La reconnaissance de multiples ou diviseurs est faite soit en utilisant les critères de divisibilité installés en classe de sixième, soit en ayant recours au calcul mental ou à la division.

Figure 6 : Comparaison des contenus d'arithmétique au collège : Programmes de 1997, 2006, 2009

I.5.1.3 Classe de 4ème

Les deux derniers programmes sont conformes aux programmes de 1998 en ce qui concerne la possibilité de la recherche des multiples communs pour additionner ou soustraire deux nombres en écritures fractionnaires, et du fait que les deux notions de PGCD et PPCM sont hors programme. Le tableau suivant nous montre le contenu de l'arithmétique dans les trois programmes étudiés :

4ème	Connaissances	Compétences exigibles	Commentaires
Programmes de 1998	**Nombres et calcul numérique** Opérations (+,-,×, ÷) sur les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire (non nécessairement simplifiée).	Calculer la somme de nombres relatifs en écriture fractionnaire.	L'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire peut demander un travail sur la recherche de *multiples communs* à deux ou plusieurs nombres entiers. La recherche du *plus petit commun multiple* pour l'obtention d'un dénominateur commun et celle du *plus grand diviseur commun* pour l'obtention de la forme irréductible **ne sont pas exigibles.**
Programmes de 2007	**Nombres numérique** Opérations (+, -, ×) sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire (non nécessairement simplifiée).	Calculer la somme de nombres relatifs en écriture fractionnaire.	L'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire peut demander un travail sur la recherche de *multiples communs* à deux ou plusieurs nombres entiers dans des cas où un calcul mental est possible. La recherche du *PPCM* et du *PGCD* pour l'obtention de la forme irréductible est **hors programme.**
Programmes 2009	**Nombres numérique** Opérations (+,-,×, ÷) sur les nombres relatifs en écriture décimale. Opérations (+, -, ×) sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire (non nécessairement simplifiée).	Multiplier, additionner et soustraire des nombres relatifs en écriture fractionnaire	L'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire demande un travail sur la recherche de *multiples communs* à deux ou plusieurs nombres entiers dans des cas où un calcul mental est possible.

Figure 7 : Comparaison des contenus d'arithmétique en classe de 4ème - Programmes de 1998, 2007, 2009

I.5.1.4 Classe de 3ème

Nous avons vu que l'arithmétique est réintroduite dans les programmes de 1999 avec la notion de diviseur commun et de nombres premiers entre eux. Les différences profondes entre les programmes de 1999 et ceux de 2008 en termes d'écologie s'expriment de façon explicite par l'introduction, dans les programmes de 2008, de la notion de nombre premier et de décomposition en produits de facteurs premiers pour obtenir une fraction irréductible, ceci sans donner lieu à un développement particulier ni à des exercices systématiques de décomposition en facteurs premiers. Voici ce qui est mentionné dans le commentaire de programme au sujet de la décomposition en facteurs premiers et des nombres premiers :

> *« Le recours à une décomposition en produits de facteurs premiers ou obtenus à partir des critères de divisibilité vus en classe de sixième est possible dans des cas simples, mais ne doit pas être systématisé. A ce propos, la notion de nombre premier est introduite sans donner lieu à un développement particulier ni à des exercices systématiques de décomposition en facteurs premiers (notions étudiées en classe de seconde). »*

Ainsi, le programme de 2008 permet d'utiliser la décomposition en facteurs premiers dans des cas simples et à partir des critères de divisibilité, mais pour la recherche de pgcd, il privilège l'aspect algorithmique. Nous pouvons dire que les nouveaux programmes de mathématiques de Collège — mis en place de 1996 à 2005 — témoignent d'un retour à la mise en place de l'arithmétique plus proche de ce qui se faisait dans les années soixante-dix que dans les précédents programmes. Ceci semble justifié par l'intérêt de l'enseignement de l'arithmétique et de ses applications dans d'autres domaines.

La volonté des concepteurs de programmes de faire vivre la niche algorithmique est renforcée dans le dernier programme en faisant de l'utilisation de l'aspect algorithmique une des capacités associées au contenu de l'arithmétique. De plus, le programme de 2009 met l'accent sur la notion de PGCD en lui donnant une place dans la colonne « Connaissances » et dans la colonne « Capacité », ce qui n'était pas le cas en 2008. Quatre capacités ainsi figurant dans le programme 2009:

> *« - Connaître et utiliser un algorithme donnant le PGCD de deux entiers (algorithme des soustractions, algorithme d'Euclide).*
>
> *- Calculer le PGCD de deux entiers.*
>
> *- Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux.*
>
> *- Simplifier une fraction donnée pour la rendre. »*

Du fait de la disparition des nombres premiers, la recherche du PGCD en utilisant la méthode de la décomposition en facteurs premiers n'apparaît pas dans le dernier programme. Les nombres peuvent être décomposés dans des cas simples à partir des critères de divisibilités.

Le programme recommande de mettre en œuvre la niche algorithmique à l'aide des moyens informatiques ; nous pouvons lire ce qui est mentionné dans partie « Commentaire » :

> *« Dans le cadre du socle commun,[3] les élèves utilisent leur calculatrice pour rendre irréductible une fraction donnée. »*

Ce commentaire n'était pas dans le programme de 2008.

En lisant les objectifs de la pratique du calcul numérique figurant sous l'intitulé : « Nombres et Calcul », nous trouvons une autre niche associée à l'arithmétique dans les programmes de 2008, celle de la niche « raisonnement » :

> *« La résolution de problèmes a pour objectifs*
>
> *• d'entretenir le calcul mental, le calcul à la main et de l'usage raisonnée des calculatrices,*

[3] Socle commun : il fait partie de la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'École du 23 avril 2005. Il désigne un ensemble de connaissances et de compétences que les élèves doivent maîtriser à l'issue de la scolarité.

• *d'assurer la maîtrise des calculs sur les nombres rationnels,*

• *d'amorcer les calculs sur les radicaux et de poursuivre les calculs sur les puissances,*

• *de* ***familiariser les élèves aux raisonnements arithmétiques[4],***

• *de compléter les bases du calcul littéral et d'en conforter le sens, notamment par le recours à des équations ou des inéquations du premier degré pour résoudre des problèmes,*

• *de savoir choisir l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation. »*

Notons que cette niche n'apparaissait pas explicitement dans les programmes de 2008. Nous remarquons de plus que le commentaire mentionné dans les programmes de 2008, relatif à la niche « Culturelle », disparaît des programmes de 2009. Aucune indication n'est citée, cependant, elle reste présente dans l'esprit des programmes.

C'est ainsi que, le programme de 2009 met l'accent sur la niche algorithmique et identifie la niche raisonnement de l'arithmétique à côté de la niche « calcul numérique ».

Le tableau ci-dessus nous présente le contenu d'arithmétique en classe de $3^{ème}$ dans les trois programmes 1999, 2008 et 2009 :

[4] C'est nous qui soulignons en gras.

3ème	Connaissances	Compétences exigibles	Commentaires
1999	**Nombres entiers et rationnels** Diviseurs communs à deux entiers Fractions irréductibles	- Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux. - Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. - Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, Intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves. Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit alors, un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit.
2008	**Nombres entiers et rationnels** Opérations sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire. Diviseurs communs à deux entiers Fractions irréductibles	- Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux. - Simplifier une fraction donnée pour la rendre	Cette partie d'arithmétique offre l'occasion d'une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves. Le fait que tous les nombres ne sont pas rationnels est mis en évidence. Depuis la classe de cinquième, les élèves ont appris à simplifier les écritures fractionnaires grâce à la pratique du calcul mental et aux critères de divisibilité. En classe de troisième, la question de l'irréductibilité de la fraction est posée. Pour cela, plusieurs méthodes peuvent être envisagées. La connaissance de relations arithmétiques entre nombres que la pratique du calcul mental a permis de développer permet d'identifier des diviseurs communs au numérateur et au dénominateur. Après avoir remarqué que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier il est possible de construire un algorithme, celui d'Euclide ou celui des soustractions successives, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers permet d'apporter une solution au problème dans tous les cas. Les tableurs et logiciels de calcul formel peuvent, pour ce sujet, être exploités avec profit. Le recours à une décomposition en produits de facteurs premiers ou obtenus à partir des critères de divisibilité vus en classe de sixième est possible dans des cas simples, mais ne doit pas être systématisé. A ce propos, la notion de nombre premier est introduite sans donner lieu à un développement particulier ni à des exercices systématiques_de décomposition en facteurs premiers

			(notions étudiées en classe de seconde).
2009	**Nombres entiers et rationnels** Diviseurs communs à deux entiers, PGCD Fractions irréductibles. Opérations sur les nombres relatifs en écriture fractionnaire.	- Connaître et utiliser un algorithme donnant le PGCD de deux entiers (algorithme des soustractions, algorithme d'Euclide). - Calculer le PGCD de deux entiers. - Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux. -Simplifier une fraction donnée pour la rendre	*Plusieurs méthodes peuvent être envisagées.* La connaissance de relations arithmétiques entre nombres – que la pratique du calcul mental a permis de développer – permet d'identifier des diviseurs communs de deux entiers. Le recours à une décomposition en produits de facteurs premiers est possible dans des cas simples mais ne doit pas être systématisée. Les tableurs, calculatrices et logiciels de calcul formel sont exploités. Dans le cadre du socle commun, les élèves utilisent leur calculatrice pour rendre irréductible une fraction donnée. Dans le cadre du socle commun, l'addition, la soustraction et la multiplication « à la main » de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, sont exigibles seulement dans des cas simples ; pour l'addition et la soustraction, il s'agit uniquement des cas où un calcul mental est possible. Dans les autres cas, la calculatrice est utilisée.

Figure 8 : Programmes de Troisième de 1999, 2008, 2009

Pour conclure, l'habitat de l'arithmétique se trouve avec les nombres entiers et le calcul ; ainsi la niche attribuée à arithmétique tout au long du collège est la niche « Calcul numérique ». Trois niches sont associées à l'arithmétique : calcul numérique, algorithmique et culturelle dans les programmes de 1999 et de 2008.

Le dernier programme 2009 met en évidence la niche raisonnement de l'arithmétique à côté des deux dernières niches.

II. Les programmes de classe de seconde

Nous allons présenter dans ce qui suit une analyse écologique des programmes de Seconde durant l'évolution des programmes.

II.1 Période classique 1902 – 1968

Il n'y a aucune rubrique réservée à l'arithmétique dans les programmes de cette période. Le programme consiste en Algèbre et Géométrie. On ne trouve aucune trace des notions relatives aux propriétés des entiers, ni aux relations. Cependant, on trouve dans la rubrique « Algèbre » des programmes de Seconde de 1902-1905 des blocs qui, comme les progressions arithmétique et géométrique, faisaient partie de l'arithmétique. Ces blocs vont disparaître des programmes de Seconde en 1925.

Le Programme de 1943 (classique section A, B, C et moderne) propose des activités sur les fractions comme une initiation à l'algèbre :

> « *On procédera d'abord, à l'aide d'exercices biens choisis, à une révision des règles du calcul numérique et, en particulier, des règles du calcul des fractions arithmétique. On rappellera comment ces règles s'étendent au calcul algébrique.* » P. 119

Les programmes de 1948 (section classique A et B) conservent le calcul sur les fractions, tandis que les programmes de 1948, sections classique C et moderne, comportent les objets suivants :

- Puissances entières et positives. Rapports et proportions.

Les programmes de 1958 (classique A et B et C et moderne) comporte les objets suivants de l'arithmétique :

> « *Rappel et mise en ordre (comportant éventuellement quelques compléments) des éléments d'arithmétique et d'algèbre acquis dans les classes précédentes*
>
> *Rapports et proportion ; Exposants entiers positifs, Racine carrée arithmétique. Pratique de calcul numérique.* » (p. 110)

En conclusion, pour cette période nous pouvons dire que les notions de nombre premier et de décomposition en facteurs premiers, de pgcd et de ppcm n'ont pas le lieu en classe de Seconde. Elles sont réservées au collège, plus particulièrement en classe de 4ème.

Ces objets selon Assude *« permettaient de légitimer l'enseignement de l'arithmétique par l'existence d'une partie théorique et permettaient le travail de simplification des fractions et des opérations sur les fractions, la théorie des fractions ayant une importance décisive tant qu'un nouveau rapport aux nombres n'émarge pas surtout sous l'influence du mathématicien Henri Lebesgue. » (Assude, 1998, p 110).*

II.2 Période des mathématiques modernes 1969 - 1979

Les notions de la théorie élémentaire des nombres n'ont aucune place dans les programmes de Seconde dans cette période. On y trouve par contre des éléments d'algèbre moderne : par exemple, dans la rubrique « Nombres réels (Notations R) », le programme mentionne l'étude du sous-groupe Z des entiers relatifs, et la comparaison des calculs dans le groupe Z et dans le groupe des puissances entières d'un réel : $\{ a^n$ /a réel non nul donné, n $\in$ Z$\}$. Cette étude va disparaitre des programmes de 1974.

II.3 Période de la contre -réforme 1980 – 1998

Le programme de seconde a subi au cours de cette période trois changements partiels sans qu'il n'y ait de rupture fondamentale : 1980/1985, 1986/1989 et 1990/1998. Cependant, aucune trace des objets d'arithmétique ne se trouve dans ces programmes.

Les programmes de 1990 annoncent sous le titre « Calcul littéral et calcul numérique » :

> *« Dans ce domaine, c'est la maitrise des mécanismes élémentaires indiqués par le programme qui est importante ; toute virtuosité est exclue, notamment en ce qui concerne les factorisations et les calculs portant sur des fractions, les exigences à l'issue de la classe de troisième sont modestes. »*

Ceci va de pair avec la disparition de l'arithmétique au collège, en particulier le PGCD et le PPCM, ce qui limite le travail sur les fractions.

II.4 Période contemporaine 1999 – 2008

Le programme de seconde de 1999, qui est appliqué à la rentrée 2000-2001, voit la réintroduction de l'arithmétique avec la notion de nombre premier et de décomposition en facteurs premiers. Il comporte trois rubriques : « Statistiques », « Calcul et fonctions » et « Géométrie ». C'est dans la rubrique « Calcul et fonctions » que nous trouvons le contenu d'arithmétique. L'habitat de l'arithmétique se trouve dans la partie relative au Calcul.

Le programme place l'étude des ensembles de nombres avant l'étude des nombres premiers. Nous trouvons la notion de nombre premier dans la colonne « Contenus », alors que la décomposition en facteurs premiers est une capacité attendue.

Aucune des notions d'arithmétique étudiées au collège n'est mentionnée en lien avec celles étudiées dans le programme de Seconde. Le programme propose des nouvelles notions d'arithmétique pour constituer une base de connaissances exploitables pour les années ultérieures, plus précisément pour l'exploiter en classe de Terminale scientifique où une partie optionnelle du programme s'intitule « Arithmétique ». Le document d'accompagnement indique à ce sujet :

> *« La définition de nombre premier permet une nouvelle approche de ce travail en même temps qu'elle prépare la partie arithmétique des programmes ultérieurs et entretient des qualités indispensables de calcul (calcul mental, manipulation des puissances et des fractions). Il s'agit simplement de se familiariser avec la décomposition en facteurs premiers et il est demandé de se limiter à des exemples simples ; aucun théorème général d'existence ou d'unicité n'est exigé : on pourra l'évoquer sur des petits nombres et justifier ainsi la convention excluant 1 de l'ensemble des nombres premiers. »*

Le travail sur les fractions n'est plus explicitement mentionné dans le programme de seconde, il est cependant retenu comme le texte précédent nous le montre, et la niche « Calcul numérique », que l'arithmétique occupe tout au long du collège, continue à vivre dans les programmes de Seconde, par la décomposition des nombres de taille raisonnable en produit de facteurs premiers ; voici ce que l'on peut lire dans le commentaire du programme :

> *« On se limitera à des exemples (du type 56 × 67) pour lesquels la connaissance des tables de multiplication suffit. »*

Le programme de Seconde ne donne aucune place à la décomposition en facteurs premiers avec les notions de PGCD et de PPCM, comme c'était le cas dans les programmes de collège dans les années soixante-dix où les notions de PGCD et de PPCM se rapportent aux nombres premiers. Nous constatons également que l'aspect algorithmique pour lequel, comme nous l'avons vu, l'arithmétique a été réintroduite en classe de Troisième, n'est plus mentionné dans le texte du programme de Seconde.

En lisant les objectifs relatifs à la rubrique « Calcul et fonctions », nous trouvons que l'arithmétique prend la niche « raisonnement » dans les programmes.

> *« Comme la géométrie, les activités de calcul doivent être l'occasion de développer le raisonnement et l'activité de démonstration. »*

Il apparaît aussi que le programme d'arithmétique en Seconde ne permet pas de faire une synthèse des connaissances arithmétiques du collège, et ne prend donc pas en charge la question de la transition du collège à la classe de Seconde en ce qui concerne les notions d'arithmétique.

> *« L'informatique, devenue aujourd'hui absolument incontournable, permet de rechercher et d'observer des lois expérimentales dans deux champs naturels d'application interne des mathématiques : les nombres et les figures du plan et de l'espace »*

La calculatrice a une place significative dans le programme ; elle apparaît dans la colonne « Contenu » :

> « *Présentation des nombres dans une calculatrice.* »

Nous trouvons aussi parmi les objectifs réservés à la rubrique « Calcul et fonctions », la suivante :

> *« Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques. »*

Le contenu d'arithmétique, après huit années d'application en Seconde va disparaître totalement du nouveau programme 2009 comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

II.5 Le dernier programme 2009

A la rentrée scolaire 2009, un nouveau programme est mis en place ; on y observe l'introduction de l'algorithmique, qui se fait au détriment de l'arithmétique, laquelle disparaît à nouveau des programmes de seconde. L'algorithmique est introduite dans toutes les parties du programme : fonctions, géométrie, statistique et probabilité, logique. Cette introduction est largement basée sur les progrès de la science et de la technique informatique. Elle a pour objectif de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes. On note également que la « rubrique Calcul et Fonction » du programme précédent est remplacée par la rubrique « Fonction » dans le programme 2009.

Le choix de supprimer à nouveau l'arithmétique des programmes de seconde peut paraître surprenant dans la mesure où l'arithmétique permet de pratiquer une démarche algorithmique, et que l'algorithme d'Euclide et celui de soustractions successives sont vus en classe de Troisième pour réduire les fractions. Cette suppression est à mettre en relation avec le fait que le programme privilégie les environnements technologiques pour le travail sur les algorithmes. Voici le texte du programme qui se trouve sous l'intitule « Algorithme » (objectifs pour le lycée) :

> *« La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, les élèves ont rencontré des algorithmes (algorithmes opératoires, algorithme des différences, algorithme d'Euclide, algorithmes de construction en géométrie). Ce qui est proposé dans le programme est une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel. Il s'agit de familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul. »*

Il faut noter que la disparation des nombres premiers en classe de seconde n'est pas prise en compte dans les nouveaux programmes de $3^{ème}$, tandis que la décomposition en facteurs premiers est introduite dans les programmes de $3^{ème}$ pour seulement simplifier les fractions. Nous nous demandons si l'absence institutionnelle des nombres premiers a un impact dans la pratique des enseignants et chez les élèves.

III. Lien entre l'arithmétique et l'informatique

Nous donnons ici les résultats d'une analyse écologique dans les programmes et les documents d'accompagnement des programmes[5] pour mettre en évidence les liens existant entre l'arithmétique et l'informatique lors de la réintroduction de l'arithmétique dans l'enseignement secondaire.

[5] Les documents d'accompagnement des programmes de classe de $6^{ème}$ en 1996 , classe de $5^{ème}$ en 1997, classe de $4^{ème}$ en 1998 et classe de $3^{ème}$ en 1999.

L'introduction officielle des calculatrices dans l'enseignement des mathématiques au collège a lieu dans la période de la contre-réforme. Voici ce qui est noté sous la rubrique « Travaux numérique » en classe de 6$^{\text{ème}}$:

> *« Les travaux numériques prennent appui sur la pratique du calcul exact ou approché sous différentes formes : le calcul mental ; le calcul à la main (dans le cas de nombres courants et d'opérations techniquement simples), l'emploi d'une calculatrice. » (Programme de 1986)*

En ce qui concerne l'arithmétique, l'usage de la calculatrice apparaît dans les activités sur les nombres en écriture fractionnaire ; comme il n'y a pas d'arithmétique dans les programmes dans cette période, on ne peut pas observer de lien explicite.

En classe de 6$^{\text{ème}}$, l'utilisation de la calculatrice est présente dans les programmes de 1996 en ce qui concerne le calcul et la division :

> *« L'utilisation de la calculatrice s'impose pour effectuer certaines opérations comme les multiplications ou divisions de grands nombres ou de nombres décimaux. (…). L'utilisation des ordinateurs peut apporter une aide importante pour l'apprentissage des mathématiques dès la classe de 6e. Elle peut permettre un travail plus individualisé. Un premier usage concerne les logiciels d'aide à l'apprentissage de techniques de calcul (calcul mental, manipulations d'expressions…). »* (Document d'accompagnement du programme de 6$^{\text{ème}}$, P ; 31)

Au cycle central, la calculatrice est aussi présente pour pratiquer le calcul :

> « *Les nouveaux programmes proposés pour le collège font apparaître la nécessité d'un travail avec des calculatrices, tout en veillant à ce que chacun acquière des connaissances suffisantes en calcul écrit et mental. Il s'agit de conduire tous les élèves du cycle central à une maîtrise des calculatrices scientifiques élémentaires* » P.68

L'intention d'introduire l'ordinateur dans l'enseignement des mathématiques est officiellement explicitée :

> « *Les logiciels de calcul formel permettent de construire des situations d'apprentissage intéressantes pour les calculs avec les fractions, les racines carrées, le traitement des expressions algébriques ou la résolution d'équations. (…) Enfin, l'usage d'ordinateurs dans l'enseignement des mathématiques participe, notamment avec la technologie, à la formation générale des élèves en les familiarisant avec les objets et les actions courantes comme la gestion des fichiers, la sauvegarde, l'impression. Le développement des réseaux multiplie par ailleurs les possibilités d'échanges de toute nature (courrier, fichiers, images, sons) et peut permettre d'enrichir l'enseignement. Les initiations officielles s'intéressent de plus en plus à l'intégration des outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques.* » P.69

En classe de 3$^{\text{ème}}$, on observe une nouvelle orientation pour la place de l'outil informatique dans l'enseignement des mathématiques. Le programme de l'année 1999 se démarque des précédents par la réintroduction de l'arithmétique sous l'aspect algorithmique, et il met en avant des applications de l'informatique au-delà de l'usage des calculatrices en recommandant des logiciels sur ordinateurs. Nous trouvons dans la colonne « Commentaire » sur le contenu « Diviseurs communs à deux entiers et Fractions irréductibles » la recommandation suivante :

> « *On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit*. » (Programme de 1999, P.85)

Le document d'accompagnement complète ce programme en explicitant les liens existant entre l'arithmétique et l'informatique :

> « *Certains domaines d'application avancée, tel le chiffrage de messages (cryptage et décryptage), s'appuient largement sur la difficulté pratique d'obtention de certaines décompositions* » (Document d'accompagnement de programme 1999, P.97)

L'informatique ainsi utilise les résultats arithmétiques, elle est considérée comme un moyen permettant de faire vivre la niche algorithmique en classe :

> « *La mise en œuvre, dans un tableur, d'algorithmes comme celui d'Euclide permet la mise en place d'une réflexion particulière sur les automatismes de calculs qu'une machine peut prendre en charge* » (Document d'accompagnement de programme 1999, P.100)

Le discours sur les liens entre l'arithmétique et l'informatique est aussi mentionné explicitement dans les programmes de 1998 de Terminale S :

> « *Il a paru utile de faire figurer un enseignement d'arithmétique en raison de l'importance de celle-ci dans la culture scientifique et du développement actuel de ses application*. »

L'algorithme permet de renforcer l'utilisation de l'informatique qui est devenu outil indispensable dans la vie sociale :

> « *La notion d'algorithme sert ainsi à introduire non seulement quelques « notions informatiques élémentaires (boucle, test, récursivité etc.) » mais aussi à renforcer l'utilisation des outils informatiques*. » (Nguyen, C.T., 2005, p. 27)

Elle prend une place importante dans tous les champs des mathématiques, mais le calcul numérique peut être considéré comme le lieu privilégié de production de l'algorithme :

> « *Le calcul numérique est un lieu privilégié de production d'algorithmes notamment d'algorithmes itératifs où il y a répétition d'un invariant de calcul (division de deux nombres entiers, approximation d'une racine d'une équation numérique, etc.).*

> *La répétition s'appuie sur une discrétisation des ensembles de nombres et sur la détermination d'actions effectuables et reproductibles. Sa formulation, en vue d'obtenir un résultat numérique ou une preuve, produit des algorithmes de calcul.* » (ibid, p.4)

Cette idée peut-être motivée par le choix de la noosphère de réintroduire l'arithmétique sous l'aspect algorithmique dans les programmes de 1999.

L'aspect algorithmique de l'arithmétique est mis en valeur davantage en classe de Troisième dans le dernier programme (2009). Or, l'arithmétique vient de disparaitre en même temps des programmes de Seconde en laissant la place à l'algorithmique qui va apparaître dans toutes les parties de programme.

> « *L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante.* » (Programme de Seconde, 2009, P.9)

Nous nous demandons quel est l'impact de la disparation de l'arithmétique d'une part, sur l'enseignement de l'arithmétique au collège, et d'autre part sur l'enseignement de l'arithmétique en Terminale S, car les connaissances arithmétiques en Seconde étaient considérées dans le programme précédent comme une base essentielle pour l'enseignement optionnel d'arithmétique en terminale S.

IV Organisation mathématique des contenus d'arithmétique au collège et en seconde

Dans cette partie, nous rendons compte de l'étude que nous avons menée sur l'organisation mathématique dans les programmes à partir de 1902 jusqu'au dernier programme en référence à l'étude épistémologique faite dans le chapitre III, en nous limitant à l'étude de l'organisation mathématique concernant les notions prises en compte dans notre recherche ; nous avons également repéré le statut des définitions dans les programmes en nous appuyant sur l'étude épistémologique d'Ouvrier-Buffet que nous avons présentée dans le chapitre II.

IV.1 Dans la période classique

En 1902, comme nous l'avons déjà dit, le contenu d'arithmétique associé aux propriétés des entiers dans cette période est proposé dans les programmes en termes de définitions, théorèmes, propositions, règles. En particulier, en classe de 4$^{\text{ème}}$ B, le programme propose de donner une définition du quotient et du reste dans la division euclidienne ; il propose également une définition des nombres premiers ; il énonce aussi le théorème concernant la multiplication ou la division du dividende et du diviseur par un même nombre. Il donne également la proposition relative à l'infinité des nombres premiers, et signale que l'unicité de la décomposition en facteurs premiers est admise sans démonstration.

Le programme propose le pgcd et le ppcm avant les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers ; après avoir présenté ces derniers, il revient sur le pgcd et le ppcm, et la relation de divisibilité, à partir de la décomposition en facteurs premiers. Il énonce, pour la divisibilité, la condition nécessaire et suffisante de divisibilité d'un nombre par un autre nombre non nul lorsque les deux nombres sont décomposés en facteurs premiers.

Nous faisons l'hypothèse que la partie théorique proposée dans le programme permet de donner les définitions formelles de type *dénomination* dans les manuels à cette époque.

Cette organisation mathématique va changer dans les programmes de 1905. Toute la partie théorique qui précise les définitions, les théorèmes et les propriétés a disparu des programmes de 1905. L'unicité de la décomposition en facteurs premiers n'existe plus, ainsi que la propriété de l'infinité des nombres premiers. Les notions de nombres premiers et de décomposition en facteurs premiers mettent en avant la notion de pgcd et de ppcm. La divisibilité est étudiée après avoir abordé la division des entiers, puis la décomposition en facteurs premiers pour la recherche du pgcd et du ppcm. Le programme propose le contenu d'arithmétique sur des exemples concrets, ce qui correspond à la *définition par exemples*.

Les organisations mathématiques du contenu d'arithmétique dans les programmes de 1925 se présentent par l'étude de la divisibilité et la division en classe de 6ème, ce qui permet le travail sur les fractions : réduction au même dénominateur et opérations sur les fractions. Le programme de la classe de 4ème présente les notions de pgcd et ppcm comme objets d'étude. Les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers sont présentés après l'étude des notions de pgcd et ppcm.

Le changement du programme en 1938 met en avant en classe de 4ème l'étude de la décomposition en facteurs premiers, de la recherche de pgcd et ppcm. L'étude de la division euclidienne et les critères de divisibilité se font en classe de 5ème. Les applications aux fractions sont abordées à la suite de la recherche du pgcd et du ppcm. La notion de nombre premier a disparu.

Les nouveaux programmes de 1942 mettent l'accent sur le quotient et le reste de la division en classe de 6ème. La notion de diviseur prend une place importante dans le programme d'arithmétique. La notion de nombre premier réapparaît dans les programmes, et la décomposition en facteurs premiers est donnée avant la notion de diviseurs communs et de multiples communs. Les notions de PGCD et de PPCM ne sont pas mentionnées dans le programme de 5ème.

Conformément aux programmes de 1938, les nombres premiers vont disparaître des programmes de 1946, les notions de PGCD et PPCM sont mentionnées dans les programmes, et leur étude vient à la suite de celle de la décomposition en facteurs premiers.

Enfin, les programmes de 1958 vont introduire la notion de multiple, et mettent en avant l'étude de diviseurs communs et multiples communs avant l'étude de la décomposition en facteurs premiers, mais ils reviennent sur l'étude des notions de PGCD et PPCM après avoir proposé la décomposition en facteurs premiers.

En ce qui concerne le statut des définitions dans les programmes, nous avons constaté que depuis 1905 les programmes proposent les notions d'arithmétique sur des exemples et par des règles, en particulier pour la décomposition en facteurs premiers. Voici ce que les instructions des programmes de 1925 mentionnent à propos de la partie théorique du contenu d'arithmétique :

> « *On devrait se contenter de faire apprendre des règles et de les appliquer pour en bien fixer le mécanisme. [……]*
>
> *Quoi qu'il en soit, il paraît nécessaire de supprimer les restrictions mises à l'introduction de considérations théoriques au début de l'enseignement de l'arithmétique. Il y a là une question de mesure qui doit être laissée à l'appréciation du maitre. » (Instructions de 1925, P.249)*

Dans cette étude, les définitions par l'exemple sont dominantes en arithmétique ; les programmes proposent cependant des définitions formelles lorsqu'ils introduisent les notions de multiple, de diviseur, de PGCD et de PPCM.

IV.2 Dans la période des mathématiques modernes

Les organisations mathématiques de l'arithmétique dans cette période proposent la division euclidienne après l'étude de l'ensemble des multiples d'un nombre, pour présenter ensuite la notion de diviseur d'un nombre naturel. Les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers sont proposés avant la recherche de multiples communs et de diviseurs communs. L'étude du PGCD et du PPCM n'est pas un objet d'étude dans les programmes.

Comme nous l'avons déjà dit, les critères de divisibilité et les nombres premiers entre eux ne sont pas objets d'étude dans les programmes de collège.

En ce qui concerne les définitions, *les définitions par exemples* sont privilégiées par les programmes :

> *« Les définitions, les propriétés seront introduites par des exemples. Aucune « théorie générale » ne sera développée sans nécessité. [….]*
>
> *L'introduction d'une notion nouvelle est délicate ; elle nécessite une expérimentation, puis une synthèse ; pour retenir l'attention de la classe, cette synthèse doit être concise, ne porter que sur*

une seule idée, et être présentée à un moment psychologiquement bien choisi. » (Programme 1979 des classes de sixième et cinquième, P.26-27)

Cependant, les programmes de 1977 incitent à proposer des définitions claires et précises. Nous trouvons sous le titre « Rôle de l'enseignement des mathématiques dans les collèges », la recommandation suivante :

« Habituer l'élève à s'exprimer clairement, avec un vocabulaire simple dans un langage précis (décrire un objet mathématique, formuler une hypothèse, énoncer une définition ou une propriété, exposer une démonstration…) ; » (1979, P.12)

IV.3 Les programmes de contre-réforme

Dans cette période, le programme d'arithmétique est limité à la division euclidienne et aux critères de divisibilité proposés en classe de 6$^{\text{ème}}$.

Quant au statut des définitions, le discours sur la conception de ce qu'est une définition est absent dans les programmes et les remarques sur cette question que l'on trouvait dans la période des mathématiques modernes ont disparu des programmes de 1985 ; l'accent est mis davantage dans le programme sur l'intégration des définitions dans l'activité mathématique, nous pouvons lire dans les compléments du programme :

« L'étude d'une définition à un niveau déterminé implique qu'elle sera désormais, et le plus souvent possible, intégrée systématiquement à l'activité mathématique.» (Programmes de 1986, p. 20)

Nous pouvons repérer l'idée qu'une définition doit être constituée de termes antérieurs et plus connus ; en effet, le programme signale que les notions connues antérieurement seront réutilisées pour découvrir les nouvelles notions. Nous pouvons lire dans ce même programme:

«*Les professeurs vont avoir à choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des « outils », c'est-à- dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celle-ci auront été bien maitrisées, elles fourniront à leur tour des «outils» qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente.*» (ibid, P.20)

Les programmes mettent l'accent sur les *définitions équivalentes* dans la pratique des enseignants en classe, et recommandent de ne pas les prendre comme point de départ, mais plutôt comme un résultat du travail fait en classe, comme le montre le commentaire ci-dessous :

«Le professeur est attentif au langage et aux significations diverses d'un même mot. Il évite de fixer d'emblée le vocabulaire et les notations : seules peuvent en profiter, en effet, les élèves qui ont une expérience préalable du sujet ou de fortes capacités d'anticipation. Dans le cours du

traitement d'une question, vocabulaire et notation s'introduisent selon un critère d'utilité ; ils sont à considérer déjà comme conquêtes de l'enseignement et non comme de points de départ.» (ibid, p.21)

Aucune remarque n'apparaît dans les programmes à propos des définitions concernant spécifiquement les notions d'arithmétique.

IV.4 Programmes de la période contemporaine

Introduire les fractions irréductibles dans les nouveaux programmes nécessite d'introduire la notion de nombres premiers entre eux pour justifier la technique associée. Or, la notion de nombres premiers entre eux est basée sur la notion de PGCD. Pour calculer ce dernier, l'algorithme d'Euclide et celui des soustractions successives sont introduits dans les programmes de classe de troisième. Ainsi, l'organisation mathématique retenue par les concepteurs de programmes est de présenter la division euclidienne et les critères de divisibilité en classe de sixième, ensuite de proposer les diviseurs communs et les nombres premiers entre eux en classe de troisième ; l'étude des nombres premiers et de la décomposition en facteurs premiers sont faites en classe de Seconde.

Pour le statut de définitions dans les programmes des années 1996, nous trouvons que les nouvelles notions sont introduites à l'aide de termes antérieurs déjà connus :

« L'activité de chaque élève doit être privilégiée, sans délaisser l'objectif d'acquisitions communes. Dès lors, seront choisies des situations créant un problème dont la solution fera intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour de nouveaux « outils », qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. » (Programme de 6ème, P. 19)

Les programmes s'attachent davantage au "langage" qui doit aussi être précis" :

« Il convient d'être attentif au langage et aux significations diverses d'un même mot. Le vocabulaire et les notations ne doivent pas être fixés d'emblée, mais introduits au cours du traitement d'une question, en fonction de leur utilité. (…) Un moyen efficace pour faire admettre la nécessité d'un langage précis, en évitant que cette exigence soit ressentie comme arbitraire par les élèves, est le passage du « faire » au « faire faire ». (ibid, p.19)

Le texte officiel parle particulièrement de vocabulaire de l'arithmétique en sixième :

«Les élèves doivent être capable d'employer correctement le vocabulaire de l'arithmétique, (…). L'apprentissage des notations ou d'un vocabulaire spécifique doit être conduit de manière progressive au travers des situations dans lesquelles elles ont une utilité et prennent du sens. » (Document d'accompagnement du programme de 6ème, p. 32)

IV.5 Les deux derniers programmes en vigueur

Le programme de 2005 accorde une attention particulière au vocabulaire de l'arithmétique. En particulier, la maîtrise du vocabulaire de la division euclidienne devient une compétence exigible en sixième :

« Connaitre et utiliser le vocabulaire associé (dividende, diviseur, quotient, reste).»

Le dernier programme de 2009 met l'accent sur le sens de la division euclidienne dans la partie «Connaissances». Nous pouvons relever dans le programme deux types de définitions qui peuvent être proposés pour définir le diviseur, en sixième : **Désignation par exemple,** nous pouvons lire dans le commentaire du programme :

> «*La notions de multiple a été introduite à l'école primaire. Elle est rappelée, sur des exemples numériques, en même temps qu'est introduite celle de diviseur. Les différentes significations de ce dernier terme doivent être explicitées.*»

Les *définitions équivalentes* peuvent être proposées en 5ème où les notions de multiple et de diviseur sont dans la partie «Connaissance». En ce qui concerne la partie « Compétences », nous pouvons lire :

> «*Reconnaître, dans des cas simples, si un nombre entier positif est multiple ou diviseur d'un autre nombre entier positif.*»

CONCLUSION

L'analyse que nous avons conduite sur l'évolution de l'arithmétique permet d'identifier habitats et niches de l'arithmétique au collège et en Seconde depuis la réforme de l'enseignement secondaire 1902 jusqu'à aujourd'hui. Elle nous permet également de mettre à jour d'une part les organisations mathématiques, c'est-à-dire les différents choix de présentations des différentes notions d'arithmétique, durant les changements du programme et d'autre part le statut des définitions proposées dans les programmes.

Comme nous l'avons vu pour la première institution, celle du collège, le contenu d'arithmétique relatif aux nombres entiers était présent dans les programmes de 1902 jusqu'à l'année 1985 qui marque le début de la période de la contre-réforme, qui voit la disparation des éléments d'arithmétique, notamment le pgcd, le ppcm, les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers. L'arithmétique réapparaît dans les programmes, en particulier en troisième en 1999, sous l'aspect algorithmique.

En ce qui concerne l'habitat de l'arithmétique au collège, il varie durant l'évolution des programmes. Dans la période classique, l'arithmétique associée aux entiers prenait une place en classe de 5ème pour la division euclidienne et les critères de divisibilité, et en classe de 5ème avec PGCD et PPCM et les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers. Pour la période des mathématiques modernes, l'habit de l'arithmétique est en classe de $5^{ème}$. La quasi disparation de l'arithmétique dans la période de la contre-réforme n'empêche qu'elle garde une place en classe de sixième (division euclidienne et critères de divisibilité). L'arithmétique va prendre une place très implorante dans la période actuelle.

Pour la deuxième institution, l'arithmétique n'est introduite officiellement en classe de Seconde qu'en 2000 avec les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers.

Quant aux niches que l'arithmétique occupe dans l'évolution des programmes de 1902- 2010 :
- Dans la période classique (1902- 1968), deux niches sont assignées à l'arithmétique : la niche « théorie des nombres » et la niche de « calcul numérique ».

- Dans la période des mathématiques modernes (1969- 1985), trois niches sont associées à l'arithmétique : niche « Ensembliste », niche « Théorie des nombres » et niche « calcul numérique ».

- Dans la période de la contre-réforme (1986- 1985), la niche « calcul numérique » de l'arithmétique reste timide.

- Dans la période contemporaine (1996- 2010) : trois niches sont y attribuées : mettre en avant l'aspect algorithmique des mathématiques, et la niche « calcul numérique » et enfin, la niche culturelle. L'aspect algorithmique de l'arithmétique est la niche prédominante dans les programmes de l'enseignement secondaire. Ceci est en contradiction avec le nouveau programme de Seconde qui voit la disparition de l'arithmétique, alors qu'il met un fort accent sur l'algorithmique.

Concernant les organisations mathématiques, l'étude de la décomposition en facteurs premiers est faite avant de l'étude du PGCD et du PPCM dans les programmes de la période classique et la période des mathématiques modernes. Cette organisation est changée à la réintroduction de l'arithmétique dans les programmes de 1999 en Troisième pour donner lieu au travail algorithmique.

CHAPITRE V

Analyse écologique de manuels de 1969- 2010

Introduction

L'analyse écologique des programmes d'arithmétique depuis 1902 nous a permis d'identifier l'habitat et les niches occupées par l'arithmétique durant l'évolution des programmes dans deux institutions : au collège et en seconde. Pour mieux identifier le rapport institutionnel, il nous faut compléter l'analyse des programmes par le bais d'une analyse des manuels. Nous cherchons alors à répondre aux questions suivantes : Comment les grandes tendances des programmes sont-elles mises en œuvre par les auteurs des manuels? Quel est *l'écart* entre les intentions des programmes et l'application de ces intentions dans les manuels ? Quelles libertés ont pris les auteurs de manuels par rapport aux contraintes institutionnelles (programmes et le cas échéant documents d'accompagnement des programmes) ?

Le point de vue de l'écologie du savoir nous apporte des éléments qui peuvent être considérés comme un outil d'analyse. Ainsi, nous allons chercher les habitats ou « les différents lieux » de vie de l'arithmétique et les niches occupés par l'arithmétique dans les manuels.

Nous avons choisi d'analyser trois manuels du collège et de Seconde dans chaque période : période des mathématiques modernes, période de contre-réforme et période contemporaine pour mettre en évidence l'évolution de l'arithmétique dans les manuels.

Nous nous intéressons ici à l'analyse écologique des contenus de cours avec activités introductrices et points méthodes ; la partie exercices des manuels sera analysée dans le cadre d'une analyse praxéologique.

I. Manuels de collège

I.1 Les manuels de la période des mathématiques modernes

Les manuels choisis de la période des mathématiques modernes : Bordas (collection Cossart et Théron), Classiques Hachette Brédif livre et Nathan Afrique collection I.R.E.M. Dakar. Dans nos analyses, nous indiquerons respectivement Bordas, Hachette, Nathan.

- En classe de $6^{\text{ème}}$, les manuels de Bordas et de Hachette sont édités en 1969, alors que l'édition de Nathan l'est en 1974

- En classe de $5^{\text{ème}}$, les manuels de Bordas et de Classiques Hachette sont édités en 1970, alors que l'édition de Nathan l'est en 1975,

- En classe de 4ème, les manuels de Bordas et de Classiques Hachette sont édités en 1971 alors que l'édition de Nathan l'est en 1976,

- En classe de 3ème, les manuels de Bordas et de Classiques Hachette sont édités en 1972 alors que l'édition de Nathan l'est en 1977.

L'analyse des programmes montre que le contenu d'arithmétique est proposé en classe de 5ème. Il s'agit de l'étude des notions suivantes :

Ensemble des multiples d'un nombre.

Division euclidienne d'un nombre naturel par un nombre naturel.

Diviseur d'un nombre naturel.

Nombres premiers.

Sur des exemples : pratique de la décomposition d'un nombre naturel en produit de facteurs premiers.

Exercices sur les multiples communs et diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres naturels.

Nous avons donc choisi de mener dans un premier temps une analyse écologique des manuels en classe de 5ème pour étudier la vie de l'arithmétique (habitats et niches occupées dans cette classe). Dans un deuxième temps, nous allons chercher la vie de l'arithmétique dans d'autres niveaux du collège. Autrement dit, nous allons repérer si les manuels proposent des éléments de l'arithmétique en classe de 6ème, et s'ils reprennent en classes de 4ème et 3ème l'étude de l'arithmétique comme outil et comme objet.

I.1.1 Analyse écologique des manuels en classe de 5ème

Pour mener ce travail, nous avons choisi d'étudier chaque notion de l'arithmétique à part, ceci ne signifie évidemment pas que nous considérons ces concepts de manière isolée. Nous allons présenter ces notions selon l'organisation mathématique proposée par les programmes de cette période, c'est-à-dire suivant l'ordre suivant : (1) – Divisibilité, (2) – Division euclidienne, (3) – Nombres premiers, (4) – Décomposition en facteurs premiers, (5) – Plus petit multiple commun (PPCM), (6) – Plus grand diviseur commun (PGCD).

En ce qui concerne la structure des manuels, les trois manuels ont une structure traditionnelle. Chaque chapitre est composé de deux parties : la partie Cours - lieu des présentations théoriques- et la partie exercices - lieu des exercices et des problèmes aux élèves.

Le contenu d'arithmétique chez Hachette est proposé dans trois chapitres : le premier chapitre est intitulé « Multiple. Division euclidienne », le deuxième est intitulé « Diviseurs. Nombres premiers », ce chapitre est divisé en trois parties :

I. Diviseurs d'un entier naturel non nul.

II. Nombres premiers.

III. Décomposition en produit de facteurs premiers.

Le troisième chapitre est appelé « Applications des nombres premiers ». Il comporte les parties suivantes :

I. Reconnaître un multiple et un diviseur d'un nombre.

II. Plus petit multiple commun à plusieurs nombres.

III. Plus grand diviseur commun à plusieurs nombres.

A la fin de chaque chapitre, Hachette propose un résumé de la partie Cours, ensuite il propose la partie Exercices.

Bordas et Nathan proposent un chapitre intitulé « Arithmétique » divisé en sous–chapitres.

Chez Nathan, le chapitre d'arithmétique est divisé en 7 sous-chapitres, chacun comportant une partie consacrée au cours et une autre réservée à la partie Exercices. Les titres des sous-chapitres sont les suivants :

1. Multiple d'un entier naturel.
2. Diviseurs.
3. Division euclidienne.
4. Entiers naturels premiers.
5. Décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers.
6. Diviseurs communs à deux ou plusieurs entiers naturels, Plus Grand Diviseur Commun.
7. Multiples communs à deux ou plusieurs entiers naturels, Plus Petit Multiple Commun.

Chez Bordas, le chapitre « Arithmétique » est découpé en quatre sous-chapitres principaux :

1. Multiples et diviseurs d'un nombre.
2. Nombres premiers.
3. Multiple communs à deux ou plusieurs nombres.
4. Diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres.

La division euclidienne se trouve dans le premier sous-chapitre, et la décomposition en facteurs premiers dans le second avec les nombres premiers.

La partie Exercice est proposée à la fin de l'étude de l'ensemble ces objets.

Ainsi, l'habitat de l'arithmétique est indépendant dans les manuels, l'intitulé des chapitres et sous-chapitres consacrés aux notions d'arithmétique permet d'identifier la niche « Théorie des nombres » de l'arithmétique. Pour identifier les autres niches que l'arithmétique occupe dans les manuels, nous allons étudier les notions d'arithmétique dans la partie Cours, selon l'organisation annoncée plus haut.

1. La relation de divisibilité

La relation de divisibilité prend une place relativement importante dans les manuels. Ils proposent tout d'abord l'étude de multiple d'un nombre, en présentant l'ensemble des multiples d'un entier naturel donné, et proposent ensuite une définition de multiple d'un nombre de la manière suivante :

> *« Dire que le naturel a est un multiple du naturel b signifie qu'il existe un naturel q tel que : a = bq. » (Nathan, P.72)*

Les notions ensemblistes sont introduites lors de l'étude de la relation de divisibilité : Hachette et Nathan montrent qu'il y a une fonction entre N (ensemble des naturels) et M(b) (ensemble des multiples d'un nombre donné b) : M(b) présente l'ensemble des images des éléments de N par la fonction « multiplier par b ».

Bordas et Nathan choisissent de montrer que la relation « est multiple de » est une relation d'ordre, alors que ce n'est pas le cas chez Hachette.

Hachette se singularise des deux manuels précédents en faisant le choix de démontrer trois propriétés des multiples d'un entier naturel :

> *« 1. Tout multiple d'un multiple d'un entier naturel non nul est un multiple de cet entier.*
>
> *2. La somme de deux multiples d'un entier naturel non nul est multiple de cet entier.*
>
> *Si elle existe, la différence de deux multiples d'un entier naturel non nul est un multiple de cet entier.*
>
> *3. Le produit de deux multiples d'un entier naturel non nul est un multiple de cet entier. »*
>
> *(Hachette, p.110-111)*

En ce qui concerne la notion de diviseur, les trois manuels donnent une définition de diviseur d'un nombre. Bordas donne une *Définition équivalente*. Il définit le diviseur d'un nombre à partir de la définition de multiple de la façon suivante :

> *« Si y est un multiple de x, on dit que x est un diviseur de y »*

Hachette donne une définition du diviseur d'une façon similaire à la définition de multiple.

> *« Dire que le naturel b est diviseur du naturel a signifie qu'il existe un naturel q et un seul tel que : a = b q » (Nathan p.79).*

Les deux définitions précédentes sont présentes chez Nathan.

Dans les trois manuels, on montre que la relation « est diviseur de » est une relation d'ordre vérifiant les conditions suivants :

- *La réflexivité : a | a.*
- *L'antisymétrie : « si a divise b, et si b divise a, alors a = b ».*
- *La transitivité : « si a divise b, et si b divise c, alors a divise c ».*

Hachette choisit en outre de démontrer les trois propriétés ci-dessous pour le diviseur :

> *« 1.Un diviseur d'un entier naturel a est, au plus, égal à a.*
>
> *2 .Pour déterminer l'ensemble D(a), on peut essayer de diviser a par chacun des entiers successifs qui lui sont inférieurs, en gardant ceux qui donnent un quotient entier exact.*
>
> *3 .Dans l'ensemble N, si un nombre b est un diviseur commun aux nombres a et a_1, il este aussi diviseur de leur somme a +a_1 et, si elle existe, de leur différence a- a_1. » (Hachette, p118)*

Ce choix est absent chez Nathan et Bordas.

Nous constatons que le vocabulaire « être divisible par » est présent dans l'étude de la division euclidienne chez Nathan et Bordas, tandis qu'il est proposé chez Hachette après avoir défini la notion de diviseur d'un nombre de la manière suivante :

> *« On note : a = bq ; q = $\frac{a}{b}$ (q égale a sur b) ;*
> *b | a (b divise a)*
>
> *On remarque: dire que b divise a, c'est dire que a appartient à l'ensemble des multiples de b » (Hachette, p.116)*

Soulignons que les critères de divisibilité sont absents chez Bordas et Hachette. Au contraire, ils sont présents chez Nathan.

En résumé, les manuels consacrent une étude théorique assez riche de la notion de multiple et de diviseur. La notation ensembliste est un enjeu important pour l'étude de la relation de divisibilité dans ces manuels.

2. La division euclidienne

Les auteurs de manuels introduisent la division euclidienne par l'encadrement d'un entier naturel par deux multiples successifs d'un naturel non nul, en montrant les situations rencontrées par cette division et le vocabulaire associé, pour donner la forme suivante :

a = b q + r ; r ≠ 0 et r <b. L'existence et l'unicité du couple (*q*, *r*) sont explicitées chez Bordas et Nathan à la suite de la définition de la division euclidienne :

> *« a et b étant deux nombres entiers, on appelle quotient euclidien de a par b, b ≠ 0, le plus grand nombre entier q tel que : bq ≤ a.*

Quels que soient les entiers donnés a et b, ce nombre q existe et est unique. » (Bordas, p.103)

Le reste de la division euclidienne fait l'objet d'une définition chez Bordas et Hachette :

> *« On appelle reste de division euclidienne de a par b la différence de a et du plus grand élément de E » (Hachette, P.112)*

alors que chez Nathan le terme est introduit sur un exemple. Mais il propose une définition du quotient de la façon suivante :

> *« Le quotient euclidien de a par b est le plus grand naturel dont le produit par b est inférieur ou égal à a. » (Nathan, p.84)*

Enfin Bordas et Nathan proposent une définition de la division euclidienne :

> *« Effectuer la division euclidienne de a par b c'est trouver le couple (q, r), q est le quotient euclidien et r le reste euclidien de la division euclidienne de a par b. »*
>
> *(Nathan, p.84)*

Bordas met l'accent sur les deux sens du terme « diviseur » qu'il faut distinguer dans la division :

« Le mot « diviseur » a deux sens bien précis qu'il faut savoir distinguer :

a) Le nombre x est le « diviseur dans une division euclidienne

(…) (3 est le diviseur de la division euclidienne de 5 par 3)

b) Le nombre x est un diviseur du nombre y » (Bordas, p105)

Nous remarquons que Bordas utilise des vocabulaires informels pour distinguer les cas où le reste de la division euclidienne est nul ou non.

« Lorsque la division de a par b « tombe juste » on a le schéma suivant :

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} \dots & \\ 0 & q \end{array} \qquad a = b\,q.$$

Lorsque la division de a par b « ne tombe pas juste » on a le schéma suivant :

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} \dots & \\ r & q \end{array} \qquad \text{avec} \quad a = b\,q + r \ \text{ et } 0 < r < b.$$

(Bordas, p.105)

La situation et les vocabulaires de la division euclidienne sont bien explicités dans les manuels analysés.

3. Les nombres premiers

Les manuels utilisent la notation ensembliste pour définir les nombres premiers, en particulier Nathan qui propose la définition de l'ensemble des nombres premiers avant de définir les nombres premiers de la manière suivante :

> *« Le sous-ensemble de N formé des naturels admettant deux diviseurs et deux seulement est un sous-ensemble important appelé ensemble des nombres premiers. » (Nathan, p.93)*

Bordas introduit aussi le terme ensembliste dans la définition de nombres premiers :

> *« Un nombre a est premier si l'ensemble Da de ses diviseurs a deux éléments : Da = {1, a} »*

La définition des nombres premiers est suivie dans Bordas et Hachette de la propriété de nombres non premiers :

> *« Si un nombre supérieur à 1 n'est pas premier, il a au moins un diviseur premier. »*
>
> *(Hachette, p122)*

Pour reconnaître si un nombre est premier, Bordas et Hachette proposent les méthodes suivantes :

1) Si un nombre A différent de 1 n'est divisible par aucun des nombres premiers qui lui sont inférieurs, il est premier.

2) Utiliser la table des nombres premiers (table d'Eratosthène).

3) Méthode des divisions en utilisant la règle suivante :

> *« Si on n'a pas encore obtenu un reste nul quand le quotient devient inférieur au diviseur on arrête la suite des divisions : on est certain que le nombre étudié est premier. » (Bordas, P.109)*

Alors que Nathan présente seulement la table de nombres premiers pour reconnaître les nombres premiers.

4. La décomposition en facteurs premiers

Dans les manuels analysés, la décomposition en facteurs premiers est étudiée avant les notions de multiple commun et de diviseur commun. Ce choix est justifié par le fait que la recherche de PGCD et PPCM est axée autour de la décomposition en facteurs premiers.

Deux techniques sont proposées dans les manuels pour effectuer la décomposition d'un nombre non premier :

- factoriser le nombre dans les cas où le calcul est facile à faire mentalement.

- La technique de la division euclidienne qui consiste à diviser par les nombres premiers successifs en utilisant un trait vertical de manière à former deux colonnes, dans la colonne de droite tous les diviseurs premiers utilisés ; dans celle à gauche tous les nombres à décomposer et les quotients successifs obtenus.

Ou par le dessin « l'escalier » qui est proposé par Bordas.

L'unicité de la décomposition en facteurs premiers est présentée dans les manuels sans démonstration. Bordas appelle les facteurs de la décomposition d'un nombre « facteurs élémentaires ».

Nathan propose de présenter l'ensemble des diviseurs d'un nombre naturel après l'avoir décomposé en facteurs premiers sur un treillis[1], comme dans l'exemple ci-dessous :

Exemple : Ensemble des diviseurs de 675 sont :

$$\begin{array}{r|l} 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$675 = 3^3 \times 5^2$

675 admet deux diviseurs premiers 3 et 5, il faut donc deux directions de « flèches » partant de 1

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 9 \arrow[r] \arrow[d] & 27 \arrow[d] \\ 5 \arrow[r] \arrow[d] & 15 \arrow[r] \arrow[d] & 45 \arrow[r] \arrow[d] & 735 \arrow[d] \\ 25 \arrow[r] & 75 \arrow[r] & 225 \arrow[r] & 675 \end{tikzcd}$$

D_{675} = { 1,3,5,9,15,25,25,27,45,75,135,225,675} (Nathan, p(98))

[1] En mathématiques, un treillis est un ensemble ordonné dans lequel chaque couple d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure.

5. Le Plus Petit Multiple Commun (PPCM)

Conformément aux programmes, le PPCM est axé autour des nombres premiers dans les manuels. Bordas et Hachette choisissent de proposer d'abord la notion de multiple d'un nombre décomposé en produit de facteurs premiers, et donnant une règle qui précise à quelle condition un nombre donné *b* est multiple d'un nombre donné *a* :

> *« Dans l'ensemble N, pour que un multiple d'un nombre b, a et b supérieur à 1, il faut et il suffit que la décomposition de b en facteurs premiers contienne au moins tous les facteurs premiers qui figurent dans la décomposition de a avec, pour chacun, un exposant égale ou supérieur. » (Hachette, p.133)*

Le PPCM est présenté en termes ensembliste dans les manuels ; il s'agit de déterminer l'intersection de *M(a) et M(b) ;* en particulier, Hachette définit le plus petit multiple commun de la manière suivante :

> *« Pour trouver des multiples communs à plusieurs nombres a, b, c supérieurs à 1, on écrit les premiers termes des ensembles M(a), M(b), M(c), puis les premiers éléments de l'ensemble :*
>
> *$M(a) \cap M(b) \cap M(c)$ Le plus petit terme de cet ensemble intersection s'appelle le plus petit multiple commun aux nombres a, b et c, en abrégé PPCM. »*

Alors que Nathan propose une définition du PPCM de la façon suivante :

> *« Parmi les multiples communs à deux naturels, il en existe un différent de 0 et plus petit que tous les autres, c'est le ppcm de a et de b. » (Nathan, p104)*

Pour la recherche du PPCM de deux entiers naturels, les auteurs des manuels présentent la règle associée à la décomposition en facteurs premiers sur des exemples résolus ; Bordas indique la méthode générale en langue naturelle :

> *« Soit M un multiple commun à deux nombres A et B tous deux différents de 1 :*
>
> *1° Dans la décomposition de M on retrouve chacun des facteurs élémentaires des décompositions de A et de B.*
>
> *2° L'exposant d'un facteur élémentaire dans la décomposition de M ou dans celle de B est inférieur ou égale à l'exposant de ce même facteur élémentaire dans la décomposition de M. »*
>
> (Bordas, p.115)

Par ailleurs, une autre technique est proposée par Nathan pour déterminer le PPCM. Il s'agit de la technique qui consiste à représenter l'ensemble des diviseurs d'un multiple commun à deux nombres dans les treillis.

6. Le plus Grand Diviseur Commun (PGCD)

Les manuels analysés proposent également la notion de diviseur commun pour les nombres décomposés en facteurs premiers. Comme nous l'avons déjà dit, ce choix est justifié par l'intention de mettre en avant la décomposition en facteurs premiers.

La notation ensembliste est aussi utilisée pour définir le PGCD : on considère l'intersection des ensembles de diviseurs D(a) et D(b) ; le plus grand élément de cet ensemble intersection s'appelle le plus grand diviseur commun aux nombres a et b.

Nathan donne une définition du PGCD de deux nombres de la manière suivante :

> *« Parmi les diviseurs communs à deux naturels a et b, il en existe un plus grand que tous les autres, c'est le pgcd de a et b. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de leurs pgcd. »*

Il faut noter que dans cette définition, les deux ordres - ordres naturel et divisibilité – sont explicitement pris en compte, tandis que Hachette présente la définition du PGCD de plusieurs nombres entiers à l'aide de la décomposition en facteurs premiers, sans référence explicite à aucun des deux ordres:

> *« L'ensemble des diviseurs communs à plusieurs nombres entiers naturels supérieurs à 1 est le produit des facteurs premiers communs aux décompositions de ces entiers avec, pour chacun, le plus petit exposant sous lequel il y figure. »*

Les auteurs des manuels proposent la décomposition en facteurs premiers pour la recherche du PGCD de deux naturels par des règles et des exemples détaillés.

> *« Recherche du p.g.c.d de deux naturels a et b.*
>
> *a) On décompose a et b en produits de facteurs premiers.*
>
> *b) Le p.g.c.d cherché est le produit des diviseurs premiers communs aux deux naturels, chacun d'eux étant pris avec le plus petit exposant figurant dans la décomposition en facteurs premiers de a et de b. » (Nathan, P.101)*

Pour conclure, nous pouvons dire que la partie théorique de l'arithmétique prend une place importante en classe de 5ème, ce qui justifie la niche « Théorie de nombres » de l'arithmétique. En outre, cette partie théorique est traitée à l'aide des notions ensemblistes, ceci donne une deuxième niche de l'arithmétique dite « niche ensembliste ». La partie « Exercices » en fin de chapitre propose des exercices d'application des notions d'arithmétique, ce qui permet de faire vivre la niche « Calcul numérique » de l'arithmétique.

Dans le paragraphe suivant, nous allons examiner si les notions que nous venons d'étudier sont présentées comme outil ou même comme objet dans les classes autres que la classe de 5ème.

I.1.2 Analyse écologique des manuels en classe de 6ème, 4ème et 5ème

Du fait que les programmes de 1970 ne donnent aucune place au travail sur les fractions, les notions de PGCD et PPCM ne sont pas réinvesties dans le travail sur les fractions chez Bordas. Elles prennent une place marginale en classe de 3ème chez Hachette, qui propose une définition de la fraction de la manière suivante :

> *« On appelle fraction tout élément d'une classe d'équivalence déterminée par la relation R` dans Z × Z*. » (Hachette, p27)*

Il propose le PPCM pour réduire au même dénominateur lorsque il s'agit de rapports rationnels qui sont formés à partir d'éléments de Z × Z*.

> *« Pour réduire à un même dénominateur des rapporte rationnels. On peut prendre comme dénominateur commun le PPCM des valeurs absolues de leurs dénominateurs. »*
>
> *(Hachette, p41)*

Chez Bordas, la somme de deux rapports rationnels, qui s'appuie sur la technique du PPCM pour réduire au même dénominateur, est précédée par l'étude des structures. Ceci permet de vivre la niche structurelle de l'arithmétique.

Par contre, chez Nathan[2], conformément aux programmes de 1976 qui donnent une place importante au travail sur les fractions, nous trouvons en classe de 4ème un chapitre intitulé « Simplification de quotients » dans lequel il propose le PGCD pour simplifier les fractions ; il propose ensuite un autre chapitre sous l'intitulé « Réduction de quotients au même dénominateur », dans lequel il propose le PPCM pour réduire au même dénominateur.

Il comporte aussi en classe de 3ème un chapitre intitulé « Calculs sur les quotients » dans lequel il propose le PGCD comme outil pour obtenir une fraction irréductible, et le PPCM pour réduire au même dénominateur.

Ainsi, l'habitat de l'arithmétique relative aux entiers se trouve en 5ème avec trois niches : « Théorie des nombres » ; « Calcul numérique » et « Ensembliste ». En classe de 4ème et 3ème, on trouve une quatrième niche : la niche « Structurelle ».

I.2 Les manuels de la période contre-réforme

Les manuels de la période de la contre-réforme que nous avons analysés sont : Hachette collège, Hatier collection Pythagore et Bordas collection Durrande. Dans nos analyses, nous indiquerons respectivement Hachette, Hatier et Bordas.

[2] Le manuel de quatrième de Nathan que nous avons analysé a été publié en 1976 comme indiqué en introduction du chapitre.

Nous avons étudié les manuels édités en1990 pour la classe de 6° chez Hachette et Hatier, et en 1986 chez Bordas. Pour les classes de 5°, les trois manuels sont édités en 1987. En classe de 4°, ils sont édités en 1988, et en 1989 pour la classe de 3°.

Comme nous l'avons déjà dit dans le chapitre précédent, la période de la contre-réforme voit la disparition de l'arithmétique des programmes. Les nombres premiers, la décomposition en facteurs premiers, le PGCD, le PPCM ne sont plus des objets d'étude dans les programmes du collège. L'enseignement de l'arithmétique dans cette période est limité à l'étude de la division euclidienne et à la relation de divisibilité en classe de 6ème.

Nous allons voir à présent comment la directive des programmes est mise en œuvre par les auteurs des manuels par rapport à la disparition de l'arithmétique. Est-ce que les manuels montrent une certaine résistance vis-à-vis de cette disparition ? Est-ce que les notions de l'arithmétique qui ont disparu des programmes du collège continuent à vivre dans les manuels comme objet d'étude et comme outil ?

L'analyse écologique des deux parties « Activités et Cours » nous permet d'apporter des éléments de réponses à ces questions. Les manuels analysés pour cette période ont une structure différente. En général, trois rubriques se trouvent dans ces manuels :

- Activités : elles permettent de motiver l'introduction et la découverte de notions principales du cours, sous forme de problèmes « concrets » à résoudre. C'est le moment de la première rencontre avec les notions visées par le chapitre.

- Cours : les auteurs donnent les définitions et les propriétés des différentes notions à retenir. Cette rubrique correspond au moment de l'institutionnalisation.

- Exercices.

C'est dans le chapitre intitulé «Les entiers naturels, la division » que la relation de divisibilité et la division euclidienne sont traitées chez Bordas en classe de 6ème ; on trouve ces deux notions dans le chapitre intitulé « Diviser » chez Hachette, tandis que chez Hatier, elles sont présentées dans un chapitre intitulé « Multiplications et Divisions ».

Pour étudier les notions d'arithmétique nous allons suivre la même organisation que celle retenue pour la période des mathématiques modernes.

1. La relation de divisibilité

La relation de divisibilité est désormais étudiée en classe de sixième. Elle est proposée à l'aide des exemples dans les manuels. Hatier consacre, dans la partie « L'essentiel », une rubrique intitulée « Vocabulaire » dans laquelle la relation de divisibilité est bien présentée. La notion de multiple est définie en termes de multiplication, alors que la relation de divisibilité est proposée en terme de division.

C’est aussi le cas de Hachette qui met l’accent sur la divisibilité qui est présentée comme un cas particulier de la division euclidienne quand le reste est nul.

Bordas se singularise des deux manuels précédents en introduisant la définition de multiple et de diviseur dans la partie « Cours » sous la rubrique « Multiple et Diviseur ». Il propose deux définitions de la notion de diviseur ; la première est proposée à partir de la définition de multiple:

> *« Un entier non nul b est un diviseur d’un entier a si a est un multiple de b. On dit alors que a est divisible par b »*

La deuxième définition est proposée en termes de multiplication :

> *« Un entier non nul b est un diviseur d’un entier a s’il existe un nombre entier q tel que a = b × q ». (Bordas, p38)*

Les critères de divisibilité sont proposés par Hatier et Bordas après avoir présenté le vocabulaire : multiple ; divisible ; diviseur. Tandis que Hachette les présente après la division euclidienne.

En classe de $5^{\text{ème}}$, chez Hachette, les critères de divisibilité sont repris dans un chapitre intitulé « Nombres en écriture fractionnaire » pour simplifier les fractions.

Ainsi, nous trouvons que la divisibilité est un enjeu important dans les manuels de $6^{\text{ème}}$ dans cette période. La relation de divisibilité est bien explicitée.

2. La division euclidienne

Ni Hachette, ni Hatier ne donne une définition de la division euclidienne.

Hatier est assez bref dans la partie « Cours » sur la notion de la division euclidienne, qui est présentée sous le nom « Division avec des entiers » par le vocabulaire et la relation associée : (Dividende = Diviseur × Quotient entier + Reste ; Reste < Diviseur), suivi par un exemple résolu.

De même, Hachette présente le vocabulaire et la technique de la division euclidienne sur un exemple avec des explications sur la manière de chercher le quotient entier de a par b.

Par contre, Bordas donne une définition de la division euclidienne, et démontre que $0 \leq r < b$.

Deux technique sont proposées par Bordas :

1 : technique de la division traditionnelle.

2 : technique d’encadrement d’un entier entre deux multiples consécutifs du diviseur ; cette technique se divise en deux étapes :

1) Détermination du chiffre des dizaines qui s’obtient en divisant le nombre de dizaines du dividende par le diviseur

Exemple : soit à diviser 825 par 23

$23 \times 3 < 82 < 23 \times 4$

$69 < 82 < 92$

$82 – 69 = 13$

Donc le quotient entier de 82 par 23 est 3 et le reste est 13 dizaines.

2) Détermination du chiffre des unités :

Les 13 dizaines restantes et les 5 unités forment le nombre 135.

$23 \times 5 < 135 < 23 \times 6$

$115 < 82 < 138$

$135 – 115 = 20$

Donc le quotient entier de 825 par 23 est 35 et le reste est 20.

Hachette utilise un vocabulaire informel « ça tombe juste » pour signaler que le reste de la division euclidienne est zéro.

En résumé, sur les trois manuels utilisés, seul Bordas a maintenu la partie théorie associée à la division euclidienne, qui a disparu des deux autres manuels.

3. Les nombres premiers

Conformément à l'esprit du programme de la période de la contre-réforme, aucun des manuels analysés ne propose les nombres premiers au collège.

4. La décomposition en facteurs premiers

Le changement de programme de 1985, fait aussi disparaître la décomposition en facteurs premiers des programmes et des manuels au collège.

5. Le Plus Petit Multiple Commun (PPCM)

Dans la période de la contre-réforme (1985-1996), l'étude du PPCM ne fait plus partie des contenus d'enseignement. Cependant, il est introduit dans les manuels, en quatrième, à l'aide d'exemples pour la réduction de fractions au même dénominateur.

Par ailleurs, chaque manuel a sa façon de proposer le multiple commun. Bordas propose le multiple commun en classe de $4^{ème}$ dans un chapitre intitulé *« Nombres relatifs : addition et soustraction* » Il montre dans la partie « Activités » par un exemple la méthode consistant à identifier le plus petit élément de la liste des multiples communs aux deux nombres. Dans la partie « Cours », le multiple commun est proposé à l'occasion d'exercices pour réduire au même dénominateur. En ce qui concerne Hachette, il donne une place importante au PPCM. Il propose cette notion comme outil en classe de $4^{ème}$ sous l'intitulé « Un point de méthode » dans la rubrique « écritures fractionnaires quelconques » pour réduire au même dénominateur :

> *« Pour obtenir le multiple commun le plus petit possible, on peut procéder ainsi : on prend le plus grand des deux nombres et l'on écrit (ou l'on imagine…) ses multiples successifs en s'arrêtant dès que l'on trouve un multiple du plus petit. » (Hachette, 41)*

Dans Hatier, la notion de multiple commun prend une place plus importante que dans Bordas et Hachette. Il est proposé comme outil dès la classe de cinquième dans la partie « Activité » sous une rubrique « Multiple et diviseur communs » qui propose d'abord des exercices sur le vocabulaire de multiple commun et diviseur commun, et ensuite des exercices sur l'addition des fractions en utilisant le plus petit multiple commun comme une technique. En classe de quatrième, Hatier propose le multiple commun dans la partie « L'essentiel » à l'aide d'exemples pour la réduction au même dénominateur.

Le choix des auteurs de manuels pour l'introduction de la notion de multiple commun dans la partie « Cours » ne permet pas de faire vivre la niche « Théorie des nombres ». En effet, ces choix sont plutôt en faveur d'un travail sur le calcul numérique. A aucun moment les manuels ne donnent de définition du PPCM dans la partie « Cours » ; cette notion est présentée comme une technique permettant d'accomplir des tâches concernant la réduction d'une fraction au même dénominateur et la simplification sans avoir une technologie qui justifie cette technique.

Bien que la notion de PPCM soit hors programme, l'analyse des manuels montre que le PPCM est proposé comme outil en classe de $4^{ème}$ pour réduire au même dénominateur.

5. Le Plus Grand Diviseur Commun (PGCD)

L'étude de la notion de diviseur commun ne fait plus partie des contenus d'enseignement. Cependant, les auteurs des manuels introduisent le PGCD comme outil en classe de $4^{ème}$ pour simplifier des fractions. Mais le choix fait par les auteurs des manuels pour proposer le PGCD est différent selon les collections.

Hatier introduit la notion de diviseur commun par des exercices pour simplifier des fractions dans la partie « L'essentiel » du chapitre *« Opérations sur les fractions »*. C'est dans la définition de fraction irréductible que le diviseur commun est proposé chez Bordas dans la partie « Cours » :

> *« Une fraction est irréductible si ses deux termes n'ont pas de diviseurs communs autres que un. » (Bordas, p130)*

Hachette propose une méthode de réduction au même dénominateur en classe de $5^{ème}$ dans la partie « Pour résoudre des problèmes » de la manière suivante :

«Méthode : Pour simplifier une fraction, il faut trouver des diviseurs communs du numérateur et du dénominateur. » (Hachette, p51)

Comme pour le PPCM, les choix faits par les auteurs des manuels pour l'introduction de la notion de diviseur commun dans la partie « Cours » ne permettent pas de faire vivre la niche « théorie des nombres » ; ces choix sont plutôt en faveur d'un travail sur le calcul numérique.

En conclusion, les deux niches « ensembliste » et « théorie des nombres » ne sont plus viables dans les manuels. La seule niche qui reste pour l'arithmétique dans les manuels de cette période que nous avons analysés est la niche « Calcul numérique », par le bais d'un travail sur les fractions pour les simplifier ou les réduire au même dénominateur.

I.3 Les manuels de la période contemporaine

Comme nous l'avons déjà vu, l'arithmétique dans cette période est réintroduite dans les programmes de collège, plus précisément, en classe de 3ème. Nous cherchons à répondre aux questions suivantes : Comment les auteurs des manuels ont-ils réintroduit ce nouvel objet dans les manuels ? Les niches que l'arithmétique occupe dans les manuels sont-elles les mêmes que celles que nous avons identifiées dans les programmes ?

Nous avons tenté de suivre pour cette période les mêmes collections que celles des manuels étudiés dans la période de la contre-réforme, pour savoir comment les auteurs des manuels, qui avaient montré une certaine résistance devant la suppression des notions d'arithmétique des programmes, vont mettre en place les nouveaux programmes et introduire l'arithmétique dans leurs manuels. Ainsi, les manuels étudiés ici sont les suivants : Hachette éducation collection cinq sur cinq, Hatier collection Pythagore, Bordas[3]. Nous avons étudié les manuels à un moment où les programmes sont mis en place tout au long du collège. Les manuels analysés en classe de 6° sont conformes aux nouveaux programmes de1996, en 1997 pour la classe de 5° (pour les trois manuels) ; en 1998 pour la classe de 4° (pour les trois manuels), et en 1999 pour la classe de 3° (pour les trois manuels). Dans nos analyses, nous indiquerons respectivement Hachette, Hatier et Bordas.

En général, les manuels sont organisés en chapitres ayant une structure identique comportant quatre rubriques : « Activités » ; « Cours » ; « Méthodes » et « Exercices ».

Pour identifier l'habitat de l'arithmétique dans les manuels, nous allons voir d'abord les chapitres avec lesquels l'arithmétique se présente comme objet / outil dans chaque classe de collège.

- C'est en classe de 6^{e} que sont étudiées la division euclidienne et la divisibilité. Ainsi, les manuels proposent un chapitre pour présenter ces notions comme objet d'étude. Ces notions

[3] Nous avons gardé la même collection pour Hachette et Hatier, alors qu'il était difficile de suivre la même collection Bordas que précédente pour toutes les classes de collège, nous avons cependant gardé la même édition dans cette période.

sont proposées chez Hachette dans un chapitre intitulé : *« Diviser un décimal par un entier »,* et chez Hatier sous le titre : *«Multiplications et Divisions ».* Mais Hatier propose un autre chapitre intitulé *« Fractions »* dans lequel la divisibilité et les critères de divisibilité sont un outil pour simplifier les fractions. En ce qui concerne Bordas, il propose la division euclidienne dans un chapitre intitulé *« Multiplication et Division »,* et les critères de divisibilité dans un autre chapitre intitulé *« Quotient de deux nombres entier »* pour le travail sur les fractions.

- En classe de 5^{e}, aucune place n'est réservée aux notions arithmétiques comme objet d'étude. Les manuels proposent les critères de divisibilité comme outil pour simplifier les fractions. Bordas présente un seul chapitre *« Calcul fractionnaire »* portant sur l'étude des multiples d'un nombre pour réduire des fractions au même dénominateur. Hatier proposent deux chapitres sur les fractions : l'un est intitulé *« Fractions : Comparaisons »* et l'autre intitulé *« Fractions : Opérations »,* quant à Hachette, il propose un chapitre intitulé *« Opérations en écriture fractionnaire ».*

- En classe de 4^{e}, on trouve la notion de multiple commun dans les manuels. Nous la trouvons chez Bordas dans un chapitre intitulé *«Nombres relatifs en écriture fractionnaire »,* chez Hachette dans le chapitre : *« Opérations (+, -, ×, ÷) en écriture fractionnaire »,* et chez Hatier sous le titre *«Fractions»* dans lequel il introduit les notions de diviseur commun et multiple commun.

- En classe de 3^{e}, nous trouvons le PGCD et les nombres premiers entre eux comme objet d'étude. L'arithmétique se présente chez Bordas dans un chapitre intitulé *«Nombres entiers. Nombres rationnels »,* chez Hachette dans un chapitre intitulé : *« Arithmétique, Les ensembles de nombres », et c*hez Hatier sous le chapitre intitulé *«Arithmétique».*

Le choix de Hachette et Hatier de proposer les nouveaux objets en 3^{e} sous l'intitulé « Arithmétique » permet de mettre en valeur la réintroduction de ces notions.

D'autre part, nous remarquons que l'habitat de l'arithmétique avec les fractions permet de faire vivre la niche « Calcul numérique » de l'arithmétique.

Nous allons dans ce qui suit étudier les notions d'arithmétique selon l'organisation proposée au début de ce travail.

1. La relation de divisibilité

En classe de 6ème, les choix faits par les manuels Hatier et Hachette publiés en 1996 dans la partie Cours sont identiques à ceux faits dans les manuels de 1985. Mais dans la partie Activités, Hatier propose les multiples d'un nombre et les critères de divisibilité à l'aide du crible d'Eratosthène, et il donne une définition de nombre premier sous l'intitulé « Le crible d'Eratosthène ». Ce choix est frappant par rapport à l'introduction officielle de la notion des nombres premiers fixée dans les programmes de Seconde.

Bordas introduit les critères de divisibilité dans le chapitre réservé aux fractions sous la rubrique « Simplifier une fraction ». Ceci met en évidence que l'objectif d'étudier les critères de divisibilité est de faire travailler des élèves sur la simplification des fractions.

2. La division euclidienne

Les choix faits par les manuels Hatier et Hachette publiés en 1996 sont identiques à ceux faits dans les manuels de 1985.

Bordas est le seul manuel qui définit la division euclidienne dans la partie « Le cours…les notions » sous l'intitulé « Définition » suivie d'un exemple par lequel il propose le vocabulaire de la division euclidienne et la relation $a = bq + r$ avec $r < q$. Dans la partie « Le cours…Les méthodes », la division euclidienne est présentée dans un exercice résolu et commentée dans l'objectif de maîtriser cette technique qui est en cours d'apprentissage en sixième.

3. Les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers

Nous présentons l'analyse de la réintroduction les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers dans les manuels dans le paragraphe consacré aux manuels de Seconde, car dans la période contemporaine ces deux notions sont introduites dans les programmes de Seconde.

4. Le Plus Petit Multiple Commun (PPCM)

La notion de multiple commun est introduite en classe de $4^{\text{ème}}$, pour réduire les fractions au même dominateur. Cette notion n'est pas traitée en tant qu'objet d'étude dans les manuels. Elle est proposée dans le cours sur un exemple résolu pour additionner deux nombres en écriture fractionnaire. Aucune définition ni aucune connaissance ne sont proposées à ce propos. Le sigle PPCM est absent dans les manuels.

Hachette présente dans le cours la technique de la recherche de multiple commun sous une rubrique « méthode », après avoir proposé un exemple résolu. Bordas propose un exemple résolu dans le Cours en explicitant une manière de rechercher un multiple commun à deux nombres : trouver les premiers multiples des deux nombres et prendre le premier multiple commun rencontré, sans mentionner que c'est le PPCM. Ce n'est pas le cas chez Hatier qui ne donne aucun commentaire sur la recherche d'un multiple commun ; on trouve, sous une rubrique intitulée « Méthodes », que pour réduire des fractions au même dénominateur *« on recherche un multiple commun aux dénominateurs, le plus petit possible de préférence* » sans montrer de technique pour le trouver.

C'est ainsi que les manuels proposent le PPCM implicitement sous l'intitulé *un multiple commun*. Nous nous demandons si les enseignants utilisent avec leurs élèves le terme PPCM, ou si cette notion reste implicite chez les enseignants et les élèves.

5. Le Plus Grand Diviseur Commun (PGCD)

Le PGCD est réintroduit dans les manuels de troisième en 1999. Les choix faits par les auteurs des manuels consistent à rappeler dans la partie « Activités » des éléments d'arithmétique déjà étudiés avant de proposer les notions qui sont en jeu dans ce chapitre. Hatier choisit de rappeler, dans la partie « Activités », le vocabulaire de diviseur et de multiple, les propriétés de la somme et de la différence de deux multiples d'un entier, et les critères de divisibilité au début de la partie cours, avant de traiter le PGCD. C'est aussi le cas de Hachette qui donne une définition du diviseur et des propriétés sur la somme et la différence de deux diviseurs d'un entier dans la partie « Revoir ». Quant à Bordas, il rappelle brièvement la division euclidienne et la notion de diviseur dans une rubrique intitulée « je sais déjà ».

Dans la partie réservée au cours, Hatier choisi d'introduire le PGCD dans le cours par un exemple sans donner de définition. Au contraire, Hachette propose une définition du PGCD suivie d'exemples mettant en évidence la première technique de la recherche des diviseurs communs à deux entiers. En ce qui concerne Bordas, il ne donne aucune définition de PGCD, mais il propose la propriété suivante :

> *« Les diviseurs communs à deux nombres entiers a et b sont les diviseurs du plus grand de ces diviseurs communs. » (Bordas, P.63).*

Conformément à l'esprit du programme, l'aspect algorithmique trouve une vie riche dans le cours des trois manuels. Hachette privilégie cet aspect dans son cours en montrant dans un commentaire qui vient après la définition du PGCD son intérêt :

> « *Le calcul du pgcd par la recherche des diviseurs communs est souvent très longue. La méthode des soustractions successives, ou celle des divisions successives, permet de répondre rapidement au problème. » (Hachette, p.70)*

Il met l'accent sur la démarche algorithmique dans la partie Méthodes : il propose deux exemples dont un exercice résolu à l'aide des soustractions successives suivi d'une règle qui peut être considérée comme une technologie permettant de justifier la technique de soustractions successives ; l'autre exemple porte sur l'algorithme d'Euclide ; il est suivi d'un discours technologique associé à cette technique. La démarche algorithmique est également assez présente chez Hatier et Bordas, elle est proposée dans deux exemples résolus de la partie Cours. Ces deux manuels mettent en avant la technique qui repose sur l'utilisation des critères de divisibilité pour déterminer si deux entiers sont premiers entre eux et rendre une fraction irréductible. Notons que la technique de soustractions successives est proposée exclusivement chez Hachette.

Aucune place n'est réservée à la démarche algorithmique avec l'outil informatique (tableur, calculatrice) dans les trois parties « Activités », « Cours » et « Méthodes ». Les manuels proposent l'utilisation du tableur dans la partie Exercice pour mettre en œuvre l'algorithme d'Euclide.

6. Nombres premiers entres eux

L'étude des nombres premiers entre eux est faite dans les manuels à la suite de l'étude du PGCD. Les manuels proposent une définition des nombres premiers entre eux et une définition pour les fractions irréductibles.

Pour reconnaître si deux nombres sont premiers entre eux, Bordas propose dans la partie « Méthodes », deux techniques :

- Utiliser les critères de divisibilités connus.
- Calculer le PGCD à l'aide de l'algorithme d'Euclide lorsque leur PGCD est égal à 1, conclure que les deux nombres sont premiers entre eux.

Les nombres premiers entre eux occupent une place importante dans les manuels pour rendre irréductibles les fractions.

I. 4 Les manuels des derniers programmes

Nous avons analysé les manuels de $6^{ème}$ et de $5^{ème}$ correspondant au dernier programme en vigueur (2008), mais pour les manuels de $4^{ème}$ et $3^{ème}$ nous nous somme limitée à analyser les manuels de la même collection pour les programmes de 2006 (pour la classe de $4^{ème}$) et de 2007 (pour la classe de $3^{ème}$), parce que les nouveaux programmes pour ces deux niveaux n'étaient pas encore mis en œuvre dans les manuels au moment où nous avons conduit cette étude. Les manuels choisis sont : Hatier collection Triangle, Hachette éducation collection Phare. Sésamath collection Mathenpoche.

- Manuels de $6^{ème}$, édition 2009, pour les trois manuels.

- Manuels de $5^{ème}$, édition 2010, pour les trois manuels.

- Manuels de $4^{ème}$, édition 2007, pour les trois manuels.

- Manuels de $3^{ème}$, édition 2008, pour les trois manuels.

Pour étudier l'habitat de l'arithmétique tout au long du collège, nous allons présenter le lieu où l'arithmétique se trouve dans les manuels analysés :

- En classe de $6^{ème}$: l'arithmétique se trouve dans deux chapitres dans les manuels : le premier chapitre propose la division euclidienne et la divisibilité comme objet d'étude et le deuxième chapitre traite l'arithmétique comme outil dans le travail sur les fractions. L'arithmétique fait l'objet d'un chapitre indépendant sous le titre *« Division »* chez Hachette et un autre chapitre intitulé *« Fractions ».* Les deux chapitres sont intitulés chez Hatier : *« Division et Problèmes », « Fractions et problèmes ».* Le manuel Sésamath propose un chapitre *« Opérations et nombres entiers »* et un autre chapitre intitulé *« Nombres fractionnaires ».*

- En classe de 5ème : deux chapitres sont proposés chez Hachette et Hatier portant sur la divisibilité et les critères de divisibilité pour simplifier des fractions. Un chapitre intitulé *« Nombres en écriture fractionnaire : sens »* et l'autre intitulé *« Nombres en écriture fractionnaire : Opérations »* chez Hachette, alors que Hatier propose un chapitre intitulé *« Fractions – Quotients »* et l'autre sous le titre « *Opérations sur les fractions* ». Concernant Sésamath, il propose un seul chapitre *« Nombres en écriture fractionnaire ».*

- En classe de 4ème : l'arithmétique se trouve dans le calcul fractionnaire avec la notion de multiple commun, dans un chapitre intitulé *« Nombres relatifs en écriture fractionnaire »* chez Hachette, sous le titre *« Ecritures fractionnaires »* chez Hatier. Concernant Sésamath, il propose un seul chapitre intitulé : *« Nombres en écriture fractionnaire ».*

- En classe de 3ème : l'arithmétique occupe une place indépendante dans les manuels. Elle est présente chez Hatier dans un chapitre intitulé *« Arithmétique et fractions »*, et chez Hachette dans un chapitre intitulé aussi *« Arithmétique ».* Concernant Sésamath, il propose un seul chapitre *« Nombres entiers et rationnels ».*

Nous trouvons que l'habitat de l'arithmétique avec les fractions permet de faire vivre la niche « Calcul numérique » de l'arithmétique.

Notons que Hatier propose au début du chapitre une introduction en soulignant l'intérêt de travail sur les entiers de la manière suivante :

> *« A l'école, au collège, on apprend à calculer avec les nombres entiers afin d'avoir des outils pour résoudre des problèmes de la vie courante. En 3°, on ira plus loin dans l'étude de ces objets mathématiques que sont les nombres entiers. On s'intéressera en particulier à leurs diviseurs. » (Hatier, 2008, p.7)*

Il donne ensuite un aperçu historique sur l'algorithme d'Euclide, ce qui permet de vivre la niche culturelle de l'arithmétique dans ce manuel, alors que les deux autres manuels ne donnent aucune introduction à propose de l'arithmétique.

Pour identifier les autres niches que l'arithmétique occupe dans les manuels, nous allons étudier les notions d'arithmétique tout au long du collège selon l'organisation proposée au début de l'analyse.

1. La relation de divisibilité

Comme nous l'avons vu la relation de divisibilité prend une place importante dans les programmes de cette période.

- En classe de 6ème : le programme en vigueur (2008) met la notion de multiple et de diviseur dans la colonne Connaissances. Nous prévoyons ainsi d'avoir des définitions dans les manuels pour ces deux notions. Mais l'analyse des manuels montre que le choix des manuels *pour* définir la divisibilité est différent. Les trois manuels définissent la divisibilité à partir de la division euclidienne dans le cas où le reste est nul.

Hatier donne une définition de multiple en langage naturel :

« Un multiple d'un nombre est obtenu en multipliant ce nombre par un entier ». (Hatier, P.53)

Hachette propose les vocabulaires : « être multiple de », « être divisible par », « être diviseur de », en termes de multiplication (a = b c) en montrant par un exemple que dans ce cas le reste de la division euclidienne est nul.

Le programme recommande que les différentes significations du mot diviseur soient explicitées. Les manuels traduisent cette exigence de manière différente. Hatier montre sous l'intitulé « Propriété » que les expressions suivantes ont la même signification : b est un diviseur de a ; a est multiple de b ; a est divisible par b. C'est aussi le cas de Sésamath qui propose ces expressions sur un exemple. Hachette utilise ces expressions équivalentes pour définir sur un exemple la relation de divisibilité ; il met en place l'exigence du programme en montrant que le terme diviseur a deux sens : diviseur d'un nombre entier (le reste de la division est zéro), et diviseur d'une division (le reste n'est pas nécessairement zéro).

Hachette se singularise des autres manuels par la définition des nombres pairs et impairs qu'il propose à l'aide de la divisibilité par 2:

« Les nombres entiers divisibles par 2 sont appelés nombres pairs. »

« Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 2 sont appelés nombres impairs. » (Hachette, P.81)

Les critères de divisibilité apparaissent chez Hachette et Hatier sous le titre « Propriétés ».

- En classe de $5^{ème}$, la divisibilité occupe également une place privilégiée dans les programmes. Cependant, elle n'est plus objet d'étude dans les manuels. Seul Hachette rappelle les critères de divisibilité dans la partie Cours pour le travail sur les fractions.

- En classe de quatrième, les critères de divisibilité sont utilisés comme outil pour simplifier les fractions et pour réduire les nombres en écriture fractionnaire au même dénominateur.

- En classe de troisième, les manuels reprennent la divisibilité pour traiter le PGCD. Hachette et Sésamath proposent dans la partie ''Cours'' les quatre expressions de la divisibilité :

- a est multiple de b.
- a est divisible par b.
- b est un diviseur de a.
- b divise a.

Hachette propose une propriété en annonçant que tout entier supérieur strictement à 1 admet au moins deux diviseurs : 1 et lui-même. Il rappelle les critères de divisibilité.

Par contre, aucun lieu n'est réservé à la divisibilité dans le Cours chez Hatier. Elle est uniquement proposée dans la partie « Activités ».

2. La division euclidienne

Le dernier programme ne mentionne plus la division euclidienne. Ainsi, aucune place n'est réservée pour la division euclidienne dans la partie Cours chez Hatier en classe de 6ème.

Au contraire, Hachette et Sésamath, en 6ème, donnent une place relativement importante pour la division euclidienne dans la partie Cours. Ils proposent le vocabulaire sur un exemple d'encadrement d'un nombre entre deux entiers multiples consécutifs du diviseur. Hachette propose la relation a = bq + r en langage naturel sous l'intitulé « Propriété » :

> *« Le dividende est égal au produit du quotient entier et du diviseur, auquel on ajoute le reste. Le reste est inférieur au diviseur. » (Hachette, p.80)*

En classe de 3ème, Hachette et Sésamath proposent une définition de la division euclidienne dans partie réservée au Cours d'arithmétique :

> *« Définition : a et b désignent deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$. Effectuer la division euclidienne de a par b signifie déterminer deux nombres entiers positifs q et r tels que :*
>
> *$a = b \times q + r$ et $r < b$.*
>
> *q s'appelle le quotient entier et r s'appelle le reste. » (Hachette, p.55)*

3. Les nombres premiers

Les programmes de 2007 introduisent les nombres premiers en classe de 3ème permettant de décomposer les nombres en facteurs premiers afin d'avoir une fraction irréductible. Deux des manuels analysés (Hachette et Hatier) introduisent cette notion dans le cours en proposant une définition des nombres premiers, alors que Sésamath ne réserve aucune place aux nombres premiers.

Comme nous l'avons déjà dit, les programmes de 2009 ne mentionnent plus les nombres premiers. Nous constatons cependant que Hachette et Hatier font l'étude des nombres premiers dans la partie réservée au Cours avant l'étude du PGCD.

Depuis 2009, les nombres premiers sont proposés en Seconde ; nous y reviendrons donc dans l'étude des manuels de seconde.

4. La décomposition en facteurs premiers

La décomposition en facteurs premiers a été proposée par les programmes de 2007 en classe de 3ème pour rendre irréductible les fractions dans des cas simples. En conformité avec les programmes, les manuels ne réservent aucune place dans la partie Cours à la décomposition en facteurs premiers comme objet. Hatier met en place cette nouvelle technique dans la partie « Méthode » en montrant qu'on peut simplifier une fraction en essayant de diviser mentalement la fraction par des nombres premiers 2, 3, 7,... .Hachette souligne que le calcul du PGCD n'est pas utile dans le cas où la décomposition en facteurs premiers peut être faite à l'aide des critères de divisibilité.

A la différence de Hachette et Hatier, Sésamath donne sur un exemple la décomposition en facteurs premiers de deux nombres pour simplifier ensuite les fractions par les facteurs communs entre le numérateur et le dénominateur.

5. Le Plus Petit Multiple Commun (PPCM)

La notion de PPCM n'occupe aucune place privilégiée ni comme objet d'étude ni comme outil dans les programmes. La recherche de multiples communs est proposée en classe de 4ème pour additionner deux nombres relatifs en écritures fractionnaires. Les manuels introduisent également la notion de multiple commun de deux entiers comme outil pour réduire les fractions au même dénominateur, mais ils font référence implicitement au plus petit multiple commun de deux entiers. C'est le choix de Hachette qui souligne par un exemple dans la partie Cours que la réduction au même dénominateur nécessite de trouver un multiple commun de deux entiers, il propose le plus petit multiple commun sans expliciter de méthode pour la recherche d'un multiple commun.

Par contre, Hatier et Sésamath montrent sur un exemple dans la partie « Méthodes » la recherche de multiple commun. Ils identifient la liste des premiers multiples de deux entiers, et choisissent le premier multiple rencontré qui soit commun aux deux listes.

En classe de 3ème, l'addition et la soustraction des nombres en écriture fractionnaire est reprise dans les manuels. C'est l'occasion de la reprise de la notion de multiple commun, mais Hachette et Hatier ne donnent aucun lieu pour traiter explicitement la notion de multiple commun. Hachette rappelle dans la partie Cours sous l'intitulé « Règles » :

> *« Pour additionner deux nombres relatifs en écritures fractionnaire qui n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les réduire au même dénominateur ». (Hachette, p.18)*

6. Le Plus Grand Diviseur Commun (PGCD)

Conformément aux programmes de 3ème, les manuels proposent le PGCD comme objet d'étude. Il prend une place relativement importante pour simplifier les fractions.

Dans la partie « Activités », les auteurs des manuels Sésamath et Hachette proposent de démonter les propriétés relatives au PGCD, nous citons par exemple :

> *« Démontrer la propriété : Si un nombre d divise a et b, alors d divise b et a – b ».*
>
> *(Hachette, p.53)*

La démonstration de ces propriétés permet de vivre la niche raisonnement de l'arithmétique.

Les manuels proposent tout d'abord une définition du PGCD en donnant seulement le nom.

> *« Le PGCD de deux entiers naturels est leur Plus Grand Diviseur Commun. » (Sésamath, p.19)*
>
> *« a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs. Le plus grand des diviseurs commun à a et b s'appelle le PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) des nombres a et b et se note PGCD (a ;b). (Hachette, p.56)*

La définition du PGCD dans ces deux manuels est proposée au sens de l'ordre naturel. Sésamath met l'accent sur la propriété caractéristique que le PGCD vérifie.

Le choix d'Hatier pour définir le PGCD est différent de deux derniers manuels. Il propose d'abord la définition de diviseur commun au sens de l'ordre de divisibilité, ensuite il présent une définition « abréviation » du PGCD :

> *« Un diviseur commun à deux ou plusieurs nombres entiers est un nombre entier qui est un diviseur de chacun d'eux. » (Hatier, p.12)*
>
> *« Le Plus Grand Diviseur Commun à deux ou plusieurs nombres entiers est appelé le PGCD de ces nombres. » (Hatier, p.12)*

Nous faisons l'hypothèse que la définition « abréviation » proposée chez les manuels peut induire chez les élèves une reformulation de la définition.

Hachette donne des propriétés sur le PGCD :

> *« a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs.*
>
> - *PGCD (a ; a) = a.*
> - *PGCD (b; a) = PGCD (a; b).*
> - Si b est un diviseur de a, alors PGCD (a ; b) = b. » (Hachette, P.56)

Trois techniques sont proposées dans les manuels pour la recherche du PGCD :

- Technique qui consiste à identifier la liste des diviseurs communs à deux entiers, et à choisir le plus grand.

- Technique de l'algorithme d'Euclide.
- Technique de l'algorithme des soustractions successives.

La première technique est proposée sur un exemple dans la partie réservée au Cours dans les trois manuels.

Dans la partie Cours, Hachette et Sésamath explicitent les deux techniques qui donnent une démarche algorithmique sous le titre « Propriété » de la manière suivante :

Propriété : a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs avec a > b.

PGCD (a; b) = PGCD (b; a – b ».

Propriété : a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs avec a > b.

PGCD (a; b) = PGCD (b; r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b ».

(Hachette, P.56)

Dans la partie Méthodes, Hatier montre sur un exemple les démarches algorithmiques des soustractions successives et de l'algorithmique d'Euclide, en proposant une programmation des deux algorithmes.

7. Nombres premiers entre eux

Les manuels définissent les nombres premiers entre eux à la suite de l'étude du PGCD pour définir ensuite les fractions irréductibles. En accord avec les programmes, les fractions irréductibles prennent une place très importante dans les manuels.

Hachette et Hatier proposent d'abord une définition d'une fraction irréductible :

« Définition : On dit qu'une fraction est irréductible lorsque elle ne peut plus être simplifiée »

(Hachette, P.57)

Ils proposent ensuite deux propriétés dont une pour reconnaître une fraction irréductible et l'autre pour rendre irréductible une fraction :

« Propriété : si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, alors cette fraction est irréductible.

« Propriété : si l'on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par leur PGCD, alors la fraction obtenue est irréductible. » (ibid, P.57)

Notons que Hatier dans la partie « Activités » propose une propriété montrant que si deux nombres premiers entre eux, la fraction est irréductible. Il est demandé d'énoncer la réciproque de cette propriété et de la démontrer. Cet exercice permet de faire vivre la niche raisonnement dans cette partie du chapitre.

Sésamath se limite quant à lui à proposer une définition de la fraction irréductible.

Ainsi, la niche algorithmique est fortement viable dans le cours, et le la niche calcul numérique se trouve dans le cours des manuels. Par contre, la niche raisonnement ne se trouve que dans la partie « Activité » pour prendre sa place ensuite dans la partie « Exercices ». En fin, la niche culturelle ne se trouve que chez Hatier.

II. Manuels de Seconde

Nous allons, à présent, mener une étude écologique des manuels de Seconde dans les trois périodes : mathématiques modernes, contre-réforme et contemporaine.

L'arithmétique ne se présente pas dans les programmes dans les deux premières périodes. Cependant, nous avons décidé d'étudier les manuels pour identifier ceux qui proposent les éléments de l'arithmétique comme outil en Seconde.

II.1 Les manuels des mathématiques modernes

Les manuels choisis sont les suivants : Hatier collection E. Riche (1969), Foucher (1969), Bordas (1973).

Conformément aux programmes de Seconde, les manuels analysés n'accordent aucune place aux notions d'arithmétique.

C'est ainsi que l'habitat officiel de l'arithmétique dans la période des mathématiques modernes dans les deux institutions, collège et Seconde, est la classe de 5^e.

II.2 Les manuels de la période contre-réforme

Les manuels choisis pour cette période sont : Hachette Lycées collection Terracher (1990), Hatier collection Pythagore (1994) et Bordas collection Fractale (1990).

Les programmes de la période de contre-réforme (1980-1998) ne portent pas sur l'étude de l'arithmétique. Cependant, nous avons trouvé chez Bordas une révision par exemple sur les diviseurs communs. Il propose dans le chapitre intitulé « Activités numériques » une rubrique « Activités préparatoires » dans laquelle les fractions irréductibles sont proposées. Il explicite dans un exercice résolu la technique associée pour simplifier les fractions de la manière suivante :

> *« Un problème important concernant les fractions consiste à rechercher une fraction égales à une fraction donnée mais dont l'écriture est plus simple. Pour simplifier une fraction il suffit de trouver un diviseur commun à son numérateur et à son dénominateur. » (Bordas, p27)*

Par contre, aucune place n'est réservée à l'arithmétique chez Hatier et Hachette.

II.3 Les manuels de la période contemporaine

Comme nous l'avons déjà dit, les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers sont introduits en 2000 en seconde.

Nous avons étudié trois manuels de 2000 : Hachette éduction collection Pyramide, Hatier collection Pythagore et Bordas.

Le chapitre portant sur les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers est intitulé chez Hatier et Bordas « *Nombres et Calcul* ». Les deux notions sont proposées dans le Cours sous le titre « Arithmétique » chez Hatier, alors que chez Bordas sous la rubrique « Nombres premiers ». En ce qui concerne Hachette, il propose le chapitre intitulé *« Le calcul numérique »,* et dans le Cours, la rubrique « Nombres premiers » portant sur les notions en jeu.

C'est ainsi que l'habitat de l'arithmétique dans les manuels avec les nombres et les calculs permet de donner à l'arithmétique la niche « Calcul numérique ». Pour voir les autres niches que l'arithmétique occupe en Seconde, nous allons étudier les notions d'arithmétique dans la partie « Activités » et « Cours ».

Pour étudier la question relative à la transition des notions d'arithmétique entre le collège et le lycée pour ce qui concerne des notions d'arithmétique, nous prenons en compte dans notre étude la question de la reprise des notions d'arithmétique dans la partie « Activités » et « Cours ». Enfin, nous allons étudier le lien entre l'arithmétique et l'outil informatique pour savoir si l'intégration de cet outil avec l'arithmétique permet de faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique.

1. La reprise des connaissances arithmétiques

La reprise des notions d'arithmétique prend une place non négligeable dans les manuels. Hachette propose dans la partie réservée au Cours la définition de diviseur avant l'étude des notions en jeu. Bordas rappelle, dans la partie réservée aux méthodes, l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD. En ce qui concerne Hatier, il adopte le même choix que Bordas en faisant un rappel dans la partie « Activités » sur le PGCD et l'algorithme d'Euclide :

> *« Rappel : P.G.C.D. (8,12) est le plus grand diviseur commun à 8 et à 12.*
>
> *Rappel : Le P.G.C.D. des deux entiers 210 et 78 est le dernier reste non nul dans cette suite de divisions qu'on appelle algorithme d'Euclide. » (Hachette, P.12)*

Cette révision de l'algorithme d'Euclide permet de faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique dans les deux manuels Bordas et Hachette.

2. Les notions en jeu

Nous allons dans ce qui suit étudier la notion de nombre premier et de décomposition en facteurs premiers dans les manuels analysés.

2.1 Les nombres premiers

Les nombres premiers sont réintroduits en classe de seconde. Ils sont présentés via une définition suivie d'un exemple.

Hatier est assez bref sur la notion de nombre premier. Il se limite à la définition des nombres premiers pour déterminer si un nombre est premier ou pas. Il montre par exemple que tout entier pair autre que 2 ne peut pas être premier, et mentionne par une remarque que « L'ensemble des entiers premiers est infini. »

Seul Hachette propose après la définition d'un nombre premier un théorème (non démontré) suivi d'exemples pour déterminer si un nombre est un premier ou non.

> « *Soit n un entier* ($n \geq 2$) *.Alors :*
>
> *N admet un diviseur premier ;*
>
> *Si n n'admet aucun diviseur premier p tel que* $p^2 \leq n$*, alors il est lui-même premier.* »
>
> (Hachette, P 13).

Ce théorème permet de justifier la technologie pour reconnaître des nombres premiers.

Par contre, Bordas propose dans la partie « Méthodes & exercices résolus » une technique différente de celle de chez Hachette pour déterminer si un nombre entier est premier :

« Méthode :

- *Chercher si le nombre entier est divisible par 2,3 et 5.*
- *Si ce n'est pas le cas, diviser ce nombre entier par chacun des nombres selon l'ordre de la liste des nombres premiers jusqu'à ce qu'il soit divisible*
- *Arrêter les divisions dès que le quotient est inférieur au diviseur. »* (Bordas, p56)

En fait, les deux techniques proposées par Hachette et Bordas pour reconnaître les nombres premiers permettent de donner une démarche algorithmique, et ainsi de faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique.

En résumé, la niche algorithmique vit avec les nombres premiers chez Hachette et Bordas, alors qu'elle est absente chez Hatier.

2.2 La décomposition en facteurs premiers

Les manuels introduisent la décomposition en facteurs premiers dans le cours sous une rubrique « Propriété » (Hatier et Bordas) ou « Théorème » (Hachette).

Bordas est le seul manuel qui ne mentionne pas l'unicité de la décomposition en facteurs premiers. Hachette souligne que le théorème associé à la décomposition en facteurs premiers s'appelle le théorème fondamental de l'arithmétique.

Deux techniques sont proposées par Hachette et Bordas pour décomposer un entier. La première technique repose sur les tables de multiplication et les critères de divisibilité. La deuxième technique est basée sur la division du nombre successivement par les premiers nombres premiers. Cette technique comporte les étapes suivantes chez Bordas :

« - *Diviser le nombre entier par le plus petit nombre premier possible.*

- *Diviser le quotient obtenu par le plus petit nombre premier possible.*

- *Recommencer jusqu'à ce que le quotient obtenu soit égal à 1.*

- *Le produit de tous ces diviseurs est la décomposition en facteurs premiers.* »

(Bordas, p. 56)

Cette technique donne une démarche algorithmique, et elle permet ainsi de faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique. Hatier ne propose pas cette démarche ; il se limite à l'utilisation des critères de divisibilité pour décomposer un nombre entier.

La recherche du PGCD est retenue dans les manuels en recourant à la décomposition en facteurs premiers et à l'algorithme d'Euclide.

D'ailleurs, les trois manuels proposent la décomposition en facteurs premiers comme une nouvelle technique pour la recherche de PGCD. Hachette propose dans le cours sous une rubrique « Application » une règle de la recherche du PGCD à l'aide de la décomposition en facteurs premiers explicitant que cette démarche est une conséquence du théorème fondamental de l'arithmétique. Hatier propose dans la partie « Travaux pratiques » une règle comme technique de la recherche du PGCD à l'aide de la décomposition en facteurs premiers :

« ***Méthode pour la recherche du P.G.C.D. de deux entiers naturels a et b***

On décompose a et b en produit de facteurs premiers.

Certains facteurs apparaissent en commun dans les deux décompositions, d'autres non.

Quand un facteur est commun, il est affecté d'un exposant dans la décomposition de a et d'un autre exposant dans la décomposition de b.

Le P.G.C.D. de a et b est égal au produit des facteurs communs aux deux décompositions, affectées du plus petit des deux exposants. » (Hatier, P.19)

De même, Bordas propose dans la partie « Méthodes & exercices résolus » sous la rubrique « Trouver le PGCD de deux nombres entiers » deux méthodes de recherche du PGCD : l'algorithme d'Euclide et la décomposition en facteurs premiers.

En résumé, la niche algorithmique de l'arithmétique vit avec la décomposition en facteurs premiers chez Hachette et Bordas, alors qu'elle est absente chez Hatier. La décomposition en facteurs premiers prend une place relativement importante dans les manuels analysés comme une nouvelle technique de recherche du PGCD.

3. Lien entre arithmétique et informatique

L'utilisation de l'outil informatique avec l'arithmétique n'est pas un enjeu important dans les manuels analysés. Nous trouvons que Hatier et Bordas ne donnent aucune place à l'intégration de l'outil informatique dans la partie Activité et Cours. Quant à Hachette, il donne une place marginale à l'outil informatique avec l'arithmétique : il propose, dans la partie intitulée « Prise en main d'un tableur », le tableur en mettant en place l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD. Mais ce travail est déjà proposé en Troisième.

Ainsi, dans les manuels étudiés, l'outil informatique qui permet de faire vivre la niche algorithme en mettant en œuvre un algorithme dans un logiciel n'occupe aucune place avec les notions en jeu en classe de Seconde.

Conclusion de l'analyse écologique des manuels

L'analyse des manuels a montré que l'arithmétique dans la période des mathématiques moderne occupe une troisième niche à côté des deux niches « calcul numérique » et « théorie des nombres » : c'est la niche « structurelle ».

La niche « théorie des nombres » se présente en classe de cinquième alors que la niche « structurelle » réside avec la niche « calcul numérique » en classe de troisième.

Les niches « théorie des nombres » et « structurelle » ont disparu des manuels de la période de contre-réforme qui garde l'aspect pratique de l'arithmétique qui est proposé en sixième pour présenter la relation de la divisibilité et la division euclidienne, et en quatrième pour utiliser le PGCD pour simplifier des fractions et le PPCM pour réduire les fractions au même dominateur.

Une nouvelle niche de l'arithmétique apparaît lors de sa réintroduction en 1999 en troisième et en 2000 en seconde : la niche algorithmique qui est mise en avant par les auteurs des manuels. Par contre, on constate un faible usage de l'outil informatique en relation avec les aspects algorithmiques de l'arithmétique.

III. Organisations mathématiques et définitions dans les manuels

Dans cette partie, nous nous proposons d'examiner les organisations mathématiques mises en place dans les manuels, ainsi que les types de définitions rencontrées, en référence aux études conduites dans les chapitres 2 et 3.

III.1. Manuels de la période des mathématiques modernes : dénomination et définition équivalente et aspect existence et unicité.

Les auteurs de cette période évoquent clairement la dénomination pour définir les concepts d'arithmétique, et ils mettent en évidence l'équivalence entre deux phrases ayant le même sens, la définition permet ainsi le remplacement d'une phrase vraie par une autre phrase vraie. Nous sommes ici sur une vision logicienne nominaliste de la définition.

En 5ème, la définition de diviseur et de nombres premiers répond à ce type de présentation : « l*a phrase… ⇐ a le même sens que⇒ la phrase…*"

La définition de multiple et de diviseur apparaît utile dans la démonstration que la relation « est multiple de » et la relation « est diviseur de » sont des relations d'ordre.

Le statut accordé à la définition du PGCD et du PPCM par Bordas consiste en la désignation par exemple.

En ce qui concerne la propriété caractéristique d'un objet (celle-ci est considérée comme un *facteur déclencheur de l'acte de définition*), elle apparaît dans les définitions de type « signifie », comme l'indique Ouvrier-Buffet : « *une définition du type « …signifie… » permet d'énoncer une propriété vraie.* »

III.1.1 Sur la forme des énoncés « définition »

Les auteurs étiquettent « définition » les énoncés correspondant aux notions de multiple et de diviseur, et de nombres premiers en classe de cinquième, alors que les autres notions (division euclidienne, PGCD, PPCM) ne font pas l'objet d'un énoncé spécifique étiqueté « définition ».

Majoritairement les définitions sont de la forme « dire que … », « veut dire », « Parmi …il existe » (Nathan) ; « On appelle … », « s'appelle… » « Est appelé… », « On dit que … » (Bordas et Hachette).

III.1.2 Sur l'aspect existence & unicité

La définition de la division euclidienne proposée par les auteurs des manuels permet de traiter l'aspect de l'existence et de l'unicité du couple (q, r). En fait, derrière cette définition se cache un théorème qui affirme l'existence et l'unicité du couple (q, r) ; nous pouvons lire dans Bordas :

> *« a et b étant deux nombres entiers, on appelle quotient euclidien de a par b, b ≠ 0, le plus grand nombre entier q tel que : b q ≤ a.*
>
> *Quel que soient les entiers donnés a et b, ce nombre q existe et est unique. » (Bordas, p.103)*

La définition proposée seulement par Nathan du PGCD et du PPCM permet aussi de traiter l'existence de l'objet défini de la façon suivante :

> *« Parmi les diviseurs communs à deux naturels a et b,* ***il en existe*** *un plus grand que tous les autres, c'est le pgcd de a et b. l'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de leur p.g.d c » (Nathan, p.)*

La présentation de la décomposition en facteurs premiers dans les manuels est axée autour de l'existence et de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

En fait, l'aspect existence et unicité de l'objet défini est implicitement porté par les énoncés des définitions qui ont la forme « *dans telle situation, tel objet est appelé comme ça"* comme l'écrit Ouvrier-Buffet : « *dans ce cas, il est mentionné qu'il faut s'assurer de l'existence et de l'unicité d'un tel objet. Remarquons que la définition va dépendre ici semble-t-il de la situation, ce qui laisse à penser que la situation elle-même pourrait apporter la nécessité de définir ; mais, l'aspect nominaliste des auteurs réduit en particulier la définition à une dénomination. De plus, la question essentialiste de l'existence (et celle de l'unicité) est posée, ce qui vient compléter la conception nominaliste logicienne des auteurs. Il semblerait que ce type de définition soit en réalité proche d'une désignation, d'une définition par extension. » (ibid, p.90)*

Alors qu'il n'est pas question d'existence et d'unicité de l'objet défini avec la formulation langagière d'une définition qui s'exprime par *: "dans telle situation, un objet qui vérifie telle propriété est appelé comme ça" : « le fait de connaître une propriété permet peut-être de s'assurer qu'effectivement un objet possède cette propriété. Contrairement à la formulation précédente, une définition de ce type ne se résume pas à une simple dénomination et désignation ; vient s'ajouter un signifié, une propriété détenue par un objet.*

Cette seconde formulation permet aux auteurs de faire une transition vers les ***propriétés caractéristiques*** *» (ibid, p.90)*

En conclusion

La majorité des définitions des notions d'arithmétique, bien que présentes dans cette période, ne font pas l'objet d'un énoncé spécifique étiqueté « définition ».

L'aspect existence et unicité de l'objet défini est traité par les auteurs des manuels au moment de proposer la division euclidienne et la décomposition en facteur premiers.

Les fonctions d'une définition sont : la fonction de communication, la fonction de dénomination et d'introduction d'un mot nouveau, l'aspect opératoire d'une définition de type langagier.

III.2. Manuels de contre-réforme : absence de définitions et rôle des activités préparatoires

Cette période marque une disparition de l'arithmétique des programmes et des manuels scolaires.

III.2.1. Structure et contenus des cours

La grande différence entre les manuels de 1970 et ceux de 1985 à propos de l'arithmétique sont la structure et le contenu de cours. Les manuels de 1970 présentent les notions d'arithmétique dans un cours traditionnel ; pour chaque concept (parfois deux), on a un chapitre débutant par un exemple (ou plusieurs exemples) pour introduire une ou plusieurs définition(s). Ce n'est pas du tout le cas des manuels de 1985 ; les auteurs des ces manuels ont choisi de présenter d'abord les nouveaux objets dans les activités préparatoires, ensuite de proposer les notions comme des règles qui précisent leur fonction dans la partie cours qui se résume à un paragraphe intitulé « retenir », où le statut des énoncés n'est pas spécifié (définition, théorème, propriété, exemple…).

C'est ainsi que les manuels des années 1970 fournissent des explications sur les énoncés mathématiques, dont font partie des définitions, tandis que les manuels des années 1985 témoignent d'une absence notable de définitions, mais proposent des activités préparatoires. Nous avons signalé précédemment que les notions de nombre premier et de décomposition en facteurs premiers ont disparu totalement des programmes et des manuels, et que les notions de diviseur commun et multiple commun sont introduites sur des exemples dans la partie cours pour simplifier les fractions et les réduire au même dominateur. Les énoncés auxquels nous pourrions donc assigner le statut de définition consistent, pour la plupart, en la désignation par des exemples

La désignation d'un schéma est proposée par Hatier et Hachette pour la reconnaissance de la division euclidienne.

Bordas évoque la dénomination pour définir la notion de multiple ; la définition équivalente pour définir le diviseur, et étiquette la définition de la division euclidienne.

III.2.2 La forme des énoncés de type « définition »

Les définitions que nous avons relevées dans Bordas sont de la forme « quelque soit…il existe », « on appelle … ».

L'étiquette « définition » a été mise par Bordas seulement sur la définition de quotient euclidien, alors qu'il n'a y pas d'avertisseur *définition* dans Hachette et Hatier.

III.2.3 Sur l'aspect existence & unicité

L'aspect existence et unicité d'un objet défini est absent dans les manuels de la période de la contre-réforme. Cependant nous trouvons que le choix fait par Bordas permet de traiter l'aspect existence et unicité du quotient euclidien de la manière suivante :

« *Quel que soit l'entier non nul b et quel que soit l'entier a, il existe un entier q unique tel que : $b\, q \leq a < b\,(q+1)$ cet entier q est le quotient entier, ou quotient à une unité près par défaut (ou quotient euclidienne) de a par b.* » *(Bordas, p. 39)*

En conclusion

D'une manière générale, cette période témoigne d'une absence notable des définitions formelles du fait de la disparition de l'arithmétique de l'enseignement secondaire. La dénomination et les définitions équivalentes qui sont évoquées dans les manuels de mathématiques modernes ont été remplacées dans les manuels de contre-réforme par la désignation par exemple.

III.3. Manuels de la période contemporaine

Cette période marque un retour de l'arithmétique en troisième (PGCD, nombres premiers entre eux) et en seconde (nombres premiers, décomposition en facteurs premiers), et nous attendons donc une place spécifique des définitions dans les manuels de ces classes.

Une différence à noter dans les manuels actuels : la partie « cours » est davantage structurée avec des liens vers les notions au programme des années précédentes et des énoncés encadrés dont le statut est précisé (définition, théorème, propriété).

La dénomination est proposée par les auteurs des manuels en 3ème et 2nde pour des énoncés étiquetés « définitions », tandis que la désignation par un exemple est proposée en 6ème pour introduire le vocabulaire dit simple tel que ce qui est lié aux relations de divisibilité ou pour proposer le multiple commun en 4ème et le diviseur commun en 3ème

La définition du diviseur en 6ème correspond à la définition par équivalence qui est retenue par les auteurs de Bordas.

La désignation d'un schéma qui est proposée par Hatier apparaît comme une manière de permettre la reconnaissance de la division euclidienne dans une situation de communication.

III. 3.1 La forme des énoncés « définition »

En général, dans cette période, ce sont les classes de troisième et de seconde qui sont les lieux officiels pour les définitions des notions d'arithmétique. En $3^{ème}$, les auteurs de manuels étiquettent les définitions de nombres premiers entre eux, et en seconde, ils étiquettent la définition des nombres premiers ; en outre, la définition du diviseur est rappelée en seconde par Hachette.

Cependant, nous relevons en sixième une définition étiquetée de la division euclidienne qui est proposée par Bordas.

Ces définitions sont encadrées dans les manuels, elles sont de la forme « On dit que » (Bordas et Hachette) ; « on appelle » (Bordas) ; « Est ….. » et « est dit … » (Hatier).

III. 3..2 : L'aspect existence et unicité

L'aspect existence et unicité de l'objet défini est explicitement évoqué dans les manuels qui proposent la décomposition en facteurs premiers à partir du théorème fondamental de l'arithmétique (Hachette) ou sur une propriété (Hatier et Bordas) permettant de traiter cet aspect.

Il nous semble que la définition du PGCD proposée par Hachette permet aussi de traiter implicitement cet aspect, nous pouvons lire:

« *L'ensemble des diviseurs communs à deux entiers a et b* ***admet*** *un plus grand élément noté PGCD (a ; b). PGCD signifie Plus Grand Commun Diviseur.* » (Hachette, p. 70)

Cet énoncé nous s'assure l'existence et unicité du PGCD de deux entiers a et b.

En conclusion

Des étiquettes « définitions » apparaissent dans le cours, l'aspect existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers revient explicitement dans les manuels de seconde.

La dénomination, les définitions équivalentes et la désignation par exemple sont évoquées dans les manuels.

Les fonctions d'une définition sont : la fonction de communication, la fonction de **dénomination** et d'introduction un mot nouveau.

CONCLUSION

En général, les définitions proposées dans les manuels peuvent avoir une conception nominaliste logicienne des auteurs, avec une pointe d'essentialisme.

Les manuels des années 1970 donnent un lieu spécifique aux définitions de notions d'arithmétique, ce qui n'est pas le cas des manuels des années 1985 qui témoignent d'une absence notable de définitions à propos de l'arithmétique. Ces définitions réapparaissent dans les manuels des années 1997 avec un avantage pour langage mathématique.

Nous rappelons ci-dessous plus précisément ce qui concerne ce point selon les périodes :

Dans la période des mathématiques modernes, les types de définitions rencontrées dans les manuels sont principalement du type dénomination ; on trouve aussi des définitions du type équivalence, en particulier pour les notions liées à la divisibilité.

La majorité des définitions des notions d'arithmétique, bien que présentes dans la période des mathématiques modernes, ne font pas l'objet d'un énoncé spécifique étiqueté « définition ».

D'une manière générale, la période de la contre-réforme témoigne d'une absence notable des définitions formelle du fait de la disparition de l'arithmétique dans l'enseignement secondaire. La dénomination et les définitions équivalentes qui sont évoquées dans les manuels de mathématiques modernes ont été remplacées dans les manuels de la contre-réforme par la désignation par l'exemple.

Dans la période contemporaine, des étiquettes « définitions » apparaissent dans le cours, l'aspect existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers revient explicitement dans les manuels de seconde. La dénomination, les définitions équivalentes et la désignation par l'exemple sont présentes dans les manuels.

Notons enfin que les manuels qui proposent les notions d'arithmétique par une définition par l'exemple, permettent de connaître le vocabulaire, mais ne permettent pas nécessairement de mettre en évidence les propriétés et les relations entre les entiers. Ceci peut induire chez les élèves des difficultés pour comprendre les relations entre entiers.

En ce qui concerne l'aspect existence et unicité de l'objet défini, il se manifeste clairement dans les manuels de l'année 1976 avec les notions de division euclidienne, de PGCD et la décomposition en facteurs premiers ; cet aspect disparaît des manuels de l'année 1985, et les manuels de l'année 1997 témoignent d'un retour timide de cet aspect avec la notion de décomposition en facteurs premiers. Notons que pour prendre en compte cet aspect, deux choix sont possibles : soit donner la définition sous la forme de propriétés que doit vérifier un objet pour satisfaire la définition, et proposer ensuite un théorème assurant selon les cas l'existence et/ou l'unicité ; soit donner une définition comportant l'affirmation de l'existence et/ou de l'unicité, en laissant en arrière plan le théorème correspondant. Nous avons rencontré ces deux cas dans les manuels.

La fonction de communication et celle d'introduction d'un nouveau mot sont prédominantes dans les manuels.

Nous voudrions signaler qu'une notion peut être proposée aussi bien d'une définition que d'une règle telles les notions de PGCD et de PPCM qui sont proposées, en particulier, dans les manuels de mathématiques modernes comme une définition, et ensuite comme une règle qui fait un passage des définitions à l'activité mathématique. Cette dualité, peut se rencontrer, comme nous le montre Durand-Guerrier et Heraud (2006) :

> *« Définition et règle se rencontrent du fait que leur fonction commune consiste à déterminer conjointement un objet de discours et un objet de pratique ».* (*Durand-Guerrier et Heraud, p.143)*

Cependant, il y a une tension entre la définition et la règle, la première porte sur les termes du langage et leur sens, l'autre consiste à réaliser les propriétés de l'objet, nous pouvons lire :

> *« Définition et règles révèlent par conséquence toutes deux à l'examen une tension entre deux pôles rivaux qui témoignent de leur dualité de registres ; l'un met l'accent sur leur dimension langagière (lexicale) du sens, l'autre sur leur fonction référentielle (extra- linguistique) de l'objet en jeu. »(ibid, p.143)*

C'est ainsi que, les notions de PGCD et PPCM sont apparues dans les manuels de mathématiques modernes comme une définition qui traite de l'aspect existence et unicité d'une part, et comme une règle qui permet un passage de l'ordre théorique à l'ordre pratique d'autre part. Nous citons par exemple la règle de la recherche du PGCD de deux entiers proposée par Nathan (1975) :

> *« 1) On décompose a et b en produit de facteurs premiers.*
>
> *2) Le p.g.c.d cherché est le produit des diviseurs premiers communs aux deux naturels, chacun d'eux étant pris avec le plus petit exposant figurant dans la décomposition e facteurs premiers de a et de b. » (p.101)*

Lors de période de la contre-réforme, nous pouvons constater que conformément aux programmes les objets de discours ont disparu, mais que l'objet de pratique reste dans les manuels dont certains proposent une règle de la recherche du PGCD et PPCM.

Nous synthétisons dans le tableau ci-dessous, le statut des définitions pour chaque notion d'arithmétique dans ces manuels, et ses fonctions, relativement aux programmes précédents.

<table>
<tr><th>Concept</th><th>Maths modernes</th><th>Contre-réforme</th><th>Contemporaine</th></tr>
<tr><td>Multiple</td><td>Dénomination</td><td>Dénomination
Désignation par exp</td><td rowspan="3">Equivalente (Bordas)

Désignation par exp
(Hachette et Hatier)</td></tr>
<tr><td>Diviseur</td><td rowspan="2">Dénomination

Equivalente</td><td rowspan="2">Equivalente
Désignation par exp</td></tr>
<tr><td>Divisible</td></tr>
<tr><td>Division euclidienne</td><td>L’aspect existence et unicité</td><td>L’aspect existence et unicité
Désignation par exp</td><td>Dénomination (Bordas)
Désignation par exp
(Hachette)
Désignation par un schéma (Hachette)</td></tr>
<tr><td>PGCD et PPCM</td><td>Dénomination
Désignation par l’exemple

L’aspect existence</td><td>Désignation par exp</td><td>Désignation par exp
(Bordas, Hachette et Hatier)

Implicitement l’aspect existence (Hachette)</td></tr>
<tr><td>Nombres premiers entre eux</td><td></td><td>……………</td><td>Dénomination
(Bordas, Hachette et Hatier)</td></tr>
<tr><td>Nombres premiers</td><td>Dénomination</td><td>………….</td><td>Dénomination
(Bordas, Hachette et Hatier)</td></tr>
<tr><td>Décomposition en facteurs premiers</td><td>L’aspect existence et unicité</td><td>……………</td><td>L’aspect existence et unicité
(Bordas, Hachette et Hatier)</td></tr>
</table>

IV. Analyses écologique et praxéologique de trois manuels utilisés par les enseignants interrogés

Introduction

Dans le cadre de l'analyse du rapport personnel à l'arithmétique des enseignants que nous présentons dans le chapitre VI, il est apparu que les manuels de seconde que nous venons d'analyser ne sont pas ceux qui sont le plus utilisés par les enseignants qui ont répondu à notre questionnaire ; en effet, les trois manuels les plus utilisés par ces enseignants sont Hyperbole, Déclic et Indice. Nous avons donc choisi de compléter notre étude de manuels de seconde faite dans la première partie par une étude écologique et praxéologique afin d'affiner nos résultats concernant la mise en texte des directives du programme dans les manuels d'une part, et de voir s'il y a un écart entre le choix des enseignants et celui des manuels, d'autre part. Pour cela, nous avons introduit pour ces trois manuels une analyse praxéologique, qui nous servira pour l'étude du rapport personnel des enseignants et des élèves présentée dans les deux chapitres suivants. La comparaison avec les manuels analysés précédemment nous permet de mettre en évidence les variabilités des choix des auteurs de manuels pour introduire l'arithmétique et les niches occupées par l'arithmétique, et de bien identifier le rapport institutionnel à l'objet arithmétique. Nous centrons notre analyse des manuels surtout sur la question de la reprise des connaissances arithmétiques en Seconde, les notions en jeu dans les programmes et l'intégration de l'outil informatique dans la partie arithmétique.

Pour mener cette analyse, nous faisons dans un premier temps une analyse écologique des différentes parties des manuels (activités, cours, méthodes, exercices résolus, …) qui sont liées à l'étude de l'arithmétique pour voir comment sont mises en place les tendances de programme (2000) de seconde dans les manuels, quelles niches sont viables dans les manuels et comment elles sont mises en place dans les manuels. Dans un deuxième temps, nous conduisons une analyse praxéologique des exercices résolus dans le chapitre d'arithmétique, ainsi que des exercices proposés dans la partie « Exercices ».

Nous avons étudié ces manuels dans deux éditions : celle de 2000 et celle de 2004. En effet, à la rentrée 2004, des nouveaux manuels sont édités ; les auteurs des manuels sont les mêmes. Une première étude des nouveaux manuels montre qu'il y a une différence significative entre les manuels de 2000 et ceux de 2004 alors qu'il n'y a pas eu de changement des programmes. Notre Hypothèse est que les manuels ont changé pour réajuster par rapport aux programmes de 2000. Ainsi, nous conduisons une analyse des manuels de 2000, nous menons ensuite une analyse comparative entre les manuels de 2000 et 2004 tant au niveau de l'analyse écologique qu'au niveau de l'analyse praxéologique.

I. analyse écologique des manuels

Dans cette analyse nous identifions l'habitat et les niches occupés par l'arithmétique dans les manuels. Nous sommes plus particulièrement attachée à étudier la vie de la niche algorithmique de l'arithmétique dans les différentes parties (activités, cours, méthodes, exercices résolus, etc.) des trois manuels. Cette étude est menée à travers les choix proposés pour les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers, la reprise de l'algorithme d'Euclide et l'intégration de l'outil informatique dans le contenu d'arithmétique. Ainsi, nous cherchons ce qu'il en est de l'aspect algorithmique dans les activités visant à tester la primalité d'un nombre :

T1 - divisions successives par les nombres premiers p = 2, 3, 5, … jusqu'à $p^2 < n$.

T2 - divisions successives par les nombres premiers p = 2, 3, 5, … jusqu'à ce que le quotient devienne inférieur au diviseur.

La décomposition en facteurs premiers par la technique qui consiste à décomposer un nombre en divisant ce nombre et les quotients entiers obtenus par les nombres premiers nous permet également de relever ce qu'il en est de l'aspect algorithmique dans les manuels. De plus l'utilisation de l'outil informatique pour traiter le contenu d'arithmétique est un moyen d'utiliser les algorithmes. Or, comme NGUYỄN (2005) nous le montre, la programmation des principaux algorithmes d'arithmétique ne permet pas de travailler sur la démarche algorithmique, car l'écriture d'un programme n'est pas à la charge de l'élève. :

> *« L'écriture d'un programme n'est pas à la charge de l'élève (absence de savoir sur la construction des algorithmes, rareté des exercices T1[4]). Par contre l'élève du lycée doit savoir exécuter un programme donné sur sa calculatrice ou l'expliquer (importance des exercices T2[5] et T3)[6]. Par conséquent, l'écriture d'une boucle ou d'un test d'arrêt n'est pas à la charge de* l'élève. » (NGUYỄN, 2005, p.31)

Nous présentons dans ce qui suit l'analyse des manuels de 2000, complétée par une étude comparative des manuels de 2000 et 2004. Nous allons noter les trois manuels respectivement Déclic, Hyperbole et Indice pour les programme de 2000 par Déc2000, Hyp2000 et Ind2000, et pour les programme de 2004 par les notes : Déc04, Hyp04 et Ind04.

I.1. Les manuels de 2000

La structure du chapitre varie selon les manuels. Le chapitre de Déc2000 est composé des parties suivantes: « Activités », « Le cours », « Sa mise en pratique », « Problème résolu », « Problème guidé », « Travaux dirigés », « Synthèse », « Exercice ».

[4] T1 : « Écrire un algorithme pour un problème donné ».
[5] T2 : « Exécuter un programme donné ».
[6] T3 : « Trouver le résultat d'un algorithme donné pour différentes instances d'un problème ».

Le chapitre d'Ind2000 est composé des parties suivantes: « Découvrir », « Le cours- les notions », « le cours- les méthodes », « Exercices ».

Hyp2000 consiste en : « l'ouverture (Pour démarrer, Hier, aujourd'hui, demain) », « Cours », « Les méthodes », « Activités », « Exercices ».

Le contenu d'arithmétique est introduit dans les trois manuels après l'étude de l'ensemble de nombres. Ind2000 propose l'arithmétique dans un chapitre intitulé « Nombres et calculs », Déc2000 le présente sous l'intitulé « Les nombres » et elle se trouve dans le chapitre « Nature et écriture des nombres » dans le manuel Hyp2000.

Comme nous l'avons déjà dit, nous organisons notre étude selon le plan suivant :

- la reprise des notions d'arithmétique qui permet de mettre en évidence la continuité des connaissances arithmétiques lors la transition entre le collège et le Lycée.

- les notions en jeu en classe de Seconde.

- le lien entre l'arithmétique et l'informatique. : Nous cherchons à savoir si les manuels mettent en œuvre les instructions concernant l'algorithmique avec un outil informatique pour ce qui concerne les notions d'arithmétique en Seconde.

Les manuels de Seconde les plus utilisés par les enseignants sont en annexe 2.

I.1.1 La reprise des notions d'arithmétique

Ind2000 et Hyp2000 choisissent de proposer le contenu d'arithmétique fixé dans le programme de Seconde sans aucun rappel des notions d'arithmétique déjà étudiées au collège, en particulier dans la partie réservée au cours. Cependant, la recherche de tous les diviseurs d'un nombre est proposée comme une technique dans la partie « Méthode » pour Ind2000, et comme un type de tâche dans les activités préparatoires dans Hyp2000.

Contrairement aux manuels Ind2000 et Hyp2000, Déc2000 donne une place relativement importante à la question de la reprise des connaissances antérieures associées à l'arithmétique. Il propose tout d'abord dans la partie réservée aux activités sous l'intitulé « Arithmétique » une définition de l'arithmétique de la manière suivante :

> *« Les Grecs ont étudié les propriétés des entiers naturels : nombres pairs ou impairs, diviseurs et multiples, nombres premiers entre eux…Cette branche des mathématiques est l'arithmétique (du grec arithmos signifiant nombre). » (Déclic, 2000, p.13)*

Il propose ensuite trois types de tâches : deux sont associées à la recherche de tous les diviseurs d'un nombre, la troisième a pour objectif d'introduire les notions au programme de la classe de Seconde. Il s'agit de décomposer un nombre en facteurs premiers et d'écrire la fraction $\frac{a}{b}$ sous forme irréductible en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

Il rappelle, dans son cours intitulé « Arithmétique », la définition de multiple et les critères de divisibilité avant de proposer les notions fixées par les programmes. Dans la partie « Méthodes », il donne sous le titre « rappel » une définition des fractions irréductibles en citant les nombres premiers entre eux :

> *« Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de diviseurs commun autre que 1. » (Déclic, 2000, p.19)*

Nous constatons que parmi les trois manuels analysés seul le manuel Déc2000 introduit les nombres premiers entre eux ainsi que le PGCD et le PPCM. La simplification des fractions est faite à l'aide de la décomposition en facteurs premiers sans recours à la recherche du PGCD. Ainsi, pour deux des trois manuels, la reprise des notions arithmétiques comme objet n'est pas un enjeu important lors de la transition entre le collège et le Lycée. .

Notons que les manuels analysés dans le chapitre 4 donnent une place important à la question relative à la reprise des notions d'arithmétique, ceci met en évidence la différence entre les manuels pour proposer le cours d'arithmétique.

I.1.2 Les notions au programme de la classe de Seconde

Les notions d'arithmétique fixées par les programmes sont les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers.

- Nombres premiers

Les trois manuels proposent dans la partie « Cours » une définition des nombres premiers, et montrent que 1 et 0 ne sont pas des nombres premiers. Ind2000 et Hyp2000 choisissent de montrer sur un exemple que les nombres non premiers sont des nombres ayant plus de deux diviseurs, ce qui n'est pas le cas de Déc2000.

Si Hyp2000 annonce l'infinité des nombres premiers par une remarque dans la partie cours, Déc2000 et Ind2000 ne donne aucune occasion pour souligner l'infinité des nombres premiers. Par contre, Déc2000, donne dans la partie cours tous les nombres premiers inférieurs à 50.

Aucune indication sur la technique à utiliser et aucune technologie correspondante ne sont explicitées chez Ind2000 et Hyp2000 pour reconnaître si un nombre est premier ou pas tandis que le test des nombres premiers occupe une place relativement importante chez Déc2000 à travers un exercice de la partie cours utilisé avec la calculatrice et un autre exercice de la partie « Sa mise en pratique ». Les techniques proposées par Déc2000 sont les suivantes :

- la première technique qui se trouve dans la partie « cours », consiste à diviser successivement le nombre, lorsque les critères de divisibilité ne s'appliquent plus, par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, … jusqu'à ce que le quotient devienne inférieur au diviseur.

- la deuxième technique qui prend sa place dans la partie « Sa mise en pratique », consiste à diviser successivement le nombre, lorsque les critères de divisibilité ne s'appliquent plus, par les nombres premiers p = 2, 3, 5, 7, 11, … jusqu'à $p^2 \leq n$. Cette technique est proposée avec une démarche algorithmique, et elle est mise en œuvre dans la calculatrice T1 (80 82 ou 83).

Ainsi, nous pouvons dire que la niche algorithmique n'est pas viable avec les nombres premiers dans les deux manuels Ind2000 et Hyp2000, tandis que le manuel Déc2000 offre la possibilité de faire vivre cette niche.

Comme nous avons trouvé dans le chapitre 4, cette niche est vivante dans deux manuels analysés, alors qu'elle est absente dans le troisième manuel, ce qui montre la variété des manuels pour proposer le contenu d'arithmétique.

- Décomposition en facteurs premiers

L'aspect existence et l'unicité de la décomposition en facteurs premiers est explicitement mentionné dans les deux manuels Ind2000 et Hyp2000 sous l'intitulé « Propriété /Théorème », alors que Déc2000 se contente de proposer l'existence de la décomposition en facteurs premiers.

Déc2000 se singularise par rapport aux deux autres manuels en proposant de retravailler certaines notions d'arithmétique déjà étudiées avec la décomposition en facteurs premiers : dans la partie «Sa mise en pratique », il propose de déterminer le PPCM, par un exemple résolu à l'aide de la décomposition en facteurs premiers pour réduire au même dénominateur ; dans la partie « Travaux dirigés », il propose un type de tâche relatif à la détermination des diviseurs d'un nombre décomposé en facteurs premiers en soulignant qu'il utilise pour ce faire une démarche algorithmique.

En ce qui concerne les techniques proposées par les manuels pour décomposer les nombres en facteurs premiers, Ind2000 et Hyp2000 proposent les deux techniques suivantes :

- Critères de divisibilité et la table de multiplication.
- Divisions successives par les nombres premiers 2, 3, 5, …

Alors que Déc2000 se limite aux critères de divisibilité pour décomposer les nombres en facteurs premiers. Ceci n'est pas en opposition avec les recommandations des programmes dans la mesure où l'objectif affiché de la réintroduction de la décomposition en facteurs premiers dans les manuels est de travailler avec les puissances et de simplifier les fractions ; ceci est explicitement annoncé chez Déc2000 :

> *« On recherche la décomposition en produit pour simplifier des expressions avec radicaux ou avec fractions. » (Déclic, 2000, p.19)*

On peut retenir de ce qui précède que les manuels Ind2000 et Hyp2000 offrent la possibilité de faire vivre la niche algorithmique avec la décomposition en facteurs premiers, ce qui n'est pas le cas pour Déclic2000.

I.1.3 Lien entre arithmétique et informatique

L'analyse des trois manuels nous montre que l'outil informatique est intégré de manières très différentes. La calculatrice est peu présente dans Ind2000, elle est réduite à la représentation des nombres décimaux et à l'obtention de valeurs approchées, alors qu'elle est plus présente dans les deux manuels Déc2000 et Hyp2000. Ces deux derniers ont fait des choix différents quant au type d'outil informatique utilisé. Hyp2000 présente le tableur dans la partie « Activités » pour mettre en œuvre l'algorithme d'Euclide afin de donner une écriture décimale d'un nombre rationnel, alors que Déc2000 choisi la calculatrice TI (80 82 ou 83) dans son cours.

Quant à l'intégration de l'outil informatique avec le contenu d'arithmétique en Seconde, aucun traitement informatique n'est associé aux notions d'arithmétique en Seconde dans les deux manuels Ind2000 et Hyp2000, alors que le manuel Déc2000 intègre explicitement l'outil informatique avec les nombres premiers. Il propose l'algorithme mathématique [7]et la programmation de cet algorithme dans la calculatrice T1 (80 82 ou 83). Ce passage de l'algorithme mathématique à la programmation dans un langage algorithmique permet de faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique.

En général, l'habitat de la programmation est réservé dans les manuels à l'écriture scientifique des nombres et à la valeur approchée. Ceci est conforme à ce que nous trouvons dans la thèse de NGUYỄN qui met en évidence la place et le rôle des algorithmes et de la programmation des algorithmes dans l'enseignement des mathématiques secondaires.

> *« La niche principale des algorithmes est clairement de fournir des résultats numériques exacts ou approchés. Dans cette niche, que nous pouvons qualifier d'algorithmique numérique, les pratiques liées à l'usage des calculatrices et des tableurs entravent fortement la transformation des algorithmes et d'éléments de programmation en objets d'enseignement. »(p.30)*

En résumé, les auteurs des manuels de Ind2000 et Hyp2000 ne font pas vivre la niche algorithmique (avec les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers) par le bais de l'outil informatique et de programmations, alors que les éléments algorithmique / programmation / informatique font une entrée timide dans le manuel Déc2000.

[7] Il s'agit de mettre en œuvre l'algorithme des divisions successives par les nombres premiers p = 2, 3, 5, …jusqu'à $p^2 < n$ avec la calculatrice T1 (80 82 ou 83).

I. 2. Les manuels de 2004

Seul le manuel Ind04 modifie la place du contenu d'arithmétique : il choisit de le présenter avant l'étude de l'ensemble de nombres et l'écriture décimale des nombres, tandis que Déc04 et Hyp04 gardent le même choix que celui fait en 2000.

Les trois manuels ont choisi de changer le titre du chapitre qui porte sur le contenu d'arithmétique. Il est proposé chez Ind04 dans un chapitre intitulé « Les nombres » ; chez Déc04 sous l'intitulé « Calcul numérique et algébrique » et il se trouve dans le chapitre « Nombres et calculs » dans le manuel Hyp04.

Nous constatons que l'habitat de l'arithmétique avec les nombres et le calcul permet de faire vivre la niche « calcul numérique » de l'arithmétique.

I. 2. 1 La reprise des notions d'arithmétique

Contrairement aux manuels de 2000, la reprise des connaissances arithmétiques occupe une place assez importante dans les manuels de 2004. Les trois manuels proposent dans la partie « Activité » un rappel sur la notion de diviseur d'un nombre. Ind04 et Hyp04 choisissent de proposer dans la partie réservée au Cours la définition de « multiple », « divisible » et « diviseur » avant l'étude des notions fixées par les programmes, ce qui n'est le cas chez Ind2000 et Hyp2000 qui n'ont proposé aucun rappel de contenu d'arithmétique. Les critères de divisibilité sont proposés chez Ind04 dans la partie « Cours », tandis que Hyp04 les propose dans la partie « Méthodes ». Ind04 et Hyp04 font un rappel sur les nombres premiers entre eux après l'étude de la notion de nombre premier.

En ce qui concerne Déc04, qui était le seul manuel à faire des rappels dans l'édition 2000, les choix faits pour la reprise des notions d'arithmétique sont différents de ceux faits dans Déc2000. La définition de l'arithmétique et les types de tâches qui se trouvaient dans la partie « Activés » en 2000 n'apparaissent plus ; ils sont remplacés en 2004, toujours dans la partie « Activités », par un rappel de la division euclidienne et d'une définition du diviseur à partir de la division euclidienne de la façon suivantes :

> *« Si le reste de la division euclidienne de a par b est nul, alors b divise a. » (Déclic 2004, p. 11)*

Il propose ensuite un rappel de la notion de PGCD par la recherche de la liste des diviseurs de deux nombres, pour obtenir ensuite une fraction irréductible. La définition de multiple et de diviseur n'apparaissent plus dans la partie « Cours » de Déc04, et il se limite à proposer les critères de divisibilité avant l'étude des notions fixées dans les programmes de seconde. Par contre, dans la partie Méthodes, le choix de faire un rappel sur la définition de fraction irréductible et de nombres premiers entre eux est identique à celui fait dans Déc2000.

Ainsi, la reprise des connaissances arithmétiques est mise en valeur par les auteurs des manuels, alors qu'elle n'occupe aucune place dans les programmes de Seconde.

I.2.2 Les notions au programme de la classe de Seconde

- Nombres premiers

Les choix faits par Hyp04 sont identiques à ceux faits chez Hyp2000. Cependant, comme c'est le cas pour Inc04, le manuel Hyp04 met l'accent, dans la partie « Cours », sur la différence entre les nombres premiers et les nombres premiers entre eux, tandis que Déc04 ne le fait pas.

A la différence d'Ind2000, les auteurs des manuels d'Ind04 rajoutent, dans la partie « Méthodes », la technique T2 (elle consiste à diviser le nombre successivement par les nombres premiers jusqu'à ce que le quotient devienne inférieur au diviseur). Cette technique n'apparaît pas chez Déc04 qui propose exclusivement la technique qui est fondée sur la mise en œuvre de l'algorithme suivant avec la calculatrice : il s'agit de diviser successivement le nombre, lorsque les critères de divisibilité ne s'appliquent plus, par les nombres premiers $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ jusqu'à $p^2 \leq n$.

En résumé, le changement des manuels analysés montre que les auteurs de manuels ont fait le choix d'assurer davantage la niche algorithmique de l'arithmétique sauf Hyp04.

- Décomposition en facteurs premiers

Les choix faits dans Hyp04 ne suivent pas ceux faits dans Hyp2000.L'unicité de la décomposition en facteurs premiers n'est plus mentionnée chez Hyp04. De même l'aspect algorithmique dans la décomposition en facteurs premiers n'est plus proposé, on trouve seulement la table de multiplication et les critères de divisibilité pour décomposer les nombres. Par contre, Déc04 annonce l'unicité de la décomposition sous le titre « Théorème », ce qui n'était pas le cas en 2000. En ce qui concerne Ind04, il fait le même choix que celui fait en 2000.

Déc04 introduit l'aspect algorithmique de la décomposition en facteurs premiers :

> *« Une méthode algorithmique consiste à effectuer des divisions euclidiennes successives des quotients par les diviseurs premiers 2, 3, 4, 7…tant que le quotient n'est pas 1. »*
>
> *(Déclic 2004, P.17)*

Dans la partie « Méthodes », Déc04 propose de simplifier des fractions à l'aide de la décomposition en facteurs premiers et il montre sur un exemple comment l'utiliser pour la recherche de multiple commun pour réduire au même dénominateur et pour la recherche du PGCD pour avoir une fraction irréductible.

Ainsi, en ce qui concerne la niche algorithmique, le choix des auteurs des manuels est différent : Déc04 et Ind04 font en sorte de la faire vivre, alors que le manuel Hyp04 ne lui donne aucune importance.

I.2.3 Lien entre arithmétique et informatique

Les choix faits par les auteurs de manuels de 2004 sont identiques à ceux faits par ceux de 2000. Nous constatons que Déc04 propose la mise en œuvre d'un algorithme avec la calculatrice tandis qu'aucun traitement informatique n'est associé aux notions en jeu en Seconde dans les deux manuels Hyp04 et Ind04, même si ce dernier manuel souligne dans l'introduction du chapitre l'importance des nombres premiers comme outils pour certaines applications informatiques :

> *« Les nombres premiers sont toujours d'actualité, notamment dans les cartes bancaires, de plus en plus employées. » (Indice 2004, P.8)*

Nous ne constatons donc pas d'évolution dans les nouveaux manuels en ce qui concerne la place de l'algorithmique en lien avec les outils informatiques.

Conclusion

L'analyse écologique de ces trois manuels a permis de relever l'habitat et les niches que l'arithmétique y occupe. Comme nous l'avons vu, l'habitat de l'arithmétique avec les nombres et les calculs donne lieu à la niche calcul numérique, qui est renforcée par les choix de présentation des contenus au programme, ceci au détriment de la niche algorithmique sauf Déc2000 et Dec04.

Le changement des programmes a mis l'accent sur la niche algorithmique dans la partie cours avec les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers, mais l'usage de l'outil informatique avec l'arithmétique n'est pas pris en compte dans les manuels édités en 2004. D'ailleurs, ces manuels ont donné une place importante à la question de la reprise des notions d'arithmétique, plus particulièrement à la divisibilité dans la partie réservée au cours.

II. Analyse praxéologique

Nous présentons dans cette partie une analyse praxéologique des manuels de 2000, dans l'objectif de mettre en évidence les niches que l'arithmétique peut occuper dans la partie « Exercices » ; nous nous attachons en particulier à voir si les types des taches proposés dans les manuels analysés permettent de faire vivre la niche algorithmique, ainsi qu'à mettre en évidence le choix des auteurs des manuels relatif à la mise en œuvre des notions fixées par les programmes à travers des types de tâches proposées, ainsi que les techniques permettant d'accomplir les types de tâches et les éléments technologiques permettant de justifier ces techniques. Il s'agit aussi de préciser la place accordée à la reprise des connaissances arithmétiques avec les notions en jeu en classe de Seconde, et l'intégration de l'outil informatique avec ces notions.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressées à l'étude des exercices résolus qui se trouvent dans la partie « Méthodes » pour identifier les praxéologies proposées par les manuels.

II. 1 Analyse des exercices résolus

Le choix des auteurs relatif aux types tâches à proposer comme exercices résolus est différent selon les manuels ; nous avons trouvé des tâches existant dans un manuel, mais absentes dans un autre manuel. En général, nous avons répertorié, au sein de la partie « Méthodes », cinq types de tâches :

- T1. Trouver les diviseurs d'un nombre.

- T2. Décomposer un nombre en facteurs premiers.

- T3. Ecrire les fractions sous forme irréductible.

- T4. Vérifier si un nombre donné est premier.

- T5. Montrer qu'un nombre *n* est un carré parfait.

La niche que l'arithmétique occupe dans les quatre premiers de types de tâches dans ces manuels est la niche calcul numérique, alors que les manuels proposent T5 en privilégiant la niche raisonnement.

Nous nous proposons d'étudier, à présent, tous les types de tâches répertoriés en relevant les techniques d'exécution de ces types de tâches et en identifiant les éléments de la technologie justifiant ces techniques telle qu'elle proposée par les manuels.

- *T1. Trouver les diviseurs d'un nombre.*

Ind2000 est le seul manuel qui propose ce type de tâches. La technique permettant d'accomplir ce type de tâche consiste en la recherche exhaustive des diviseurs d'un nombre au moyen de l'écriture du nombre sous la forme d'un produit de deux facteurs de toutes les manières possibles, en essayant les naturels successifs, jusqu'à $\sqrt{n}$. Ecrire ensuite l'ensemble de ces diviseurs dans l'ordre croissant. La technologie justifiant cette technique s'appuie sur : si $m| n$ alors $n = m p$; m ou $p \leq \sqrt{n}$.

- *T2. Décomposer un nombre en facteurs premiers.*

La technique associée pour accomplir ce type de tâches, chez Hyp2000, porte sur l'écriture du nombre comme un produit de deux nombres à l'aide de la table de multiplication, puis factoriser successivement les nombres obtenus jusqu'à avoir uniquement des facteurs premiers.

Ind2000 propose deux techniques ; la première est identique à celle proposée par Hyp2000. La deuxième consiste à diviser successivement le nombre par les nombres premiers p = 2, 3, 5, …jusqu'à p $\leq \sqrt{n}$.

Notons que ce type de tâches n'apparaît chez Déc2000 que comme sous-type de tâches, lorsqu'on cherche à écrire les fractions sous une forme irréductible, et pour traiter ce type de tâches, il proposer d'utiliser autant que possible les critères de divisibilité et les tables de multiplication.

- *T3. Ecrire les fractions sous forme irréductible.*

Ce type de tâches est proposé seulement par Hyp2000 et Déc2000. Une seule technique est proposée par ces deux manuels. Elle se ramène à un sous-type du type de tâches T2. Il s'agit de décomposer numérateur et dénominateur en facteurs premiers, puis de simplifier jusqu'à obtenir des facteurs différents au numérateur et au dénominateur.

Hyp2000 propose un seul exercice, tandis que Déc2000 propose trois exercices.

- *T4. Vérifier si un nombre donné est premier.*

Ce type de tâches est proposé exclusivement chez Déc2000.

Pour la résolution de ce type de tâches, Déc2000 propose une technique algorithmique à mettre en œuvre avec la calculatrice : diviser le nombre *n* successivement par les nombres premiers p = 2, 3, 5, 7, … Jusqu'à $p^2 \leq n$ pour la mettre en œuvre avec la calculatrice.

Comme nous l'avons déjà dit, Déc2000 propose dans la partie « Cours » un exercice relatif à ce type de tâches en proposant une autre technique. Il s'agit tout d'abord d'appliquer les critères de divisibilité connus. Lorsqu'ils ne s'appliquent pas, la deuxième technique consiste à diviser le nombre n successivement par les nombres premiers 2, 3, 5, 7,… Jusqu'à ce que le quotient devienne inférieur au diviseur. Le manuel ne propose aucun discours technologique pour justifier cette technique.

Notons enfin que ce type de tâches devient un sous-type de tâches chez Ind2000 dans la résolution du type de tâches T2 lorsqu'il donne un nombre non décomposable et montre que ce nombre est premier car il n'apparaît pas dans la table de multiplication par 2, 3, …9, en s'appuyant ainsi sur une seule technique justifiée par la définition des nombres premiers.

- *T5. Montrer qu'un nombre n est un carré parfait.*

Hyp2000 est le seul manuel qui propose ce type de tâches. La technique permettant d'accomplir ce type de tâches porte sur la factorisation de *n* sous la forme carrée sans le décomposer en facteurs premiers. Cette technique peut être justifiée par la définition d'un carré parfait : un carré parfait est le carré d'un entier naturel.

En résumé, nous constatons que ces quatre types de tâches permettent de faire vivre la niche « Calcul numérique » de l'arithmétique. La niche raisonnement est absente dans la partie cours et Méthodes des manuels analysés sauf Hyp2000. Comme nous l'avons trouvé dans la partie I, la niche algorithmique occupe une place relativement importante chez Déc2000. Tandis qu'elle prend une place marginale chez Ind2000 et Hyp2000 à travers l'aspect algorithmique de la décomposition en facteurs premiers, car ce dernier est rajouté comme une deuxième technique dans les deux manuels.

Nous passons maintenant à l'analyse des exercices dans les trois manuels Déc2000, Hyp2000 et Ind2000.

II.2 Analyse des Exercices

L'analyse des manuels nous a permis de distinguer deux catégories de types de tâches :

II.2.1 Types de tâches relatives à une application directe sur la partie cours.

II.2.2 Types de tâches qui ne sont pas des applications directes sur le contenu d'arithmétique.

Notons que la plupart de types de tâches dans la deuxième catégorie est proposée dans les manuels en tant que énoncés indépendante de la première catégorie, ceci nous a permet de dissimuler les deux catégories.

Nous avons tenté de présenter les types de tâches associés aux notions d'arithmétique selon l'organisation mathématique suivante : Divisibilité, Nombres premiers, décomposition en facteurs premiers, PGCD, nombres premiers entre eux. Le choix de mettre le PGCD après la décomposition en facteurs premiers dans cette présentation est justifié par le fait que la recherche du PGCD peut être faite à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

II.2. 1. Exercice d'application sur la partie Cours

Pour cette catégorie nous avons repéré 11 types de tâches qui sont des applications simples sur les notions d'arithmétique :

- *T1 : Montrer qu'un nombre n est divisible par un nombre m.*

Plusieurs techniques disponibles permettent d'accomplir ce type de tâche :

1. la première technique consiste à faire apparaître m comme un facteur de n par la factorisation de n comme produit de deux nombres. Le discours justifiant cette technique est basé sur la définition : $b|\, a$ si et seulement s'il existe $q \in$ N tel que : $a = bq$.
2. la deuxième technique permet de montrer que $\frac{n}{m} \in$ N, cette technique est justifiée par la technologie précédente ($b|\, a$ si et seulement s'il existe $q \in$ N tel que $a = bq$).

3. la troisième technique est construite autour du reste de la division de *n* par *m*. La technologie associée à cette technique est : si le reste de la division euclidienne de *n* par *m* est nul, alors le nombre *n* est divisible par *m*.
4. la quatrième technique conduit à examiner les critères de divisibilité connus.
5. la cinquième technique consiste à écrire *n* comme un produit de deux nombres premiers entre eux *m* et *k*. Le discours justifiant cette technologie : *a*, *b*, *c* étant des entiers naturels, si *a* divise *b*, *c*, et si *b*, *c* sont premiers entre eux, alors *a* divise le produit *b c*.

Ce type de tâches est proposé dans deux exercices chez Hyp2000, tandis que Déc2000 et Ind2000 se limitent à proposer un seul exercice traitant cette tâche.

- *T2 : Déterminer si un nombre n est un diviseur d'un autre nombre m.*

Quatre techniques sont disponibles pour résoudre ce type de tâches :

1. Ecrire *m* sous la forme $m = k\,n$. Cette technique repose sur la définition suivante : $b|\,a$ si et seulement s'il existe $q \in$ N tel que $a = bq$.
2. Montrer que $\frac{m}{n}$ = k $\in$ N. La technique précédente ($b|\,a$ si et seulement s'il existe $q \in$ N tel que $a = bq$) justifie aussi cette technique.
3. Observer le reste de la division de *m* par *n*. La technologie justifiant cette technique est centrée sur le reste de la division euclidienne de *m* par *n* est nul, alors le nombre *n* est diviseur de *m* et réciproquement.
4. Voir si *m* est divisible par *n* en utilisant les critères de divisibilité. Le discours qui justifie cette technique est centré sur la définition équivalente : *b* est un diviseur de *a* signifie que *a* est un divisible par *b*.

Seul Ind2000 propose cet exercice.

- *T3 : Déterminer si un nombre n décomposé en facteurs premiers est un diviseur d'un nombre m décomposé en facteurs premiers.*

Les techniques associées à ce type de tâches sont les suivantes :

1. Essayer d'écrire *m* qui est décomposé en facteurs premiers sous la forme $m = n\,k$ ou $\frac{m}{n}$ = k ; k$\in$ N. La justification de cette technique s'appuie sur la définition : $b|\,a$ si et seulement s'il existe $q \in$ N tel que $a = bq$.
2. Comparer les facteurs et les puissances de deux nombres. Le discours technologique repose sur la mise en œuvre de la règle suivante : pour qu'un nombre B soit un diviseur de M, il faut que la décomposition de B en facteurs premiers ne contienne que des facteurs premiers qui figurent dans la décomposition de M avec un exposant au plus égal.

Hyp2000 et Ind2000 proposent 2 exercices traitant ce type de tâches, alors qu'aucun exercice de ce type ne se trouve chez Déc2000.

- *T4 : Déterminer la liste des diviseurs d'un nombre.*

Pour accomplir ce type de tâches plusieurs techniques sont disponibles :

1. Diviser successivement par tous les entiers inférieurs à n. Le discours justifiant cette technique est basé sur la propriété si $m \mid n : m \leq n$.
2. Ecrire le nombre sous la forme d'un produit de deux facteurs de toutes les manières possibles, en essayant les naturels successifs, jusqu'à $\sqrt{n}$. Ecrire l'ensemble de ces diviseurs dans l'ordre croissant. La technologie justifiant cette technique s'appuie sur : si $m \mid n$ alors $n = m\,p$; $m \leq \sqrt{n}$ ou $p \leq \sqrt{n}$.
3. Décomposer le nombre en facteurs premiers, et trouver tous les diviseurs obtenus de produit de deux facteurs premiers dans la décomposition de n. Cette technique peut être justifiée par le fait que chaque nombre entier peut au moins se décomposer en produit de facteurs premiers.

Nous avons trouvé dans l'analyse des exercices résolus que Ind2000 est le seul manuel qui a proposé ce type de tâche ; ce type de tâches est plus présent dans la partie Exercice chez Ind2000 que chez les autres manuels. Nous trouvons cinq exercices chez Ind2000, deux exercices chez Hyp2000 et un exercice pour Déc2000.

- *T5 : Vérifier si un nombre donné est premier.*

Ce type de tâches peut être accompli par les techniques suivantes :

1. une technique permettant de factoriser le nombre $n = ab$; $a < n$ pour savoir si n est premier. La définition des nombres premiers (un nombre premier est un entier naturel ayant exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.) justifie cette technique.
2. une technique algorithmique consiste à diviser le nombre n successivement par les nombres premiers 2, 3, 5, 7,… jusqu'à ce que le quotient devienne inférieur au diviseur. Le discours technologique justifiant cette technique est qu'un nombre composé n admet un facteur premier p tel que le quotient de n par p est supérieur ou égal à p.
3. une deuxième technique algorithmique conduit à diviser le nombre n successivement par les nombres premiers p = 2, 3, 5, 7, … Jusqu'à $p^2 \leq n$. La technologie permettant de justifier cette technique est : Soit n un entier ($n \geq 2$). Si n n'admet aucun diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$, alors il est lui-même premier. ».

Comme nous l'avons trouvé dans la partie I, les deux techniques sont proposées dans la partie Cours chez Déc2000, ce dernier utilise la technique t3 avec la calculatrice.

4. une technique porte sur l'application des critères de divisibilité connus, et sinon, sur l'application d'une des techniques précédentes. La technologie associée est : Critères de divisibilité.

5. une technique qui peut s'appliquer selon la taille du nombre : si *n* n'est pas trop grand, on consulte le table des nombres premiers, obtenue par la méthode du Crible d'Eratosthène. La technologie associée est : Crible d'Eratosthène.

Nous avons trouvé que ce type de tâches prend une place assez importante dans la partie Cours et Méthodes chez Déc2000. De façon surprenante, Déc2000 ne propose qu'un seul exercice dans la partie Exercices. Ind2000 fait comme Déc2000, il ne propose qu'un seul exercice, tandis que ce type de tâches apparaît chez Hyp2000 dans 6 exercices.

- *T6 : Déterminer les nombres premiers inférieurs à un nombre donné.*

L'accomplissement de ce type de tâches repose sur les deux techniques disponibles :

1. utiliser les critères de divisibilité et la table de multiplication.

2. Eliminer tous les multiple de 2 supérieurs à 2, puis tous les multiples de 3 supérieurs à 3, puis les multiples de 4,….on s'arrête lorsqu'on atteint le nombre fixé. Le discours technologique fait appel au Crible d'Eratosthène.

Un seul exercice se trouve chez Hyp2000 et Ind2000 traitant ce type de tâche, tandis qu'il est absent chez Déc2000.

- *T7 : Trouver la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.*

La résolution de ce type de tâches fait appel à l'une des deux techniques suivantes :

1. Factoriser successivement jusqu'à avoir des facteurs premiers. Cette technique est centrée sur les critères de divisibilité.

2. Appliquer l'algorithme des divisions successives par les nombres premiers p = 2, 3, 5, … jusqu'à $p \leq \sqrt{n}$. Cette technique est justifiée par le théorème : « Tout entier naturel *n*, autre que 0 et 1 et non premier, admet au moins un diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$ ».

Ce type de tâches a été proposé chez Hyp2000 et Ind2000 dans la partie « Méthodes », et de manière cohérente, il occupe une place importante dans la partie « Exercices » dans les deux manuels. Nous trouvons 18 exercices chez Hyp2000 et 9 exercices chez Ind2000. Nous constatons que ce type de tâches est totalement absent du manuel Déc2000 comme exercice d'application directe de la décomposition en facteurs premiers. Par contre, il apparaît comme un sous-type de tâches dans les types de tâches liées aux des fractions irréductibles. Ceci peut être justifié par le fait que Déc2000 recourt à la décomposition en facteurs premiers exclusivement pour simplifier les expressions avec des radicaux ou des fractions.

- *T8 : Trouver la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, puis donner leurs diviseurs communs.*

La technique permettant d'accomplir ce type de tâches nécessite d'abord de décomposer le nombre en facteurs premiers (la tâche T8 devient ici un sous-type de tâches). Chercher ensuite les diviseurs communs en prenant les facteurs communs, puis faire les produits possibles entre ces facteurs communs. La technologie justifiant cette technique porte sur le fait que les diviseurs communs de deux entiers sont les produits possibles entre les facteurs communs de deux entiers.

Nous avons repéré ce type de tâches seulement chez Ind2000 dans 5 exercices.

- *T9 : Trouver le PGCD de deux nombres entiers a et b.*

Pour ce type de tâches, nous avons identifié quatre techniques :

1. une technique consistant à trouver la liste de diviseur de chaque nombre. ~~A ce propos~~ (Dans ce cas, le type de tâches T4 devient un sous-type de tâches qui constituent la technique nécessaire à T9), puis à faire l'intersection entre les deux ensembles obtenus et à prendre le plus grand élément de cette intersection qui contient exactement les diviseurs communs aux deux nombres. La technologie justifiant cette technique s'appuie sur la définition suivante: Soient $a \in$ N, $b \in$ N, non tous les deux nuls ; l'ensemble D des diviseurs communs à *a* et *b* admet un plus grand élément. On l'appelle le plus grand commun diviseur de *a* et *b* et on le note pgcd (*a*, *b*).
2. une technique consistant à appliquer l'algorithme d'Euclide aux deux entiers. Cette technique est justifiée par le discours suivant : Si le reste de la division euclidienne de *a* par *b* (avec *b* < *a*) est égal à *r*, alors PGCD (*a* ; *b*) = PGCD (*b* ; *r*).
3. une technique qui met en œuvre une démarche algorithmique. Il s'agit de faire des soustractions successives de deux entiers. Le discours justifiant cette technique repose sur la relation entre la division euclidienne et l'algorithme des soustractions successives.
4. une technique reposant sur la décomposition de *a* et *b* en facteurs premiers. Le type de tâches T8 devient un sous-type de tâches pour accomplir T10. La technologie justifiant cette technique est basée sur la définition suivant Si a = $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha i}$ et b= $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta i}$, l'ensemble des leurs diviseurs communs est l'ensemble des diviseurs de l'entier d = $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma i}$ avec, pour tout indice i, γ = min (αi , βi).

Hyp2000 est le seul qui propose ce type de tâches à travers un seul exercice.

- *T10 : Déterminer si deux entiers sont premiers entre eux.*

La technique nécessaire pour accomplir ce type de tâches nécessite de chercher le PGCD de deux entiers, on est ramené à la tâche T10. Le discours technologique se centre sur la définition des nombres premiers entre eux : deux nombres sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Ce type de tâches est relevé uniquement chez Ind2000 dans 2 exercices.

- *T11 : Ecrire les fractions sous forme irréductible.*

Deux techniques sont disponibles pour accomplir ce type de tâches :

1. La première technique consiste à décomposer les numérateurs et les dénominateurs en facteurs premiers (le tâche T8 devient ici un sous-type de tâches nécessaire pour résoudre ce type de tâches), puis à simplifier les fractions jusqu'à ne plus avoir de facteurs communs aux numérateurs et dénominateurs. Le discours technologique est basé sur la définition suivante : une fraction irréductible si son numérateur et dénominateur n'ont pas de facteur commun.
2. La deuxième technique repose sur la recherche de pgcd en utilisant l'algorithme d'Euclide ou celui des soustractions successives (on est ramené au tâche T10) ; une fois le pgcd déterminé, on divise le numérateur et le dénominateur par le pgcd pour avoir une fraction réduite. La technologie justifiant cette technique est centré sur la définition suivante :

$\frac{a}{b}$ une fraction irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux c.à.d. si PGCD (a, b) = 1.

Ce type de tâches est repéré dans les trois manuels. Déc2000 et Hyp2000 consacrent chacun 6 exercices pour traiter ce type de tâches, tandis qu'Ind2000 propose 7 exercices.

II.2. 2. Exercices qui ne sont pas des applications directes du contenu d'arithmétique.

- *T12: Vérifier si un nombre fixé est parfait.*

La technique permettant d'accomplir ce type de tâches s'appuie sur le sous-type de tâches T4. Il s'agit de trouver la liste des diviseurs du nombre. Ensuite, il faut calculer leur somme et comparer cette somme avec le nombre donné au départ. La technologie qui justifie cette technique repose sur la définition de nombres parfaits : un nombre entier positif est dit parfait s'il est égal à la somme des ses diviseurs propres (à l'exception de lui-même, mais 1 compris).

Hyp2000 est le seul qui propose ce type de tâches dans un seul exercice.

- *T13 : Vérifier si un nombre n est un carré parfait.*

Deux techniques sont disponibles pour accomplir ce type de tâches :

1. la première technique conduit à utiliser le sous-type de tâches T8. Il s'agit de décomposer n en produit de facteurs premiers, puis d'écrire les facteurs premiers sous la forme carrée, et enfin de regarder s'il reste ou non des facteurs isolés. Le discours justifiant cette

technique repose sur la définition d'un carré parfait : un carré parfait est le carré d'un entier naturel.

2. la deuxième technique conduit à écrire *n* sous la forme carrée sans le décomposer en facteurs premiers. La définition de carré parfait citée en haut peut justifier cette technique.

Nous avions déjà repéré ce type de tâches comme un exercice résolu chez Hyp2000 ; il est proposé dans la partie « Exercices » de ce manuel dans 2 exercices. Il apparaît aussi chez Déc2000 à travers de 2 exercices. Par contre, il est absent du manuel Ind2000.

- *T14 : Démontrer qu'un nombre donné sous la forme* $\overline{a_n \quad a_{n-1} \ldots \quad a_1 \quad a_0}$ *est divisible par un nombre donné, connaissant certaines relations sur les écritures.*

L'accomplissement de ce type de tâches repose sur la connaissance de la numération décimale de position qui permet de transformer l'écriture sous la forme $a_0 + 10\ a_1 + 100\ a_2 + \ldots + 10^n a_n$, ce qui conduit à des équations qu'il faut résoudre. La technologie permettant de justifier cette technique est : dans le système décimal, un nombre codé $a_n \quad a_{n-1} \ldots \quad a_1 \quad a_0$ est égal à $\sum_{k=0}^{k=n} a^k 10^k$.

Ce type de tâches est relevé dans 3 exercices chez Déc2000. Aucun exercice ne relève de ce type de tâches chez Hyp2000 et Ind2000.

- *T15 : trouver deux nombres entiers p et q tels que pq = k ; k* $\in N$.

La technique permettant d'accomplir ce type de tâches conduit à écrire le nombre *k* sous la forme de tous les produits possibles ; chaque produit fournit une solution. Le discours justifiant cette technique est : un nombre entier peut s'écrire comme produit de deux nombres.

Déc2000 est le seul manuel qui propose ce type de tâches à travers 2 exercices.

- *T16 : Vérifier que deux nombres fixés sont amicaux*

Deux techniques disponibles pour résoudre ce type de tâches :

1. trouver la liste des diviseurs de chaque nombre. Calculer la somme de leurs diviseurs et observer si elle est égale à l'autre nombre. La technologie permettant de justifier cette technique est la suivante : deux entiers positifs *m* et *n* sont dits « amicaux », si la somme des diviseurs de *m* (autres que *m*) est égale à *n* et simultanément la somme des diviseurs de *n* (autre que *n*) est égale à *m*.

2. décomposer un des deux nombres en facteurs premiers, calculer la somme de ses diviseurs et observer si elle est égale à l'autre nombre ; faire la même chose avec le deuxième nombre. La technologie justifiant cette technique est la même que la précédente.

Ce type de tâches est repéré chez Hyp2000 et Ind2000 dans un seul exercice. Il n'apparaît pas chez Déc2000.

Pour les tâches suivantes, nous avons choisi de les présenter sans les regrouper dans la famille de types de tâches pour bien montrer les conditions particulières pour accomplir ces tâches :

- *T17 : Trouver un nombre parfait compris entre deux entiers.*

La résolution ce type de tâches nécessite de chercher les nombres qui sont égaux à la somme de leurs diviseurs en utilisant les critères de divisibilité. La définition de nombre parfait citée précédemment permet de justifier cette technique.

Cette tâche est uniquement proposée chez Déc2000 dans un seul exercice.

- *T18 : Montrer que le carré d'un nombre pair est un nombre pair, et celui d'un nombre impair est impair.*

Les techniques associées à cette tâche sont :

1. utiliser la forme paire et impaire, développer l'expression littérale. Cette technique peut être justifiée par deux technologies. La première renvoie à la caractérisation d'un nombre pair par son écriture sous la forme $2k$; et à la caractérisation d'un nombre impair par son écriture sous la forme la forme $2k + 1$.

2. la deuxième repose sur la reconnaissance qu'un nombre pair est un nombre dont le reste de la division par 2 est 0, et un nombre impair est un nombre dont le reste de la division est 1.

3. la troisième consiste à regarder les chiffres des unités du nombre et son carré. Ecrire les nombres impairs à un chiffre les élever au carré, regarder les chiffres des unités. Le discours justifiant cette technologie est : le chiffre des unités du carré d'un nombre est égal au chiffre des unités du carré du nombre formé par le chiffre des unités du premier nombre. Dans la numération décimale, un nombre est impair si et seulement si le chiffres des unités est 1, 3, 5, 7, 9.

Ce type de tâches est traité dans 2 exercices chez Hyp2000 et dans un seul exercice chez Déc2000..

- *T19 : Démontrer que tout entier naturel n s'écrit $n = 3p$; $n= 3p +1$; $n= 3p +2$*

Il s'agit d'une tâche dont la résolution peut se faire avec la technique suivante :

Soit un entier n, on le divise par 3, on a : $n = 3 \times q + r$; $0 \leq r < 3$

Trois cas sont possibles : $n = 3\,p$; ou $n = 3p +1$; ou $n = 3p + 2$

En effet, comme $0 \leq r < 3$, on a $r = 0$ ou $r = 1$ ou $r = 2$.

Le discours justifiant cette technique repose sur la définition de la division euclidienne.

Cette tâche est repérée uniquement chez Hyp2000 dans un exercice.

- *T20 : Montrer que $(n+1)^2 - n^2$ est un nombre impair, ensuite l'appliquer par un nombre fixé.*

Pour accomplir cette tâche, la technique nécessite de développer l'écriture proposée sous la forme $2n+1$. Le discours justifiant cette technique repose sur la reconnaissance les règles d'algèbre.

La résolution de la suite de cette tâche porte sur la technique suivante : Soit a un nombre impair, trouver deux nombres consécutifs dont la différence des carrés est égale à a. Diviser le nombre par *2*, prendre le quotient q et considérer q et son successeur $q+1$. Les nombres cherchés sont q et $q + 1$. Cette technique est justifiée par le résultat suivant : « pour tout entier n, $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$ ».

Déc2000 est le seul manuel qui propose cette tâche dans un exercice.

- *T21 : Montrer que, si $a^2 - b^2$ est premier, alors les entiers a et b sont consécutifs.*

La technique ici consiste à factoriser $(a^2 - b^2)$ sous la forme $(a - b)(a + b)$; comme le nombre est premier, soit $a + b= 1$, soit $a - b = 1$; dans le premier cas, on a $a = 1$ et $b= 0$ ou $a = 0$ et $b = 1$: les deux nombres sont consécutifs ; dans le deuxième cas, on a $a-b = 1$, soit $a = b+1$, les deux nombres a et b sont consécutifs. Les règles algébriques et la définition des nombres premiers permettent de justifier cette technique.

Cette tâche est relevée uniquement chez Ind2000 à travers d'un seul exercice.

- *T22 : Montrer que la somme de trois entiers impairs consécutifs n'est jamais un nombre premier.*

La technique permettant d'accomplir cette tâche conduit à exprimer les trois nombres impairs consécutifs sous la forme $2n +1$, $2n+3$, $2n+5$. Calculer la somme et reconnaître qu'on peut mettre 3 en facteur. Le discours qui justifie cette technique porte sur le fait que la différence entre deux nombres impairs consécutifs est égale à 2.

Cette tâche apparaît uniquement chez Hyp2000 dans un seul exercice.

- *T23 : Montrer que la somme des inverses des diviseurs d'un nombre donné est entier.*

Cette tâche fait appel au type de tâches T4. Il s'agit d'écrire la liste des diviseurs. Prendre l'inverse de chaque diviseur. Ajouter les fractions obtenues. Réduire au même dénominateur et simplifier la fraction obtenue. La définition de l'inverse d'un nombre et les règles de simplification des fractions permet de justifier cette technique.

Cette tâche est relevée uniquement chez Déc2000 dans un seul exercice.

- *T24 : Déterminer les cinq premiers nombres premiers existant dans la forme $2^n - 1$ où $n \in N$.*

Il s'agit d'une tâche dont la résolution permet de développer la technique suivante :

Donner à n les valeurs 1, 2, 3, etc et faire le calcul, éliminer les nombres composés et s'arrêter jusqu'à ce que l'on ait 5 nombres premiers.

Le discours permettant de justifier cette technique est : la suite des nombres de la forme $2^n - 1$ est croissante, il y au moins cinq nombres premiers de la forme $2^n - 1$.

Déc2000 réserve 2 exercices pour traiter cette tâche, alors que Hyp2000 et Ind2000 ne lui donne aucune place.

- *T25*[8] *: Trouver une valeur de n pour laquelle le nombre de la forme 2^n - 1 n'est pas premier.*

Il s'agit d'une tâche dont la résolution fait appel à la technique suivante :

Donner des valeurs à *n* et observer si le résultat est premier ou pas. Le discours justifiant cette technique repose sur la définition de nombres premiers.

Cette tâche est repérée chez Déc2000 et Ind2000 dans un seul exercice.

- *T26 : Vérifier si la propriété suivante : 2^{2^n} + 1 est premier, est vraie pour n = 1, 2, 3.*

L'accomplissement de cette tâche repose sur les valeurs 1, 2, 3 données à *n* et observer si le nombre obtenu est premier ou pas. La définition de nombre premier permet de justifier cette technique.

Cette tâche fait l'objet d'un exercice chez Ind2000. Il est absent des manuels Hyp2000 et Déc2000.

- *T27 : Donner les couples de nombres premiers jumeaux inférieurs à un nombre.*

Ce type de tâches comporte la tâche T6 comme sous-tâche. Il s'agit d'écrire la liste de nombres premiers et observer les nombres premiers dont la différence est 2. Cette technique repose sur la définition de nombres premiers jumeaux : la différence entre deux nombres premiers jumeaux vaut 2.

Cette tâche est relevée dans un exercice chez Ind2000 et chez Hyp2000.

Le tableau ci-dessous synthétise la fréquence de l'apparition des types de tâches dans les manuels de 2000 et de 2004 :

[8] Les types de tâches T25, T26 sont associés aux nombres de Mersenne, et T27 est relatif aux nombres de Fermat.

Manuels de 2d	2000			2004		
	Déclic	Hyperbole	Indice	Déclic	Hyperbole	Indice
T1	1	2	1	1	1	1
T2	---	---	1	---	---	---
T3	---	2	2	---	---	---
T4	1	2	5	2	4	4
T5	1	6	1	2	7	4
T6	---	1	1	---	---	1
T7	---	18	9	3	11	7
T8	---	---	5	---	1	---
T9	---	1	---	1	1	---
T10	---	---	2	---	3	---
T11	6	6	7	4	7	1
T12	---	1	---	---	---	1
T13	2	2	---	2	1	---
T14	3	---	---	3	---	---
T15	2	---	---	1	---	---
T16	---	1	1	----	1	---
T17	1	---	---	1	---	---
T18	1	2	---	1	2	---
T19	---	1	---	----	---	---
T20	1	---	---	1	---	---
T21	---	---	1	---	---	1
T22	---	1	---	---	1	1
T23	1	---	---	1	---	---
T24	2	---	---	2	---	1
T25	1	---	1	1	---	1
T26	---	---	1	---	---	1
T27	---	1	1	---	1	1

Nous remarquons que T7, l'application directe sur la décomposition en facteurs premiers, est assez présente chez Ind2000 et Hyp2000, contrairement à Déc2000 qui ne donne aucun exercice direct. Cependant, le type de tâches T7 se trouve comme sous-type de tâches avec certains exercices. Avec le changement des manuels en 2004, nous remarquons une apparition timide de T7 dans Dec04, qui par contre, recule dans Ind04 et Hyp04.

Nous trouvons aussi que la fréquence d'apparition de T11 a diminué dans les manuels de 2004 surtout chez Ind04 et Déc04.

Nous trouvons aussi que les niches « calcul numérique » et « raisonnement » de l'arithmétique sont plus présentes dans les exercices que la niche algorithmique. Néanmoins, cette dernière niche vit dans certains exercices à côte de la niche calcul numérique ; elle vit aussi avec la niche raisonnement dans d'autres exercices.

Nous allons exploiter cette étude dans les chapitres VI et VII elle permettra d'étudier la vie de certains exercices dans la pratique des enseignants de l'arithmétique.

Conclusion

L'étude que venons de mener met en évidence l'habitat et les niches occupées par l'arithmétique dans les trois manuels utilisés par les enseignants interrogés dans notre questionnaire.

Il apparaît assez nettement que le manuel Déclic se distingue par une plus grande adéquation avec les intentions du programme relatives à l'intégration de l'outil informatique avec l'aspect algorithmique.

Comme nous l'avons montré, les manuels offrent une variété importante de types de tâches relatives aux notions d'arithmétique en Seconde.

En comparant les trois manuels les plus utilisés par les enseignants ayant répondu à notre questionnaire avec les manuels analysés précédemment, nous constatons une grande diversité dans le choix des auteurs des manuels pour mettre en place l'arithmétique. Nous faisons l'hypothèse que ceci va entrainer des choix différents chez les enseignants en ce qui concerne la préparation de leur cours, et des différences dans leur pratique de l'arithmétique en classe.

Ainsi cette étude a montré qu'il existe un écart important entre les intentions des programmes et leur réalisation dans certains manuels.

Conclusion de l'analyse des manuels de collège et de seconde

Nous avons vu à travers cette analyse des manuels de collège et de Seconde l'habitat et les niches que l'arithmétique occupe durant l'évolution des programmes, ainsi que les organisations mathématiques et le statut des définitions dans les manuels depuis les années soixante-dix jusqu'aux manuels correspondant aux derniers programmes.

Nous avons trouvé que l'habitat de l'arithmétique, dans la période des mathématiques modernes, se trouve en $5^{ème}$ avec trois niches : « Théorie des nombres » ; « Calcul numérique » et « Ensembliste ». En classe de $4^{ème}$ et $3^{ème}$, la niche « Structurelle » apparaît. Dans la période de la contre-réforme, les auteurs de manuels opposent une certaine résistance à la disparition de l'arithmétique des programmes. Ils introduisent le PGCD et le PPCM en $4^{ème}$ pour le travail sur les fractions.

Lors de la réintroduction de l'arithmétique dans les programmes de 1999 les contenus d'arithmétique sont proposés dans un chapitre intitulé ''Arithmétique'', en favorisant la niche algorithmique de l'arithmétique. Dans la période contemporaine, l'habitat de l'arithmétique se trouve tout au long du collège. Conformément aux derniers programmes, les manuels de troisième et de seconde mettent davantage l'accent sur la niche algorithmique.

Cependant la volonté des programmes de mettre en œuvre une démarche algorithmique avec l'outil informatique est peu prise en compte dans les manuels du collège, et presque absente dans les manuels de Seconde. Nous faisons l'hypothèse que le fait que la volonté des programmes de développer la niche algorithmique de l'arithmétique en lien avec l'usage informatique n'ait été que peu prise en compte dans les manuels pourrait avoir été un argument pour la disparition de l'arithmétique des programmes de Seconde de 2009.

Il faut également noter que les manuels conformes aux derniers programmes font vivre la niche raisonnement de l'arithmétique.

Concernant les organisations mathématiques, les manuels proposent les mêmes organisations que les programmes. L'étude du PGCD et du PPCM dans la période des mathématiques modernes est faite après l'étude de la décomposition en facteurs premiers. Ce choix est différent de celui fait dans les manuels actuels. Ces derniers mettent l'étude du PGCD avant celle de la décomposition en facteurs premiers en privilégiant l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD.

Quant aux définitions relevées dans les manuels analysés, nous avons repéré trois types de définition durant le changement des manuels. Les définitions de dénominations et les définitions équivalentes sont dominantes dans les manuels de la période des mathématiques modernes, et l'aspect existence et l'unicité sont évoqués dans les manuels avec la division euclidienne et la décomposition en facteurs premiers sans donner lieu à une démonstration.

Les deux types de définitions, « dénomination » et « équivalente », sont remplacés dans les manuels de la période de la contre-réforme par les définitions par l'exemple.

Les trois types de définitions, définition de dénomination, définitions équivalentes et définitions par l'exemple, sont présentes dans les manuels actuels du collège, alors que les manuels de seconde proposent le contenu d'arithmétique avec des définitions de type dénomination. L'unicité de l'objet défini n'est évoquée qu'en classe de seconde avec la décomposition en facteurs premiers dans les manuels qui ont eu cours jusqu'en 2008.

PARTIE 3

CHAPITRE VI

Analyse des rapports personnels des enseignants de la classe de Seconde

Introduction

Afin de mieux cerner le rapport personnel des enseignants aux objets de l'arithmétique dans notre travail, nous avons mené une enquête dont les questions de recherche sont les suivantes :

Quelles sont les contraintes et quelles sont les conditions auxquelles les enseignants sont assujettis lorsqu'ils préparent leurs cours ? Est-ce que les enseignants disposent d'une certaine liberté de choix par rapport à l'enseignement de l'arithmétique ? Est-ce qu'il y a des différences significatives entre l'arithmétique dans les programmes et les manuels et ce que disent les enseignants concernant leur enseignement de l'arithmétique ? Plus particulièrement, nous chercherons à identifier quels sont les choix des enseignants pour enseigner les notions d'arithmétique en termes de définitions et méthodes ? Ces choix sont-ils les mêmes d'un enseignant à l'autre ? Est-ce que les enseignants de seconde prennent en charge la reprise des notions d'arithmétique étudiées au collège ? Quelles notions d'arithmétique étudiées au collège sont retravaillées en classe de Seconde ? Parmi ces notions, quelles notions concernées à retravailler avec celles qui sont objet d'étude en seconde (jusqu'au programme 2008) ? Quelles sont les conséquences de la disparition de l'arithmétique dans les nouveaux programmes ?

Pour apporter des éléments de réponses à ces questions, nous avons construit ce questionnaire en le subdivisant en trois parties :

- La première partie concerne d'une part les aspects généraux, et d'autre part les choix globaux d'enseignement des notions d'arithmétique en termes de définitions, méthodes,….

- La deuxième partie comporte deux exercices demandant de mobiliser à la fois les notions d'arithmétique étudiées au collège et les notions étudiées en classe de Seconde. Plus particulièrement, la relation de divisibilité et la recherche d'un multiple commun en lien avec la décomposition en facteurs premiers. Ainsi, cette partie vise à recueillir des informations sur ce que les enseignants attendent de leurs élèves et la manière dont ils proposent des corrections des exercices à leurs élèves, et ainsi leur pratique face à ces exercices proposés.

- La troisième partie s'intéresse plutôt à recueillir le point de vue des enseignants sur les raisons et les conséquences de la disparition de l'arithmétique des programmes de seconde en 2009.

Certaines des questions proposées dans la première partie sont également proposées aux élèves ; il en est de même des deux exercices proposés dans la deuxième partie du questionnaire des enseignants. Ceci a pour objectif de confronter les réponses des élèves avec ce que les enseignants cherchent à mettre en place dans la classe. Nous avons élaboré ce questionnaire au début de l'année scolaire 2008/2009. Les réponses sont obtenues durant l'année scolaire 2008/2009. Le texte complet du questionnaire est donné en annexe 3.

I. Analyse a priori du questionnaire destiné aux enseignants

Comme nous l'avons dit, le questionnaire est subdivisé en trois parties. Chaque partie permet de cerner certains aspects du rapport personnel des enseignants aux objets d'arithmétique. Nous allons dans ce qui suit présenter l'analyse a priori pour chacune des trois parties.

I.1 Première partie

Cette partie comporte douze questions concernant les points suivants :

- L'expérience des enseignants relativement aux objets d'arithmétique (Q1, Q3 et Q4)**.**
- L'établissement d'exercice de l'enseignant (Q2).
- Les ressources utilisées pour la préparation du cours et des exercices (Q5 et Q6).
- La définition du terme « arithmétique » en classe (Q7).
- La reprise des notions d'arithmétique en Seconde et les difficultés rencontrées par les élèves avec ces notions (Q8 et Q9).
- La pratique des enseignants concernant les notions de pgcd et de nombres premiers (définition) (Q10 et Q11).
- L'utilisation de la calculatrice avec les notions d'arithmétique (Q12).

Nous détaillons dans ce qui suit les points annoncés :

I.1.1 L'expérience des enseignants relativement aux objets d'arithmétique:

Deux questions concernent l'expérience des enseignants dans l'enseignement de l'arithmétique (Q1 et Q4) et leur expérience dans ce domaine lorsque ils étaient eux–même élèves (Q3).

Avant de présenter ces questions, nous soulignons que la question 2 « *Établissement actuel* » est une question de présentation. Elle permet d'avoir des informations sur la répartition géographique et sur le type d'établissement d'exercice des enseignants ayant accepté de répondre à notre questionnaire.

- Pour les deux questions Q1 et Q4 **:** La question 1 : « *Nombre d'années d'enseignement »* et la question 4 : **«** *Avez-vous déjà enseigné l'arithmétique ? Si oui à quel(s) niveau(x) et en quelle(s) année(s) ? »,* permettent de savoir si les enseignants ont une expérience dans l'enseignement de l'arithmétique, et s'ils avaient déjà enseigné l'arithmétique avec l'ancien programme ; elles permettent de voir ainsi pour certains enseignants l'influence d'avoir pu enseigner l'arithmétique dans la période mathématiques modernes, sur leur façon de traiter l'arithmétique aujourd'hui. Notons que, dans la mesure où nous avons rappelé au début du questionnaire le sens du terme arithmétique dans notre travail en citant ces objets, nous faisons l'hypothèse que la réponse à la question sur l'enseignement de l'arithmétique ne prête pas à confusion.

- Concernant la question 3 : **«** *Quelle est votre formation en arithmétique (enseignement secondaire, enseignement supérieur, formation initiale, formation continue) ? »*, permet de savoir, d'une part, si les enseignants ont suivi, lorsqu'ils étaient eux-mêmes élèves, une formation en arithmétique dans l'enseignement secondaire avec l'ancien programme ou s'ils n'ont suivi des formations qu'à l'université, et d'autre part, s'ils ont suivi des formations après l'université. Ce facteur peut avoir une influence sur leurs pratiques de l'enseignement de l'arithmétique en Seconde.

I.1.2 Les ressources utilisées pour la préparation du cours et des exercices

Deux questions concernent les ressources. La première porte sur le manuel de la classe, la seconde sur les autres ressources utilisées par les enseignants.

Question 5 : *Quel manuel est utilisé en classe de seconde dans votre établissement ?*

Cette question permet de déterminer les manuels les plus utilisés par les enseignants de mathématiques en classe de Seconde. Nous avons posé cette question après avoir étudié les manuels analysés au chapitre IV (Hachette éduction collection Pyramide, Hatier collection Pythagore et Bordas). Nous souhaitions savoir si ces manuels étaient représentatifs de ceux utilisés par les enseignants interrogés. Elle nous permet aussi de mettre en perspective ce qui se dégage de leurs réponses au questionnaire concernant leurs pratiques et les manuels qu'ils utilisent dans la classe.

Question 6 : *Pour votre enseignement d'arithmétique en seconde, vous utilisez :*

Autres manuels de seconde

Manuels d'autre(s) niveau(x) du secondaire : Collège Lycée

Revues, documents à destination des enseignants

(Brochures IREM, bulletin APMEP, etc.)

Manuels ou polycopiés universitaires

Revues et ouvrages de vulgarisation mathématique

Internet

Autres, précisez :

Les enseignants ont à leur disposition plusieurs ressources pour préparer leur cours. Les manuels scolaires, les programmes, les textes officiels, les logiciels, etc. font partie de ces ressources auxquelles les enseignants recourent. Comme le signalent Gueudet et Trouche (2008), le travail des enseignants, des copies d'élèves, un conseil reçu en formation, une discussion avec des collègues peuvent être aussi des ressources pour les enseignants :

> *« Ce que l'activité du professeur comprend, c'est un ensemble de ressources. Nous conférons à ce terme une acception très générale : un manuel scolaire, les programmes scolaires, un logiciel dédié à l'enseignement, sont, bien entendu, des ressources …. (celles-ci relèvent de ce que les travaux anglo-saxons nomment le curriculum material, Remillard 2005, Ruthven 2008) ; .le travail des professeurs, constituant leur propre curriculum (Ball & Cohen 1996, p. 6) produit aussi de nouvelles ressources ; une copie d'élève, les interactions dans la classe, un conseil donné par un collègue, constituent également des ressources pour le professeur, au sens attribué à ce terme par Adler (2000), jouant sur la structure même du mot : ce qui re-source l'activité des enseignants » (*Gueudet et Trouche, 2008, p.7)

Cette question nous aidera à savoir si les enseignants consultent différents manuels en classe de seconde, et s'ils recourent à d'autres ressources pour construire leur cours et choisir des exercices qu'ils estiment être en accord avec le programme d'arithmétique de Seconde.

I.1.3 La définition du terme « arithmétique » en classe

Ce point est traité dans la question 7 **: «** *Définissez-vous l'arithmétique à vos élèves ? Si oui quelle définition leur donnez-vous ?»*

Les notions d'arithmétique sont proposées dans les manuels dès le collège et même avant à l'école primaire (division euclidienne ; multiple ; diviseur). Comme nous l'avons déjà vu, ces notions sont présentées tout au long du collège et en classe de Seconde : division euclidienne et critères de divisibilité en classe de sixième, relation de divisibilité en classe de cinquième, multiple commun en quatrième, pgcd en troisième et nombres premiers et décomposition en facteurs premiers en Seconde (jusqu'aux programmes 2008). En accord avec les programmes, aucune définition de l'arithmétique n'est proposée dans les manuels analysés.

Nous avons fait l'hypothèse que certains enseignants de seconde pouvaient néanmoins donner une définition ; cette question nous permet de savoir si c'est bien le cas. Dans le cas positif, la réponse des enseignants à cette question nous permet de recueillir des informations sur la façon dont les enseignants de Seconde définissent l'arithmétique. Elle permet aussi de savoir si les enseignants font référence aux notions d'arithmétique étudiées au collège lorsqu'ils proposent une leur définition.

Du fait de l'absence de définition de l'arithmétique dans les programmes et dans la plupart des manuels, nous faisons l'hypothèse que lorsque les enseignants donnent une définition de l'arithmétique, ils le font de manière informelle et dans le langage courant. Le fait que l'arithmétique se trouve dans les programmes et les manuels sous la rubrique calcul numérique, nous nous attendons à ce que certains enseignants définissent l'arithmétique au sens de calcul numérique ; nous allons donc distinguer deux types de définition de l'arithmétique : d'une part, celles qui concernent l'étude des entiers et de leurs propriétés et d'autre part celles qui concernent le calcul numérique.

Notons enfin que cette question est proposée également dans le questionnaire des élèves pour confronter les réponses des élèves avec ce que les enseignants cherchent à mettre en place dans la classe.

I.1.4 La reprise des notions d'arithmétique en Seconde et les difficultés rencontrées par les élèves avec ces notions.

Cet aspect est abordé dans les deux questions Q8 et Q9.

Question 8 : « *Au collège, les élèves ont rencontré un certain nombre de notions d'arithmétique. Parmi celles-ci, lesquelles retravaillez-vous avec vos élèves de seconde ?».*

L'objectif de cette question est de savoir si la reprise des notions d'arithmétique comme objet/outil prend une place importante dans la pratique des enseignants en classe de Seconde.

La notion de nombre premier et la décomposition en facteurs premiers permettent de reprendre certaines notions d'arithmétique. En effet, la détermination de primalité des nombres repose sur la division euclidienne (diviser successivement jusqu'à ce que le quotient devienne inférieur au diviseur) ; il en est de même de la décomposition en facteurs premiers. Ainsi, la divisibilité peut être reprise pour définir les nombres premiers et décomposer les nombres.

La décomposition en facteurs premiers est considérée comme une nouvelle technique pour la recherche de PGCD. Ainsi le PGCD peut être repris en classe de Seconde avec l'introduction d'une nouvelle méthode, et la reprise de l'algorithme d'Euclide introduit au collège.

La décomposition en facteurs premiers peut donner également l'occasion de retravailler les nombres premiers entre eux, qui sont exploités pour rendre irréductibles les fractions.

Comme nous l'avons indiqué au chapitre III, aucune place n'est réservée à la question de reprise des notions d'arithmétique dans les programmes. Les manuels analysés dans le chapitre IV ont montré que les notions d'arithmétique étudiées au collège ne sont pas reprises comme objet d'étude dans les manuels de seconde, sauf dans un manuel qui propose la notion de diviseur comme objet. Le PGCD et algorithme d'Euclide sont repris comme outil dans deux des manuels analysés.

Nous pensons que les enseignants prennent une certaine liberté dans leur choix de reprise en seconde des notions d'arithmétique étudiées au collège et nous faisons l'hypothèse suivante :

Les enseignants proposent la notion de la divisibilité comme objet pour définir les nombres premiers, et font retravailler à leurs élèves le PGCD et les nombres premiers entre eux comme outil pour rendre irréductible les fractions. Du fait que l'algorithme d'Euclide est une méthode privilégiée par le programme de 3ème, nous faisons l'hypothèse qu'il apparaîtra comme une notion reprise en seconde dans les réponses des enseignants.

Nous pensons *a contrario* que la notion de ppcm a très peu de chance d'apparaître dans les réponses des enseignants comme une notion reprise en seconde dans la mesure où elle n'est pas privilégiée dans les programmes et les manuels.

Question 9 : *Quelles sont les principales difficultés que rencontrent vos élèves à propos de notions d'arithmétique? Que proposez-vous pour les aider à surmonter ces difficultés ?*

Nous avons voulu identifier, à travers le point de vue des enseignants de seconde, les difficultés que rencontrent leurs élèves dans l'apprentissage de l'arithmétique et savoir quels moyens sont utilisés par le professeur pour traiter ces difficultés.

Nous tenterons de distinguer les difficultés relatives aux notions d'arithmétique comme objet d'étude et comme outil, et de dégager de l'ensemble des réponses que nous allons obtenir quelles notions d'arithmétique sont les plus problématiques chez les élèves de point de vue de leur enseignant.

En nous appuyant sur les travaux de Zazkis et Campbell (1996) et Brown et al. (2002) qui ont montré que la relation de divisibilité est une structure cognitive complexe et sur les travaux de Campbell (2002) sur la division euclidienne, nous nous attendons à ce que les enseignants mentionnent ces deux notions. En nous référant aux travaux de l'IREM de Toulouse (2005), nous faisons également l'hypothèse que la décomposition en facteurs premiers apparaît comme une notion posant problème aux élèves.

I.1.5. La pratique des enseignants concernant les notions de pgcd et des nombres premiers

Nous avons choisi de nous intéresser plus spécifiquement à deux notions : la première notion (le pgcd) est un objet d'étude en Troisième et est un outil en Seconde, tandis que la seconde (la notion de nombre premier) est un objet d'étude en Seconde.

Nous avons voulu à travers les deux questions étudier d'une part la viabilité de la niche algorithmique dans la pratique des enseignants, et d'autre part mettre en évidence l'aspect propriété / relation et étudier les définitions opératoires et les types de définitions proposées par les enseignants.

Question 10 : *Quelle définition donnez-vous à vos élèves des nombres premiers ? Quelle(s) méthode(s) proposez-vous à vos élèves pour déterminer si un nombre est premier ou pas ?*

Cette question se subdivise en deux parties. La première partie est relative à la définition des nombres premiers. Elle vise à savoir si les enseignants donnent à leurs élèves une définition correspondant à celles que l'on trouve dans les manuels ou s'ils donnent leur propre définition. Elle permet de savoir si les enseignants explicitent dans la définition le fait que « être un nombre premier » est une propriété qui s'applique exclusivement aux entiers. Comme nous l'avons indiqué plus haut, nous allons étudier la manière dont les enseignants proposent la définition et le type de définition qu'ils proposent.

Pour analyser les réponses obtenues, nous prenons comme définition de référence la définition ci-dessous :

> *Un nombre entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.*

Nous focalisons notre analyse sur les catégories suivantes :

1. Définition complète ou définition non complète.

Une définition complète est celle qui comporte :

1) un entier naturel 2) il admet exactement deux diviseurs 1 et lui-même.

Une définition qui ne précise pas que les nombres premiers sont des entiers sera considérée comme une réponse non complète.

2. Type de définition (Dénomination, Définition par Exemple, autre).

La définition de dénomination est celle qui donne le nom à la propriété caractéristique avec la forme suivante : « On appelle », « On dit que », « …est … ».

Exemple : Un nombre entier naturel ***est*** premier s'il admet exactement deux diviseurs distinctes 1 et lui-même.

La réponse qui donne uniquement la propriété caractéristique sans attribuer le nom, nous la mettons dans la liste « autre ».

La définition par Exemple est celle qui définit l'objet mathématique à partir d'un exemple :

(7 est premier car il a exactement deux diviseurs 1 et 7).

3. Langage (mathématique, courant).

La définition en langage mathématique est celle qui correspond à la définition proposée dans les manuels, la définition proposée plus haut pour les nombres premiers présente une définition en langage mathématique. Nous considérons qu'une définition est en langage courant lorsque des formes langagières familières sont utilisées.

4. Concept mobilisé dans la définition des nombres premiers.

On souhaite savoir si les enseignants font référence au concept diviseur ou s'ils font appel à la divisibilité pour donner la définition des nombres premiers ; on distingue donc les deux cas suivants :

1 : C'est un entier naturel qui a exactement deux *diviseurs* distincts 1 et lui-même.

2 : C'est un entier naturel qui n'est *divisible* que par 1 et lui-même.

Nous faisons l'hypothèse suivante : conformément aux manuels, les enseignants vont donner une définition complète et vont formuler la définition dans un langage mathématique en faisant référence au concept de diviseur.

La deuxième partie de cette question, nous permet de savoir quelle méthode est privilégiée par les enseignants pour déterminer la primalité des entiers. Nous cherchons en fait la viabilité de la niche algorithmique avec les nombres premiers. Ainsi, la méthode utilisée par les enseignants peut nous renseigner sur la viabilité de cette niche dans la pratique des enseignants.

On peut s'attendre à trouver les techniques que nous avons identifiées dans l'analyse des manuels dans les réponses des enseignants. Nous rappelons ces techniques :

1. une technique consistant à essayer de factoriser le nombre n sous la forme $n = a\, b$ avec $a<n$, pour savoir si n est premier. La définition de nombres premiers (un nombre premier est un entier naturel n'ayant que deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.) justifie cette technique.
2. une technique algorithmique consistant à diviser le nombre n successivement par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, … Jusqu'à ce que le quotient devienne inférieur au diviseur. Le discours technologique justifiant cette technique est qu'un nombre composé n admet au moins un facteur premier p tel que le quotient de n par p est supérieur ou égal à p.

3. une deuxième technique algorithmique conduit à diviser le nombre *n* successivement par les nombres premiers p = 2, 3, 5, 7, … Jusqu'à $p^2 \leq n$. La technologie permettant de justifier cette technique est la suivante : Soit *n* un entier ($n \geq 2$), si n n'admet aucun diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$, alors il est lui-même premier. ».
4. une technique porte sur l'application des critères de divisibilité connus, sinon, appliquer une des technologies précédentes. θ : critères de divisibilité.
5. une technique dépend de la taille des nombres, si n n'est pas grand, on consulte la table des nombres premiers : Crible d'Eratosthène. θ : Crible d'Eratosthène.

Nous nous limitons à identifier la technique dans la réponse des enseignants.

Ces techniques peuvent être utilisées à l'aide de la calculatrice et l'outil informatique. Nous supposons que les enseignants donnent au moins une technique pour répondre à cette question, et que certains d'entre eux utilisent la calculatrice lorsqu'ils proposent une méthode.

Le programme ne donne aucun commentaire sur la manière de déterminer la primalité des nombres, tandis que nous avons observé une grande variabilité dans des manuels analysés en ce qui concerne les méthodes pour déterminer la primalité des entiers : un manuel se limite à la définition des nombres premiers ; un autre manuel propose la deuxième technique algorithmique, alors que la troisième technique algorithmique est proposée par un autre manuel.

Nous faisons l'hypothèse que les enseignants vont d'une part introduire la technique proposée dans le manuel de la classe, et d'autre part, introduire une deuxième méthode de leur choix. Selon la ou les techniques introduites, cela pourra nous donner des indications sur la viabilité de la niche algorithmique dans leur enseignement de l'arithmétique.

Question 11 : *Quelle définition du pgcd donnez-vous en classe de seconde ? Quelle(s) méthode(s) de détermination du pgcd proposez-vous à vos élèves ? Si vous en proposez plusieurs, précisez à l'aide d'exemples le contexte d'utilisation de chaque méthode ?*

Cette question est aussi divisée en deux parties. La première partie est associée à la définition de PGCD. Comme nous l'avons vu au chapitre II, il y a plusieurs façons de définir le pgcd:

a - Définir le pgcd en termes ensemblistes : nous allons distinguer D1, D2, D3, D4 :

D1 – définir le pgcd en montrant l'aspect existence et l'unicité de pgcd en référence à l'ordre naturel auquel est associé l'ensemble (Z, ≤) de la manière suivante :

> *Parmi les diviseurs communs à deux naturels a et b, il en* ***existe*** *un plus grand que tous les autres, c'est le p. g. c. d de a et b.*

Cette définition était proposée dans les manuels de 1970, et peu des manuels actuels l'abordent de la manière suivante :

> *L'ensemble des diviseurs communs à deux entiers a et b* ***admet*** *un plus grand élément noté PGCD (a ; b).*

La plupart des manuels actuels ne montrent pas l'aspect l'existence de pgcd, ils le définissent comme le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs de deux entiers de la manière suivante :

D2 : Le plus grand des diviseurs communs à a et b est noté PGCD (a, b).

Le fait que le plus grand diviseur commun est abrégé en PGCD, nous supposons que un certain nombre des enseignants définissent le pgcd comme une reformulation c.à.d. ils se limitent à définir le pgcd comme : « Le plus grand diviseur commun à a et b est appelé PGCD».

D3 : Le pgcd peut aussi être défini en faisant référence à l'ordre divisibilité de la manière suivante :

Soit a, b $\in$ Z tels que ab $\neq$ 0. Le plus grand commun diviseur (p.g.c.d) de a et b, noté (a,b), est l'entier positif d qui satisfait aux deux condition suivantes :

i) d| a et d| b ; ii) si c| a et c | b, alors c $\leq$ d

(Mercier et al, 1994, p.6)

Il est possible de reformuler la définition précédente en langage naturel sans assurer la garantie de l'unicité de PGCD de la manière suivante :

Le plus grand entier naturel qui divise simultanément ces deux entiers.

D4 : Le pgcd est peut être défini par l'intersection *D(a) ∩ D(b).*

b. Définir le pgcd à partir de la décomposition en facteurs premiers.

D5 : $d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\gamma i}$ *avec, pour tout indice i,* $\gamma = \min(\alpha i, \beta i)$; $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha i}$, $b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta i}$

Nous voulons connaître la définition proposée par les enseignants parmi les définitions possibles. Etant donné que les manuels ne proposent que D2 dans l'ordre naturel, nous faisons l'hypothèse suivante : très peu d'enseignants vont proposer les définitions suivantes : D1, D3, D4, D5, et l'ordre divisibilité est négligé dans la définition de PGCD, de plus l'aspect propriété semble être privilégié sur la relation dans la réponse des enseignants.

Le fait que le pgcd ne soit pas un objet d'étude en seconde, nous supposons qu'un certain nombre d'enseignants ne proposent pas une définition du pgcd en seconde à leurs élèves.

Ainsi, pour analyser les réponses attendues des enseignants, nous allons utiliser les aspects utilisés dans la question précédente, en ajoutant l'aspect prédicatif et l'aspect opératoire en référence à Vergnaud (2001). On peut définir le pgcd sous forme opératoire de la manière suivante :

On cherche l'ensemble des diviseurs de chacun des deux entiers, et on prend le plus grand diviseur commun parmi la liste des diviseurs communs entre les deux entiers.

L'aspect prédicatif est présent dans les définitions précédentes D1, D2, D3, D4, D5.

La deuxième partie de la question permet de savoir quelles sont les techniques privilégiées par les enseignants dans leurs pratiques pour la recherche d'un pgcd. Leurs explications à l'aide d'un exemple permettent de justifier leurs choix d'utiliser plusieurs techniques.

En troisième, trois techniques sont disponibles pour la recherche du pgcd : la technique de l'algorithme d'Euclide, celle des soustractions successives et celle qui met en place la définition D2 (le pgcd comme le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs de deux entiers), nous l'appelons technique ensembliste. L'outil informatique qui fait vivre l'aspect algorithmique de l'arithmétique peut être également utilisé.

En Seconde, la décomposition en facteurs premiers permet de proposer une nouvelle méthode pour calculer le pgcd.

Le choix d'utiliser l'une ou l'autre dépend de la préférence des enseignants, et des conditions imposées dans l'énoncé des exercices.

Comme nous l'avons vu, les manuels analysés mettent en évidence la recherche du PGCD à l'aide de la décomposition en facteurs premiers en explicitant les règles qui permettent d'obtenir la décomposition en facteurs premiers du pgcd à partir des décompositions de deux nombres donnés.

Du fait que la décomposition en facteurs premiers est un nouvel objet d'étude en seconde, et que la méthode de l'algorithme d'Euclide est préconisée par les programmes de troisième et peut être privilégiée lorsqu'on travaille avec des grands nombres, nous nous attendons à ce que l'algorithme d'Euclide et la décomposition en facteurs premiers soient les deux méthodes les plus fréquemment proposées par les enseignants.

I.1.6 L'utilisation de la calculatrice avec les notions d'arithmétique

Question 12 : *Avez- vous fait travailler vos élèves des activités basées sur la calculatrice et l'ordinateur avec les notions d'arithmétique? Si oui avec quelle notion?*

Comme nous l'avons vu, l'un des objectifs avancés pour la réintroduction de l'arithmétique dans les programmes était de faire vivre la niche algorithmique ; la calculatrice et l'outil informatique peuvent être considérés comme des moyens pour faire vivre cette niche. Ainsi, les moyens calculatrice / informatique peuvent être employés avec l'algorithme d'Euclide et le pgcd. Ils peuvent aussi être utilisés avec les autres notions de l'arithmétique. Or, nous avons vu que l'utilisation de l'outil informatique avec la calculatrice n'est pas un enjeu important dans les manuels.

Nous souhaitons dans cette question savoir si les enseignants font vivre la niche algorithmique dans leur pratique, et quelles sont les notions d'arithmétique concernées par le travail avec la calculatrice et l'outil informatique.

La calculatrice est un moyen pour déterminer la primalité des grands nombres, on peut ainsi s'attendre à ce que les enseignants fassent travailler leurs élèves avec la calculatrice lors de l'étude des nombres premiers.

La division euclidienne peut être faite à l'aide de la calculatrice, donc on peut s'attendre à ce qu'elle apparaisse dans la réponse des enseignants.

I.2 Deuxième partie

Les deux questions proposées dans cette partie sont aussi adressées aux élèves dans leur questionnaire. Ces exercices ne sont pas des exercices classiques, ils traitent de la relation de divisibilité et de la notion de multiple commun dans une nouvelle situation : il s'agit de déterminer si un nombre est divisible par un autre et de trouver un multiple commun dans un cas où les nombres entiers sont décomposés en facteurs premiers. Cette situation est inhabituelle ; en effet les manuels proposent ce type de tâches sur des entiers non décomposés, et on peut faire l'hypothèse qu'il en est de même pour les enseignants.

Nous avons d'abord demandé aux enseignants de donner un corrigé afin de voir quel type de réponse ils donnaient (ou ils attendaient de leurs élèves), ensuite nous avons demandé si les enseignants font vivre ces questions dans leurs classes et si oui avec quel objectif.

Nous avons préparé ces exercices à partir des manuels des années soixante-dix et en exploitant les travaux antérieurs proposés dans le chapitre V. Ces exercices sont peu proposés dans les manuels actuels. On peut se demander si certains enseignants sont susceptibles de proposer ce type d'exercices y compris s'ils n'apparaissent pas dans le manuel de la classe.

Nous allons dans ce qui suit présenter une analyse détaillée pour chaque exercice.

Question 1 : *Nous envisageons de proposer l'exercice suivant à des élèves de seconde :*

Soit $M = 3^2 \times 5^2 \times 7$

a) *M est-il divisible par : 7, 9, 2, 11,63 ? Justifiez votre réponse.*

b) $B = 3^2 \times 5^3 \times 7$, *B est- il diviseur de M. et pourquoi ?*

c) $F = 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$, *est- il multiple de M. et pourquoi ?*

Selon vous, quelle(s) solution(s) pourraient-ils mettre en œuvre et quelle correction leur proposeriez-vous ?

Est-ce qu'en seconde, vous proposez ce type d'exercices ? Si oui avec quel(s) objectif(s) ?

Cette question porte sur la notion de divisibilité dans une nouvelle situation (nombres décomposés en facteurs premiers), elle met en jeu les notions suivantes : facteur, facteur premier, diviseur, divisible, multiple, et avec l'idée de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre V, ce type d'exercice est l'axe fondamental dans la plupart des travaux anglo-saxons, plus particulièrement les travaux de Zazkis et Campbell. Nous rappelons les principaux résultats :

- Campbell (2002) a étudié à travers cette question la relation de la division euclidienne avec la décomposition en facteurs premiers en demandant aux participants de trouver le quotient et le reste de la division. Il a trouvé que les participants ont rencontré des difficultés relatives à la décomposition en facteurs premiers, en particulier par l'extension inappropriée de procédures familières dans de nouvelles situations.
- Zazkis et Campbell (1996) se sont intéressés à l'étude des aspects procéduraux et conceptuels de la compréhension du théorème fondamental de l'arithmétique. Cette étude a mis en évidence le fait que l'idée de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers est très difficile à saisir par les participants. Il en est de même de la distinction entre facteur et facteur premier qui n'était pas claire chez les participants. Les auteurs font l'hypothèse que si les notions de nombre premier et de nombres composés ne sont pas adéquatement construites, ceci empêchera toute conceptualisation significative de la décomposition en facteurs premiers.
- Zaksis & Campbell (1996) et Brown, Thomas et Tolias (2002) : les deux recherches sont consacrées à l'étude de la notion de divisibilité et sa structure multiplicative. Les résultats de deux études ont mis en évidence l'importance de la structure multiplicative et sa relation avec la décomposition en facteurs premiers pour construire le schème de la divisibilité.

Comme nous l'avons vu dans l'analyse institutionnelle, ce type d'exercice occupait une place très importante dans les manuels de 1970 avec une base théorique, alors que ce type de tâches est très peu présent dans les manuels actuels.

Nous voulons savoir, d'une part, si les enseignants disposent d'une certaine liberté de choisir des types de tâches concernant la décomposition en facteurs premiers et dans quel objectif.

Nous avons choisi de reprendre cette tache proposée dans les travaux anglo-saxons dans notre questionnaire pour étudier les liens entre la relation de divisibilité et la décomposition en facteurs premiers, qui met en évidence l'importance de la continuité des notions d'arithmétique comme outil lors la transition du collège au lycée.

Cette question vise à savoir si les enseignants s'attendraient à ce que leurs élèves arrivent à répondre à partir de la forme décomposée de M, et si les nombres qui n'apparaissent pas dans la décomposition de M, leur pose un problème. En demandant une correction, nous voulons savoir si les enseignants font appel au théorème fondamental de l'arithmétique.

Cette question nous permet aussi de relever, d'après les enseignants, certaines difficultés que pourraient rencontrer les élèves dans la résolution de cet exercice.

Deux techniques sont envisageables pour répondre au premier item (a) :

- **T1** : En utilisant la forme décomposée de M.

M est divisible par 7, 9, 63 car 7 est un facteur premier de M et $9 = 3^2$; $63 = 7 \times 9$ sont des facteurs de M, alors que 2 et 11 sont des nombres premiers n'apparaissent pas dans la décomposition de M qui possède une seule présentation du fait de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers), donc M n'est pas divisible par 2 et 11.

- **T2** : il s'agit de calculer la valeur de M et effectuer la division euclidienne ou utiliser les critères de divisibilité.

$M = 3^2 \times 5^2 \times 7 = 9 \times 25 \times 7 = 1575$

$1575 / 7 = 335$, $1575 / 9 = 175$, $1575 / 63 = 25$ (le reste est nul et le quotient est entier)

$1575 / 2 = 787.5$, $1575 / 11 = 143.18$ (le reste n'est pas nul et le quotient est décimal)

Donc, M est divisible par 7, 9, 63 et elle n'est pas divisible par 2, 11.

Nous faisons l'hypothèse que les enseignants pourraient s'attendre à ce que leur élèves mettent en œuvre T2, parce que les élèves ont l'habitude de résoudre des exercices à propos de la divisibilité pour des nombres non décomposés. Alors que la première méthode T1 leur pose une difficulté surtout avec les entiers qui ne figurent pas dans la décomposition de M.

Deux catégories de techniques sont envisageables pour répondre aux deux items (b) et (c) :

- **T1** : En utilisant la forme décomposée de M ; cette catégorie comporte trois techniques :

- **T1.1** : En utilisant la règle suivante :

Item (b) : Pour qu'un nombre B soit un diviseur de M, il faut que la décomposition de B en facteurs premiers ne contienne que des facteurs premiers qui figurent dans la décomposition de M avec un exposant au plus égal. Les facteurs de B contiennent des facteurs de M avec un exposant plus d'exposant de M, alors B n'est pas diviseur de M.

Item (c) : Pour qu'un nombre F soit multiple de M, il faut que la décomposition de F en facteurs premiers contienne au moins tous les facteurs premiers qui figurent dans la décomposition de M avec un exposant égal ou supérieur. Comme F contient tous les facteurs de M avec un exposant au moins égal, donc F est multiple de M.

- **T1.2** : utiliser la définition de diviseur pour Item (b) : Dire que le naturel B est diviseur du naturel M signifie qu'il existe un naturel K tel que : M = B K

En regardant les valeurs de B et M, nous trouvons que :

B = $3^2 \times 5^3 \times 7 = (3^2 \times 5^2 \times 7) \times 5 = M \times 5$, donc B n'est pas diviseur de M

Item (c) : Dire que le naturel F est un multiple du naturel M signifie qu'il existe un naturel K tel que F = M K

F= $3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 3 \times 11 = M \times 3 \times 11$, donc F est un multiple de M.

- **T1.3 :** simplifier la fraction $\frac{F}{M}$ et utiliser ensuite la définition a = b c

Item (b) : $\frac{M}{B} = \frac{3^2 \times 5^2 \times 7}{3^2 \times 5^3 \times 7} = \frac{1}{5}$ (nombre décimal)

Item (c) : $\frac{F}{M} = \frac{3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11}{3^2 \times 5^2 \times 7} = 3 \times 11 = 33$ (nombre entier)

- T2 : il s'agit de calculer la valeur de M et effectuer la division euclidienne ou utiliser les critères de divisibilité.

Item (b): M = $3^2 \times 5^2 \times 7 = 9 \times 25 \times 7 = 1575$

$B = 3^2 \times 5^3 \times 7 = 9 \times 125 \times 7 = 7875$

En utilisant les critères de divisibilité, nous trouvons que B ne divise pas M.

Item (c): M = $3^2 \times 5^2 \times 7 = 9 \times 25 \times 7 = 1575$

F = $3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 27 \times 25 \times 77 = 51975$

En utilisant les critères de divisibilité, nous trouvons que F divisible par M, c-à-d : F est multiple de M.

Ainsi, nous voulons savoir à travers les deux items (b) et (c) quel type de réponse les enseignants prévoient de leurs élèves ? Est ce qu'ils arrivent à utiliser M1 ? Parmi les trois techniques prévues dans T1 : T1.1, T1.2, T1.3, lesquelles sont disponibles ?

Question 2 :

Nous envisageons de proposer l'exercice suivant à des élèves de seconde.

Soit $A = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ *et* $C = 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$

Donner un multiple commun des deux nombres

Selon vous, quelle(s) solution(s) pourraient-ils mettre en œuvre et quelle correction leur proposeriez-vous ?

Est-ce qu'en seconde, vous proposez ce type d'exercices ? Si oui avec quel(s) objectif(s) ?

La notion de multiple commun et celle de ppcm sont proposées dans les programmes de 1970, elles faisaient partie du chapitre intitulé « Arithmétique » dans les manuels.

Comme nous l'avons déjà vu, la notion de multiple commun a été réintroduite après une quinzaine d'années d'absence dans les manuels de l'enseignement secondaire. Elle est considérée, en classe de quatrième, comme un outil pour réduire au même dénominateur. En classe de seconde, c'est l'occasion d'étudier le ppcm avec la décomposition en facteurs premiers, mais aucune place privilégiée n'est donnée au ppcm dans les programmes. Cependant, certains manuels de seconde lui donnent une place en consacrant une partie théorique dans la partie « Cours » ou proposant des exercices comme application à la décomposition en facteurs premiers.

Nous voulons savoir si les enseignants disposent d'une certaine liberté de choix des types de tâches concernant la décomposition en facteurs premiers, et s'ils considèrent que la reprise de la notion de ppcm en seconde aident les élèves à maitriser la décomposition en facteurs premiers , ou bien s'ils n'y pensent pas, c-à d que leur rapport personnel à la décomposition en facteurs premiers ne prend pas en compte ce type de question, soit qu'ils considèrent que c'est difficile pour les élèves, ou que le ppcm n'est pas au programme de seconde. Nous voudrions savoir aussi que ce qu'ils attendraient de leurs élèves comme solution à cette question, et quelles corrections ils leur donneraient?

Cette question nous permet de voir si les enseignants prévoient que leurs élèves peuvent confondre les deux notions de diviseur commun et de multiple commun. Elle nous permet aussi de voir si les enseignants vont proposer ou non un multiple commun autre que le ppcm.

Les techniques qui peuvent être mises en oeuvre pour déterminer un multiple commun.

- **T1** : Trouver le produit $A \times C$ à partir de la décomposition en facteurs premiers ou calculer la valeur de A et C à l'aide de la calculatrice ensuite faire le produit:

  $A \times C$.

$A = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ et $C = 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$

$A \times C = 2^2 \times 3^4 \times 5^6 \times 7^2 \times 11$

- **T2** : Chercher le ppcm à l'aide de la décomposition en facteurs premiers : pour déterminer le ppcm de deux nombres décomposés en facteurs premiers, on utilise la règle suivante :

Soit d un multiple commun à deux nombres A et B

a) Chacun des facteurs élémentaires des décompositions de d est commun aux décompositions de A et de B.

b) L'exposant d'un facteur élémentaire dans la décomposition de d est inférieur ou égal au plus petit de deux exposants de ce même facteur élémentaire dans les décompositions de A et B.

Le ppcm est donc le produit de tous les facteurs communs et non communs avec le plus grand exposant

PPCM = $2^2 \times 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$

Nous pensons que les enseignants vont donner le plus petit multiple commun comme réponse à cette question.

I.3 Troisième partie

Nous avons construit la troisième partie du questionnaire après avoir proposé le questionnaire qui comportait la première et la deuxième partie aux enseignants de seconde, lorsque nous avons su que le programme de seconde a changé à la rentrée de 2009. Ainsi, nous avons reproposé cette partie au même échantillon ayant répondu à notre questionnaire : Professeurs et leurs élèves (P1,..P10); professeurs; professeurs interrogés sur internet. Pour les enseignants contactés dans le cadre des journées de l'APMEP à Rouen en octobre 2009, le questionnaire comportait les trois parties.

Cette partie comporte deux questions

Q1 : l'*arithmétique disparaît des programmes de seconde à la rentrée de l'année scolaire 2009 : qu'est ce que vous pensez de ce changement (les raisons et/ou les conséquences et/ou tout autre commentaire) ?*

L'analyse des programmes a montré que la volonté des programmes pour réintroduire l'arithmétique est de faire travailler les élèves sur l'algorithmique ; ainsi depuis 2000 les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers sont dans le programme de seconde. Cependant, comme nous l'avons vu au chapitre III, à la rentrée 2009 cette partie de l'arithmétique a disparu à nouveau des programmes de seconde alors même que l'accent est mis sur l'aspect algorithmique dans les nouveaux programmes. Ce changement nous à inciter à poser cette question aux enseignants de seconde pour recueillir leur point de vue sur les raisons de la disparition de l'arithmétique, à partir de leur pratique ; et sur l'impact de cette disparition sur le processus d'enseignement de l'arithmétique : en particulier quels sont les effets de ce changement de programme sur l'habitat et sur les niches de l'arithmétique en seconde et quelles sont les retombées prévisibles en terminale S.

Nous faisons l'hypothèse que les réponses seront partagées entre ceux qui considèrent que ceci permet de laisser la place à d'autres sujets tel que l'algorithmique, tandis que d'autres considèrent que l'arithmétique est indispensable et que c'est l'occasion pour travailler avec l'algorithmique.

Q2 : *Pensez-vous que la disparition de l'arithmétique, spécifiquement des contenus nombre premier et décomposition en facteurs premiers, implique une perte en termes d'organisation des apprentissages mathématiques pour la classe de seconde? Si oui, pouvez-vous donner des exemples.*

Les élèves au collège ont l'occasion de travailler d'une façon générale sur la décomposition des nombres dans le travail sur les fractions, c'est en Seconde qu'ils apprennent à décomposer les nombres en produit de facteurs premiers, et qu'ils mettent en œuvre la notion de la division euclidienne et de la divisibilité avec la décomposition en facteurs premiers. La décomposition en facteurs premiers leur offre aussi une autre technique pour calculer le pgcd et le ppcm pour simplifier les fractions. Ils apprennent également en seconde la notion de nombre premier qui met en place la notion de divisibilité.

Nous souhaitons par cette question recueillir le point de vue des enseignants sur les effets que pourrait entrainer la disparition de l'arithmétique du programme de seconde sur la partie arithmétique en classe de seconde (perte sur les notions, recul des niches) d'une part, et sur les autres sujets de mathématiques en classe de seconde d'autre part, ainsi que les retombées en classe de terminale S.

Du fait que la décomposition en facteurs premiers peut être utile pour les puissances, nous nous attendons à ce que les enseignants mentionnent la perte d'occasion de travailler sur les puissances comme un effet de la disparition de l'arithmétique sur les autres sujets en mathématiques ; rappelons que les puissances faisaient partie de l'arithmétique dans les programmes classiques (avant les programmes de 1969).

Au niveau de l'effet de la disparition sur l'arithmétique elle-même, nous nous attendons à trouver certaines des réponses suivantes :

- la disparition de l'arithmétique du programme de Seconde peut être considérée comme une perte d'occasion de familiariser les élèves avec les nombres entiers et de pratiquer à la fois le calcul mental et le calcul instrumenté. Et cette disparition amène à une perte de certaines notions d'arithmétique tels les nombres premiers.
- elle implique aussi une perte dans la fonction de l'arithmétique : une certaine perte dans la niche « calcul numérique » en supprimant la possibilité d'utiliser la décomposition en facteurs premiers pour calculer le pgcd et le ppcm pour simplifier des fractions.

- elle affaiblit la niche « raisonnement mathématique » pour laquelle la notion de nombre premier intervient largement.
- elle affaiblit la niche « algorithmique » en contradiction avec le fait qu'une des motivations pour réintroduire l'arithmétique en 2000 était son intérêt pour l'algorithmique.
- en outre, la disparition de l'arithmétique prive les élèves d'occasion de travailler sur le codage et le cryptage et leurs applications dans la vie quotidienne.
- enfin, la place que l'arithmétique a perdu avec le changement de programme implique une certaine perte dans la continuité d'acquisition des élèves ce qui pourrait entraîner des difficultés pour les élèves et pour leurs enseignants lors de l'étude de cette partie en terminale S.

II. Analyse a posteriori du questionnaire destiné aux enseignants

Introduction

Comme nous l'avons déjà dit dans l'analyse a priori, le questionnaire a été élaboré au début de l'année scolaire 2008/2009, et distribué à partir du mois de mai 2008/ 2009. Pour des raisons d'accès à des professeurs susceptibles de remplir notre questionnaire à cette période de l'année, nous avons eu un échantillon particulier. Nous avons contacté des enseignants sensibilisés aux questions d'enseignement à l'IREM de Lyon ; certains d'entre eux, ont fait passer le questionnaire à leurs collègues. Nous avions déposé notre questionnaire sur le site Mathlyc : quelques enseignants ont téléchargé le questionnaire, l'ont rempli et nous l'ont envoyé par courriel, enseignants l'ont reçu dans leur établissement,. Enfin, en octobre 2009, nous avons organisé un atelier aux journées de l'APMEP à Rouen ; les participants à l'atelier ont rempli le questionnaire au début de l'atelier ; quelques autres collègues participants aux journées ont également accepté de remplir notre questionnaire.

Finalement, 54 enseignants ont accepté de répondre à notre questionnaire : 22 au cours des journées de l'APMEP - nous les notons P-APMEP ; 12 enseignants ont envoyé leur réponse par courriel, nous les notons Pn ; 10 enseignants ont accepté de répondre au questionnaire professeur et de faire passer le questionnaire-élèves à leurs propres élèves - nous les notons P-E ; et 10 autres enseignants ont rempli le questionnaire lorsque il a été distribué dans leur établissement, nous les notons P. Pour faciliter l'analyse de leurs réponses, nous avons ordonné notre population selon nos quatre catégories dans l'ordre suivant : P-E, P, Pn, P-APMEP ; nous codons ces enseignants par Pi (i = 1, 2, 3, ….54). Les réponses des enseignants au questionnaire sont données en annexe.

Comme nous l'avons dit plus haut, dans sa première version, le questionnaire comportait seulement la première et la deuxième partie. La troisième partie du questionnaire a été élaborée lorsque nous avons appris en juin 2009 la disparition de l'arithmétique des programmes à la rentrée scolaire 2009/2010. Nous avons essayé de faire passer cette dernière partie du questionnaire aux enseignants ayant déjà rempli les deux parties du premier questionnaire. Cependant, nous n'avons pas réussi à joindre certains enseignants : nous avons reçu des réponses de quelques enseignants ayant envoyé leur réponse par courriel (Pn), mais très peu de réponses d'enseignants ayant rempli cette partie dans leur établissement (P-E). Pour les journées de l'APMEP en octobre 2009, nous disposions de la deuxième version du questionnaire qui comportait les trois parties. Les réponses des enseignants sont notées en annexes 4.

II.1 Première partie

Question 1 : *Nombre d'années d'enseignement.*

Un enseignant n'a pas répondu à cette question. Les 53 enseignants qui ont répondu à cette question ont une expérience qui s'étale de 1 à 40 ans et la moyenne d'ancienneté dans le métier est 21 ans, alors que le médiane est 22 ans.

Moyenne	21
Médiane	22
Minimum	1
Maximum	40

Tableau 1 ; Nombre d'années d'enseignement

Pour savoir exactement le nombre des enseignants ayant pu avoir la possibilité d'enseigner l'arithmétique avec l'ancien programme, nous avons établi un tableau (ci-contre), en permettant de montrer les années d'expérience par rapport aux changements de programme.

Période de changement des programmes	Nombre d'années d'exercice	Fréquence
Période classique avant 1969	Plus de 40 ans	-------
Maths modernes 1969- 1985	24- 40 ans	30 enseignants
Contre-réforme 1986 – 1996	13- 23 ans	8 enseignants
Contemporaine 1997 - 2009	1 – 12 ans	15 enseignants

Tableau 2 : Périodes d'exercices

Nous remarquons qu'un nombre élevé des enseignants (30 enseignants) avait la possibilité d'enseigner l'arithmétique avec l'ancien programme, leurs expériences s'étalent, en effet, des programmes de mathématiques modernes (1969) jusqu'aux programmes actuels. Cependant, très peu des enseignants ont signalé dans la question 4, qu'ils avaient enseigné l'arithmétique avec l'ancien programme (1970). Ceci pourrait s'expliquer par le fait qu'ils n'enseignaient pas à cette époque dans les niveaux concernés par l'enseignement de l'arithmétique.

Question 2 : *Établissement actuel*

Les enseignants qui ont répondu à cette question appartiennent à 37 établissements scolaires différents, situés dans différents départements de la France du fait des conditions de passation du questionnaire ; ceci nous permet de dire que nous avons une population globale qui recouvre une certaine diversité géographique en France.

Parmi les 47 enseignants qui ont donné leur établissement, 30 enseignants sont repartis sur 30 établissements différents (soit un enseignant par un établissement). Parmi les 15 enseignants restants, 9 exercent dans trois établissements publics de la région lyonnaise (trois enseignants pour chacun), 2 dans un établissement privé à Lyon, 2 dans un établissement public à Bordeaux, et 2 dans un établissement public à Hérouville Saint-Clair, dans l'académie de Caen. Un tableau présentant la répartition géographique des établissements est donné en annexe 5.

Question 3 :

Quelle est votre formation en arithmétique (enseignement secondaire, enseignement supérieur, formation initiale, formation continue) ?

Tous les enseignants ont répondu à cette question. Nous présentons l'ensemble des données des réponses des enseignants dans le tableau suivant :

Formation	Total
Secondaire	4
Supérieur	19
Secondaire et supérieur	14
Supérieur et formation initiale	6
Supérieur et formation continue	1
Secondaire et formation initiale	1
Secondaire et formation continue	1
Secondaire et formation initiale et continue	2
Secondaire ; supérieur et formation initiale	3
Secondaire ; supérieur et formation continue	1
Tout	2
Total	54

Tableau 3 : formation en arithmétique

Nous constatons qu'un nombre significatif d'enseignants (19 sur 54) déclarent qu'ils ont reçu leur formation en arithmétique seulement dans l'enseignement supérieur. En lisant leur réponse à la question 1, nous constatons que presque la moitié de ces enseignants sont en activité depuis plus de 24 ans ; ils auraient donc dû étudier l'arithmétique avec l'ancien programme lorsque ils étaient élèves au secondaire, cependant ils ont indiqué qu'ils ne l'ont étudié qu'à l'université. Nous pensons qu'au moment de donner leur réponse, ils ont fait référence à l'arithmétique au sens de la théorie des nombres qu'ils ont étudiée particulièrement à l'université.

14 enseignants ont répondu qu'ils ont étudié l'arithmétique au secondaire et supérieur. Ceci indique qu'ils ont étudié l'arithmétique avec les programmes de 1970 ; c'est aussi le cas des 4 enseignants ayant indiqué qu'ils n'ont étudié l'arithmétique que dans l'enseignement secondaire.

On peut noter qu'un nombre non négligeable d'enseignants (17 sur 54) ont une formation initiale et/ou une formation continue en arithmétique après avoir étudié l'arithmétique dans l'enseignement secondaire et/ou dans l'enseignement supérieur ; parmi eux, 5 enseignants ont suivi une formation continue.

Question 4 :

Avez-vous déjà enseigné l'arithmétique ? Si oui à quel(s) niveau(x) et en quelle(s) année(s) ?

Tous les enseignants interrogés ont répondu oui à la question sauf un enseignant débutant (il est en activité depuis une année). Signalons que nous avons considéré que les enseignants qui se sont contentés de préciser les niveaux sans répondre explicitement « oui » à la question : « *Avez-vous déjà enseigné l'arithmétique ?* », ont donné une réponse positive à cette question.

Nous synthétisons les réponses obtenues dans le tableau ci-dessous :

Niveau	Niveau	Effectif	Fréquence
Lycée et supérieur	2^{nde} + DEUG	1	2
	2^{nde} +$1^{ére}$ année classe préparatoire	1	
Lycée	2^{nde} + TS	19	35
	2^{nde}	7	
	TS	7	
	TS + 1ere	1	
	2^{nde} + CPGE	1	
Collège et Lycée	3° + 2^{nde} avec/sans autre niveau de lycée	7	16
	3° + TS	2	
	5° + 2^{nde} + TS	1	
	6°+ 5° + 2^{nde} + TS	1	
	5° + 4°+ 3°+ Lycée	1	
	Collège + 2^{nde}	3	
	Collège + Lycée	1	
Collège	Collège	1	1
Total		54	54

Tableau 4 : enseignement de l'arithmétique par niveau

Nous remarquons qu'un grand nombre des enseignants (37 sur 54) ont enseigné l'arithmétique exclusivement au lycée et/ou dans l'enseignement supérieur. Nous pensons que le fait d'enseigner ou d'avoir enseigné l'arithmétique dans des niveaux plus avancés que la Seconde peut influencer les choix des enseignants pour préparer le cours d'arithmétique tel que : consulter des manuels de seconde autres que celui utilisé en classe, proposer des tâches mettant en jeu les concepts de théorie des nombres comme objets et pas seulement comme outils ; donner des définitions formelles des notions d'arithmétique au programme ; être attentifs aux questions d'existence et d'unicité etc, et les inciter à donner des explications plus approfondies des notions d'arithmétique.

16 enseignants ont enseigné l'arithmétique au collège et au Lycée dont 10 enseignants ont déclaré qu'ils avaient eu l'occasion d'enseigner l'arithmétique en classe de troisième ; très peu d'enseignants ont enseigné au cycle central. Notons enfin qu'un seul enseignant a indiqué qu'il n'a enseigné l'arithmétique qu'au collège.

Concernant la question sur les années pendant lesquelles ils ont enseigné l'arithmétique, 37 enseignants sur 54 ont donné une réponse. La plupart de ces enseignants ont l'expérience de l'enseignement de l'arithmétique après sa réintroduction dans les programmes, c'est-à-dire qu'ils n'avaient pas eu l'occasion d'enseigner l'arithmétique avec l'ancien programme. Seuls 6 d'entre eux ont dit avoir enseigné l'arithmétique avec les programmes de 1970, dont 2 enseignants en terminale. En fait, lorsque les enseignants ont indiqué qu'ils ont déjà enseigné l'arithmétique en Seconde, c'était nécessairement dans les derniers programmes (avant 2009), car comme nous l'avons déjà vu, il n'y avait pas d'arithmétique en seconde dans les anciens programmes.

Dans cette période, comme Ravel nous l'indique, l'arithmétique « *permet de revoir et d'approfondir l'étude des structures algébriques (...) et de compléter l'étude des ensembles de nombres.* » *(Ravel, 2003, p.22)*

Trois autres enseignants ont enseigné l'arithmétique avec les programmes de 1970 au collège et un autre enseignant en collège et lycée sans qu'il précise le niveau. Comme nous l'avons déjà dit, l'arithmétique est proposée en classe de $5^{ème}$ dans les programmes de 1970. Cependant, parmi ces 3 trois enseignants, deux ont souligné qu'ils faisaient de l'arithmétique en $6^{ème}$ et $5^{ème}$ (pour un enseignant) et en $5^{ème}$, $4^{ème}$ et $3^{ème}$ pour l'autre enseignant. Ceci nous montre que les enseignants avaient une certaine liberté pour exploiter les notions d'arithmétique dans le calcul numérique.

En résumé, les enseignants ayant répondu à notre questionnaire ont une expérience de l'enseignement de l'arithmétique, mais après sa réintroduction dans les programmes. Ceci peut être expliqué du fait que l'arithmétique était absente dans les années 1985. Notons enfin qu'aucun enseignant n'a indiqué qu'il faisait l'arithmétique dans cette période.

Question 5 :

Quel manuel est utilisé en classe de seconde dans votre établissement ?

Les réponses à cette question sont synthétisées dans le tableau ci-dessous :

Réponse	Effectif
Hyperbole	18
Déclic	8
Indice	8
Repère	4
Radial	3
Fractale	2
Math'x	2
Transmath	2
Modulo	1
Pythagore	1
Hatier	1
Aucun manuel	1
Non répondu	3
Total	54

Tableau 5 : Manuels utilisés en classe

On constate qu'Hyperbole est utilisé en classe par un tiers des enseignants. Comme nous allons le voir dans la question suivante, les enseignants qui utilisent des manuels autres qu'Hyperbole, se servent de ce dernier pour préparer leur cours. Déclic et Indice peuvent aussi être considérés comme représentatifs des manuels dont se servent les enseignants de seconde, cela peut donc signifier que les tendances de certains manuels (exercices, points particuliers du programme plus ou moins approfondis) peuvent se retrouver dans la vie de la classe.

Notons enfin qu'un enseignant a signalé qu'il n'utilise aucun manuel, en prenant en compte son expérience dans l'enseignement (40 ans).

Du fait que les manuels que nous avons analysés dans le chapitre IV ne sont pas représentatifs des manuels utilisés dans leurs pratiques par les enseignants qui ont répondu à notre questionnaire, les trois manuels les plus utilisés par les enseignants, Hyperbole, Déclic, et Indice, ont fait l'objet d'une analyse détaillée dans le chapitre VI.

Question 6 :

Pour votre enseignement d'arithmétique en seconde, vous utilisez :

Autres manuels de seconde

Manuels d'autre(s) niveau(x) du secondaire :   Collège ; Lycée

Revues, documents à destination des enseignants (brochures IREM, bulletin APMEP, etc.)

Manuels ou polycopiés universitaires

Revues et ouvrages de vulgarisation mathématique

Internet

Autres, précisez

Quatre enseignants n'ont pas répondu à cette question. Le diagramme ci-dessous propose une synthèse des 49 réponses.

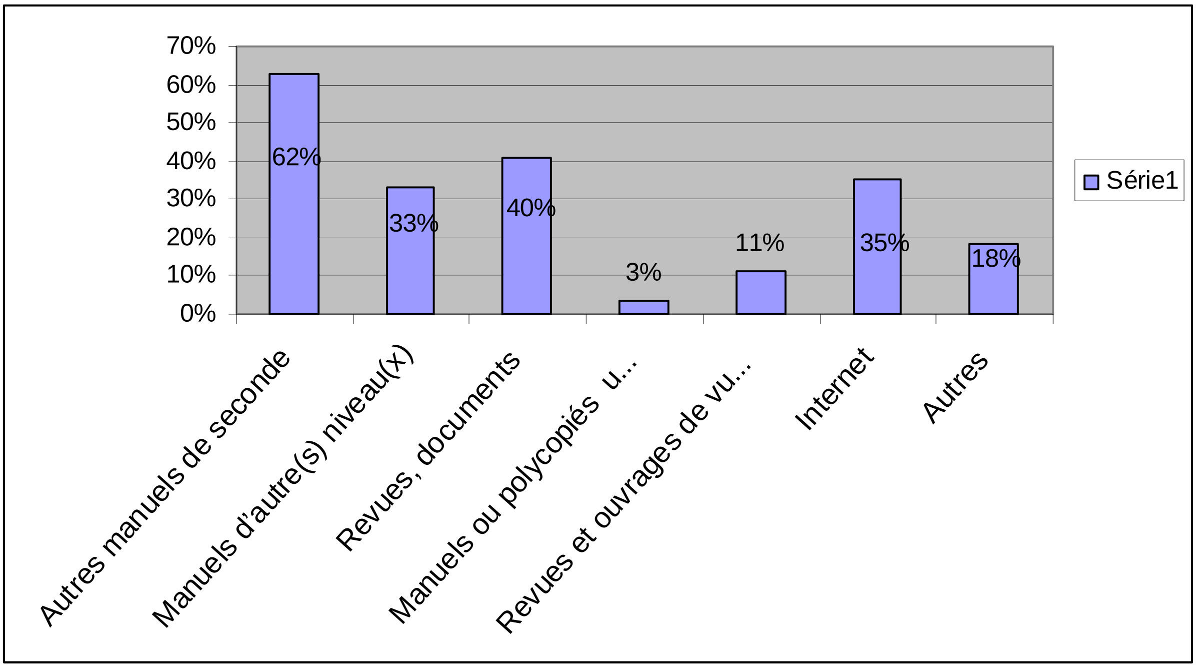


Figure 1:Les ressources utilisées par les enseignants en classe de Seconde

Près de deux tiers des enseignants de seconde (62%) se servent de plusieurs manuels de Seconde pour préparer leurs cours. Ceci peut être expliqué par le fait qu'il y a des différences significatives dans les manuels de seconde pour proposer l'arithmétique. Ainsi ces enseignants ne sont pas totalement assujettis au seul manuel de la classe ; ils peuvent choisir d'autres types d'exercices qui n'apparaissent pas dans le manuel de la classe. Parmi ces enseignants deux seulement enseignants ont cité les autres manuels utilisés : Hyperbole (2 fois), Déclic (une fois).

18 enseignants sur 54 (33%) se servent de manuels d'autres niveaux. Parmi ces enseignants, 13 enseignants utilisent seulement les manuels de lycée, 2 utilisent seulement les manuels de collège et 3 autres enseignants utilisent à la fois les manuels de collège et de lycée. Ce pourcentage peut être expliqué par le fait qu'un grand nombre des enseignants avait l'expérience d'enseigner l'arithmétique dans des niveaux autres que la seule classe de Seconde.

Notons qu'un seul enseignant se sert de manuels ou polycopiés universitaires.

Parmi notre population, l'utilisation des revues et documents à destination des enseignants (brochures IREM, bulletin APMEP, etc.) est assez répandue : 40% des enseignants disent les utiliser ; ceci est à mettre en relation avec le fait que notre échantillon soit composé d'enseignants sensibilisés aux questions d'enseignement.

Seuls trois enseignants ont cité les revues utilisées : IREM Lyon/Marseille (une fois), APMEP, Plot (une fois), jeux 8 (une fois). Parmi les enseignants ayant indiqué qu'ils utilisent internet, un seul enseignant a commenté sa réponse en expliquant qu'il consulte « les sites sur les nombres et sur l'histoire des maths ».

Les revues et ouvrages de vulgarisation mathématique sont utilisés par 11% des enseignants interrogés dont un a déclaré qu'il utilise les revues suivantes : *Tangente - Merveilleux nombres premiers (Delahaye/Belin)-Les nombres et leurs mystères (Warusfel/Points Sciences Seuil).*

Enfin, 35% des enseignants utilisent internet pour préparer leurs cours et proposer des exercices aux élèves.

Par ailleurs, comme nous l'avions prévu, en référence aux travaux de Trouche et al (2008), un pourcentage non négligeable des enseignants (18%) a déclaré qu'il utilise d'autres sources qui peuvent être classées en quatre catégories :

- Connaissance personnelle : 4 enseignants ont cité leur connaissance personnelle comme source de travail.
- Echanges avec leurs collègues : la rencontre avec les collègues est considérée comme source de travail pour 2 enseignants.
- Publications officielles : un enseignant a déclaré que le programme est la seule source auquel il revient pour son cours.
- Textes anciens *(Euclide*) : un enseignant déclare consulter les textes d'Euclide pour préparer son cours d'arithmétique.

En outre, deux enseignants ont déclaré qu'ils n'utilisent aucune source dans le cadre de la préparation de leur cours. Un de ces deux enseignants dit n'utiliser aucune des ressources citées dans cette question car le programme est très limité ; ce qui laisse penser qu'il se sert uniquement du manuel de la classe ; pour l'autre enseignant, en l'absence d'indices, nous ne pouvons pas savoir s'il s'en sert ou non.

Enfin, Il faut noter que 3 enseignants ont commenté leur réponse en indiquant que l'arithmétique a disparu des programmes de seconde en 2010.

Les réponses permettent en outre d’établir que dans notre population la plupart des enseignants utilise une ou plusieurs ressources parmi celles que nous avons proposées (le *curriculum matériel)* pour préparer leur cours d’arithmétique ; le tableau ci-dessous nous montre les effectifs selon le nombre de ressources utilisées ; on peut noter qu’environ un tiers des enseignants qui ont répondu à la question utilisent une seule ressource, tandis que plus de la moitié en utilisent 2 ou 3, un petit nombre utilisant 4 ressources ou plus.

Ressources	1 ressource	2 ressources	3 ressources	4 ressources	5 ressources	toutes ressources
Effectif	16	16	13	2	2	1

Tableau 6 : répartition des effectifs selon le nombre de ressources utilisées pour préparer les cours

On peut faire l’hypothèse que l’importance du recours à diverses ressources pour préparer les cours tient au fait que les enseignants disposent d’une certaine liberté dans leur choix, ceci d’une part parce que c’est la volonté affirmée de l’institution (ce qui se traduit en particulier par l’absence de manuels officiels) ; d’autre part parce que pour les contenus d’arithmétique, comme nous l’avons vu, il y a de nombreuses organisations mathématiques possibles pour traiter les notions aux programmes.

Question 7 :

Définissez-vous l’arithmétique à vos élèves ? Si oui quelle définition leur donnez-vous ?

Nous avons posé cette question pour savoir si les enseignants donnent une définition de l’arithmétique à leurs élèves en classe de seconde, nous allons donc considérer que la réponse des enseignants qui ne définissent l’arithmétique qu’en classe de terminale est négative.

Les réponses à cette question sont synthétisées dans le tableau ci-dessous :

Réponses	Effectif
Oui	27
Non	26
Non répondu	1
Total	54

Tableau 7 : réponses à la question : « donnez-vous une définition de l’arithmétique à vos élèves » ?

Un seul enseignant n’a pas répondu à cette question ; on constate que les réponses positives et négatives s’équilibrent.

Parmi les 26 enseignants ayant répondu à cette question dans le cas négatif, 9 enseignants ont déclaré qu'ils ne définissent pas l'arithmétique à leurs élèves. Cependant, ils nous ont donné une définition. Nous regroupons ces enseignants en trois catégories :

- 4 enseignants ont indiqué qu'ils ne définissent l'arithmétique qu'en classe de terminale S. Parmi eux, trois enseignants ont signalé que l'arithmétique concerne l'étude des entiers, et un autre enseignant a déclaré qu'il s'agit du calcul numérique.
- 2 enseignants nous ont défini l'arithmétique bien qu'ils aient indiqué ne pas donner une définition à leurs élèves ; la définition proposée par ces deux enseignants concerne l'étude des nombres entiers et relatifs (1 réponse), et les propriétés des entiers (1 réponse).
- 3 enseignants ont indiqué qu'ils ne proposent pas de définition de l'arithmétique, mais précisent à leurs élèves qu'elle s'intéresse aux entiers (2 réponses), ou qu'il s'agit de calcul numérique dans Z (1 réponse).

Le diagramme ci-contre présente l'ensemble des données pour les 27 enseignants qui ont donné une réponse positive à cette question.

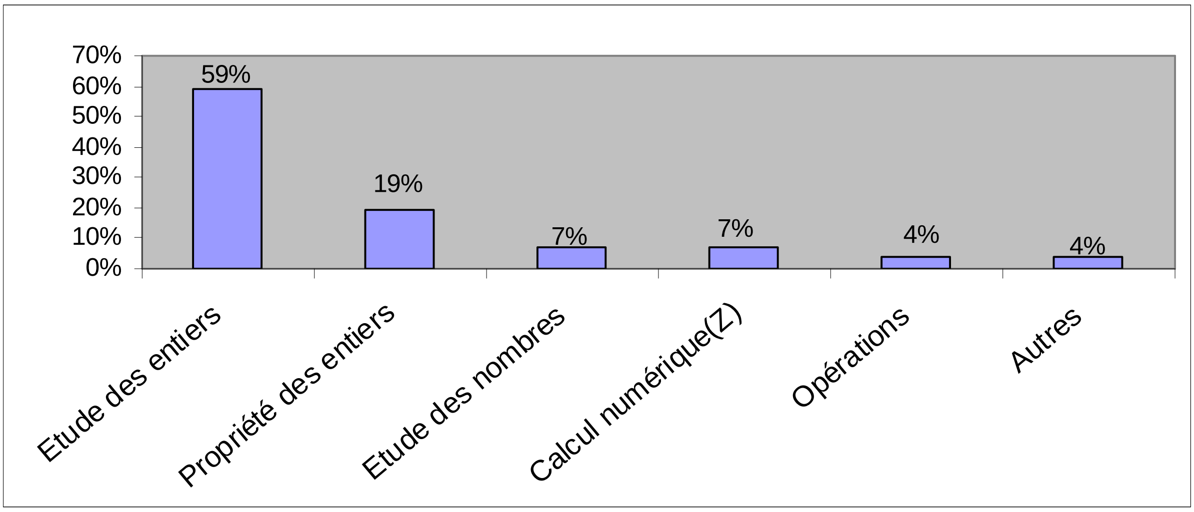


Figure 2 : les définitions de l'arithmétique données par les enseignants qui en proposent une à leurs élèves

Plus de deux tiers des enseignants (78%) associent l'arithmétique spécifiquement aux entiers. Cependant, la définition de l'arithmétique comme l'étude *des propriétés des entiers* n'a été donnée que par 19 % des enseignants, contre 59% des enseignants qui définissent l'arithmétique par l'étude des entiers. Ceci met en évidence que les enseignants n'explicitent pas les propriétés et les relations associées à l'arithmétique dans leur définition, ceci pet être mis en lien avec le fait que l'arithmétique n'est généralement pas définie dans la plupart des manuels. Comme nous l'a montré l'analyse des trois manuels les plus utilisés par les enseignants, seul Déclic2000 donne une définition de l'arithmétique en explicitant qu'il s'agit de l'étude des propriétés des entiers.

Notons que quatre enseignants (7%) réduisent l'arithmétique au calcul numérique sur les entiers ; nous citons par exemple une réponse :

P22 : L'arithmétique c'est la partie des mathématiques qui concerne les calculs dans N (et plus tard dans Z).

Quatre enseignants ne précisent pas qu'il s'agit des nombres entiers : ils donnent comme réponse « étude de nombres », et un enseignant considère que l'arithmétique c'est le calcul numérique sur tous les nombres : « *l'arithmétique traduit toutes les opérations avec les nombres avec toutes les règles de simplification et de calcul qu'elles engendrent* ».

Notons enfin qu'un enseignant a signalé que l'arithmétique c'est la *définition étymologique.*

C'est ainsi que, les propriétés et les relations entre les entiers associées à l'arithmétique ne sont pas explicitées par la plupart des enseignants. Nous faisons l'hypothèse que le questionnaire élève montrera que ceci est difficile à saisir par leurs élèves dans leur questionnaire.

Question 8 :

Au collège, les élèves ont rencontré un certain nombre de notions d'arithmétique. Parmi celles-ci, lesquelles retravaillez-vous avec vos élèves de seconde ?

Deux enseignants n'ont pas répondu à cette question. Quatre enseignants ont signalé qu'ils ne reprennent pas en classe de seconde les notions déjà apprises au collège, dont un enseignant a indiqué qu'il fait appel à la notion puissance et aux règles de simplification des fractions.

Nous regroupons les 48 enseignants restants en quatre catégories suivant le nombre des notions citées dans leurs réponses :

- Enseignants ayant cité seulement une notion (14 réponses).
- Enseignants ayant indiqué au moins deux notions dans leur réponse (31 réponses).
- Enseignants ayant signalé qu'ils reprennent toutes les notions d'arithmétique vues au collège (3 réponses).

Le diagramme ci-dessous nous présente la fréquence d'apparition d'une notion dans la réponse des 48 enseignants ayant répondu à cette question. Nous signalons que la notion de diviseur est notée dans ce diagramme : diviseur : DVR, multiple : MUL, divisible : DVL.

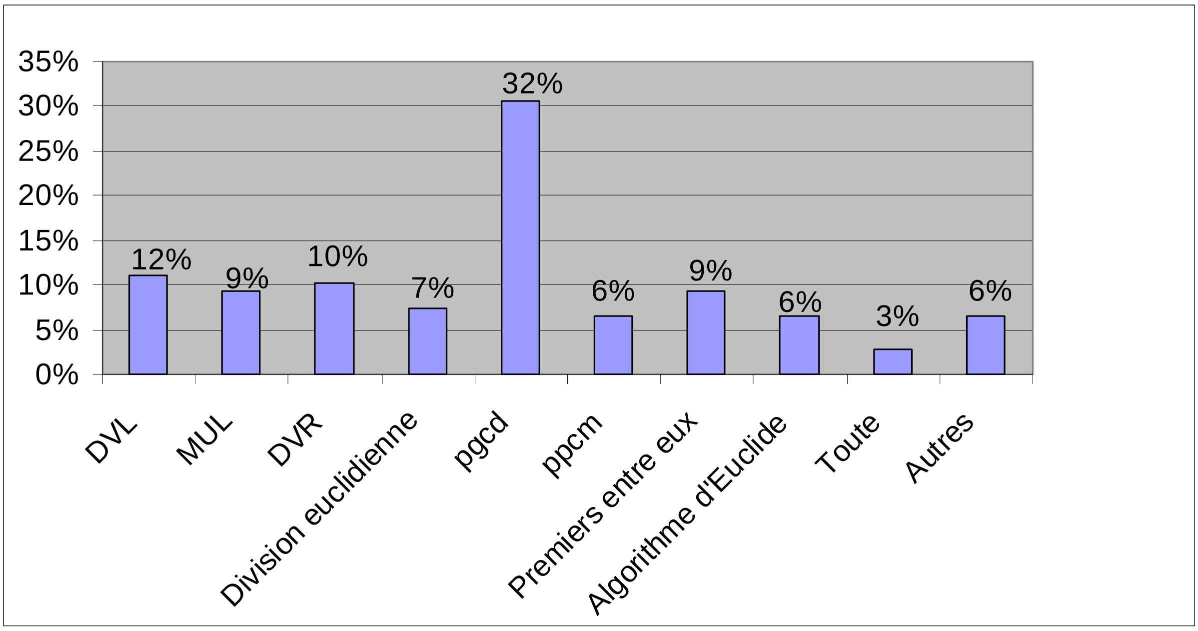


Figure 3 : notions étudiées au collège qui sont retravaillées par les professeurs de seconde

Il ressort de ce tableau que 32 % des enseignants retravaillent en classe de Seconde sur la notion de pgcd, mais que très peu des enseignants (6 %) reprennent l'algorithme d'Euclide. Ceci peut être justifié par le fait que les enseignants tentent de mettre en place la décomposition en facteurs premiers sans utiliser l'aspect algorithmique. Ceci donne un indicateur de ce que la niche algorithmique n'occupe pas beaucoup de place dans l'enseignement de l'arithmétique en classe de seconde, ceci en conformité avec les résultats de l'analyse des manuels.

Comme nous l'avons prévu dans l'analyse a priori, la divisibilité et les nombres premiers entre eux sont les plus présents dans le travail des enseignants après la notion de PGCD. Un pourcentage presque équitable pour divisible (12 %) / diviseur (10 %), tandis que la notion de multiple est présent avec un pourcentage (9 %). Contre (9 %) des nombres premiers entre eux.

On peut noter que la division euclidienne est peu travaillée par les enseignants (7% des réponses). Nous allons voir dans la question 10 que très peu des enseignants proposent la division euclidienne comme méthode pour déterminer la primalité des entiers.

Comme nous l'avions prévu, très peu d'enseignants (6 %) reprennent la notion de ppcm.

Notons enfin que 6 % des enseignants ayant donné autres notions telles : Puissances, racine carrée, numération,…

D'une manière générale, nous pouvons dire que la reprise des notions d'arithmétique en Seconde prend assez de place dans la pratique des enseignants. La notion de PGCD est la plus présente dans le travail des enseignants, au détriment d'autres notions d'arithmétique, ceci alors que l'analyse des trois manuels Ind04, Hyp04, Dec04 nous a montré que la divisibilité et les nombres premiers entre eux sont les notions reprises par les auteurs des manuels dans la partie « Cours ».

Nous faisons l'hypothèse que les enseignants reprennent les notions d'arithmétique qu'ils ont identifiées comme pouvant aider leurs élèves à étudier les notions d'arithmétique en classe de seconde, et diminuer ainsi les difficultés que les élèves pourraient rencontrer dans l'apprentissage de ces nouvelles notions.

Question 9

Quelles sont les principales difficultés que rencontrent vos élèves à propos de notions d'arithmétique? Que proposez-vous pour les aider à surmonter ces difficultés ?

Comme nous l'avons déjà dit dans l'analyse a priori, nous allons dégager dans cette question les difficultés relatives à l'arithmétique comme objet et comme outil du point de vue des enseignants.

7 enseignants n'ont pas répondu à cette question et 6 enseignants ont déclaré que leurs élèves n'ont pas de difficulté avec l'arithmétique. Nous présentons ci-dessous l'ensemble des données des 41 enseignants restants en les regroupant en trois catégories :

- Enseignants ayant donné des difficultés relatives exclusivement à l'arithmétique comme objet /outil (17 réponses).
- Enseignants ayant indiqué des difficultés associées à la fois à l'arithmétique et au calcul numérique et à d'autres notions telles que les puissances, le raisonnement (8 réponses). Parmi ces enseignants, trois n'ont pas défini l'arithmétique dans la question 7, tandis que les cinq autres ont associé l'arithmétique aux entiers. Nous faisons l'hypothèse que les difficultés liées au calcul numérique, indiquées par les enseignants ayant associé l'arithmétique aux entiers, renvoient à la niche « calcul numérique » de l'arithmétique, en particulier aux applications du pgcd et du ppcm pour simplifier des fractions ou pour réduire des fractions au même dénominateur.
- Enseignants ayant présenté des difficultés liées uniquement au calcul numérique telles que la mauvaise maîtrise de la table de multiplication, le recours à l'utilisation de la calculatrice au lieu de faire le calcul mental,… (16 réponses). En lisant les réponses données par ces enseignants à la question 7, nous trouvons que la moitié d'entre eux n'ont pas défini l'arithmétique, et que l'autre moitié de ces enseignants a associé l'arithmétique aux entiers.

Nous synthétisons dans le diagramme ci-dessous, les difficultés indiquées par les 41 enseignants :

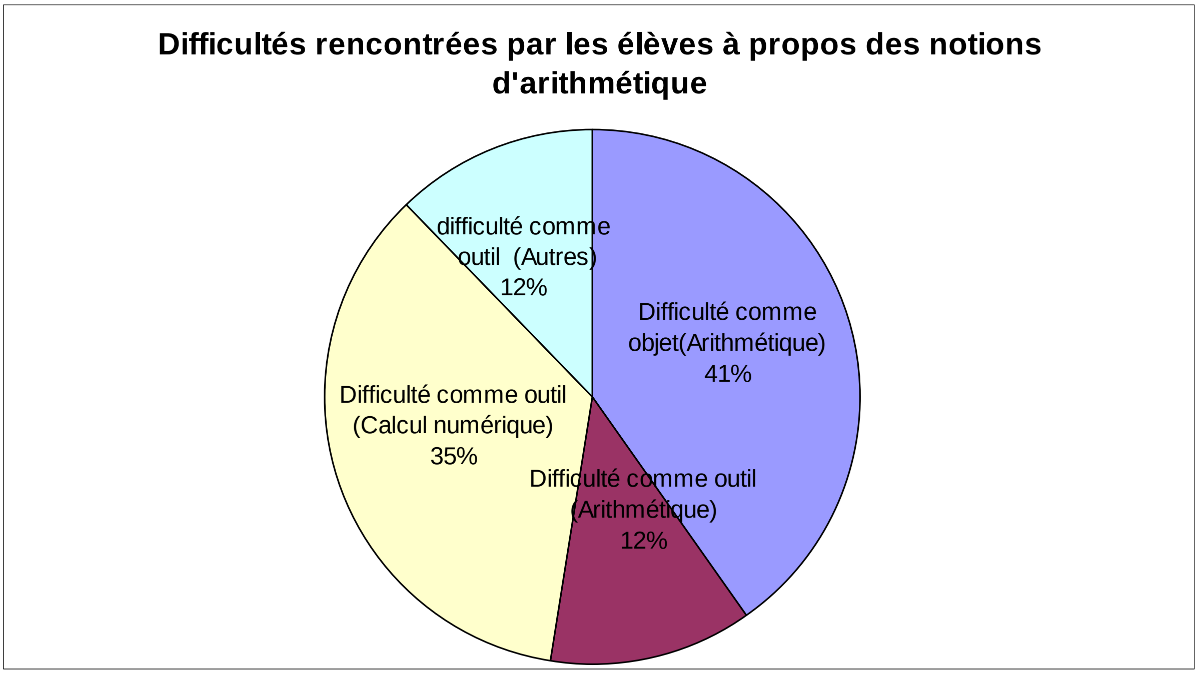


Figure 4 : les difficultés des élèves identifiées par les enseignants

Nous trouvons que un peu plus de la moitié des difficultés indiquées par les enseignants (53 %) sont des difficultés liées à l'arithmétique au sens de la théorie des nombres comme objet (41%) ou comme outil (12%). 47 % des difficultés signalées par les enseignants concernant l'aspect outil ne sont pas directement au cœur de l'arithmétique (les propriétés des entiers) : 35 % relèvent du calcul numérique et 12 % concernent d'autres difficultés (les puissances, le raisonnement, l'ensemble des nombres, le manque de temps etc.).

- Les difficultés relatives à l'arithmétique comme objet (23 réponses) :
    - Difficulté relative à la prise de conscience que les notions d'arithmétique étudiées concernent spécifiquement les entiers (4 réponses).
    - « *Confusion dans les règles de divisibilité* » (1 réponse).
    - confusion entre les deux notions : multiple et diviseur (3 réponses).
    - confusion dans le concept du quotient de la division euclidienne et celui de la division décimale (1 réponse).
    - confusion concernant le pgcd de deux nombres (d'un nombre) (1 réponse).
    - confusion entre les nombres premiers et les nombres premiers entre eux (2 réponses).
    - difficulté relative à la compréhension de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers (1réponse).
    - La méthode de la décomposition en facteurs premiers (7 réponses).
    - Difficultés avec les énoncés, les définitions et les théorèmes (3 réponses).

- Les difficultés relatives à l'arithmétique comme outil (7 réponses):
  - Difficulté liée à la mise en oeuvre de la division euclidienne (2 réponses).
  - Trouver le pgcd et le ppcm à l'aide de la décomposition en facteurs premiers (2 réponses).
  - Application du pgcd et du ppcm pour simplifier les fractions et réduire au même dénominateur (3réponses).
- Les difficultés liées au calcul numérique (20 réponses).
  - Effectuer les calculs (10 réponses).
  - Maîtrise de la table de multiplication (8 réponses).
  - Problème concernant l'utilisation de la calculatrice au lieu d'utiliser le calcul mental (2 réponses).
  - Autres difficultés (7 réponses).
  - Problème sur les exposants (4 réponses).
  - Difficultés liées au raisonnement (2 réponses).
  - Manque dans la compréhension de l'ensemble des nombres et manque de temps (1 réponse).

D'après les enseignants, la décomposition en facteurs premiers est la notion la plus difficile pour les élèves ; ceci est conforme à ce que nous avons trouvé dans les travaux antérieurs (IREM de Toulouse) ; néanmoins, elle n'est citée que 8 fois.

Comme nous l'avions prévu dans l'analyse a priori, la divisibilité et la division euclidienne sont sources de difficulté pour les élèves.

> *P18 : Confusion entre multiple et diviseur, Beaucoup de difficulté du au fait qu'ils ne donnent pas de sens à la division et à la multiplication.*
>
> *P46 : (…) confusion entre division euclidienne et quotient a/b approché ou décimale.*

Nous pensons que l'ambigüité relative à la distinction propriété/relation pour les entiers, ne permet pas une compréhension adéquate de la notion de divisibilité.

Il est remarquable que la niche raisonnement de l'arithmétique vit chez certains enseignants ayant identifié les difficultés liées au raisonnement.

Ce qui ressort de cette question c'est que pour certains enseignants, les difficultés repérées sont essentiellement liées au calcul, tandis que pour d'autres, elles renvoient explicitement aux aspects théorie des nombres, tant comme objet que comme outil. D'une manière générale, on observe une grande dispersion des réponses.

Quant aux élèves, d'après leur enseignant, ils n'arrivent pas à s'approprier l'arithmétique qui leur semble difficile, malgré la familiarité avec les entiers. Une première difficulté vient de ce que les élèves n'associent pas l'arithmétique aux entiers, ce qui entraîne des difficultés dans la compréhension de la relation de divisibilité et de la division euclidienne. La distinction entre nombres premiers et nombres premiers entre eux n'est pas claire pour certains élèves. Comme on l'a dit plus haut, la décomposition en facteurs premiers leur pose une vraie difficulté, et son utilisation pour le calcul du pgcd ou du ppcm est difficile ; ceci pourrait induire chez certains élèves une confusion dans la compréhension du pgcd comme nous allons le voir dans le questionnaire des élèves.

Question 10 :

Quelle définition donnez-vous à vos élèves des nombres premiers ? Quelle(s) méthode(s) proposez-vous à vos élèves pour déterminer si un nombre est premier ou pas ?

Pour la première partie de cette question, nous rappelons que nous focalisons notre analyse sur les catégories suivantes :

- Définition complète ou non complète.
- Type de définition (dénomination, définition par exemple, autre)
- Langage (mathématique, courant).
- A quel concept renvoie la définition de nombre premier.

3 enseignants n'ont pas donné une définition des nombres premiers. Nous synthétisons l'ensemble des données des 51 enseignants restants dans le tableau ci-dessous :

Réponse	Définition		Type de Définition			Langage		Quel concept renvoi	
Définition	Complète	Non complète	Dénomination	Par exemple	Autre	Maths	Courant	DVR	DVL
Effectif	31	20	35	---	16	51	----	46	5
Total	51								

Tableau 8 : les définitions de la notion de nombre premier dans le questionnaire enseignant

Plus d'un tiers des enseignants proposent une définition que nous avons qualifiée d'incomplète, c'est-à-dire qui n'explicite pas le fait que les nombres premiers sont structurés autour des entiers (plus particulièrement les entiers naturels). On peut faire l'hypothèse que cela n'aidera pas les élèves à prendre conscience de cette spécificité, et les privera d'une occasion de se familiariser avec les entiers.

Tous les enseignants ont verbalisé leur définition dans un langage mathématique.

Le concept de « diviseur » est mobilisé dans la définition par la plupart des enseignants. Notons qu'un nombre non négligeable des enseignants n'a pas attribué la propriété caractéristique au nom des nombres premiers, ce qui ne permet pas d'avoir une définition de type dénomination.

Nous constatons également que la définition de nombre premier comme nombre entier qui vérifie une propriété caractéristique n'a pas donné lieu à des définitions familières chez les enseignants. Nous nous demandons si c'est le cas lorsqu'il s'agit d'une définition qui doit mettre l'accent sur la relation entre plusieurs objets mathématiques. Nous allons apporter la réponse dans la question suivante (Q11).

Pour la deuxième partie de cette question, 9 enseignants n'ont pas répondu, et 45 enseignants ont choisi une ou plusieurs méthodes pour déterminer la primalité d'un nombre. Nous synthétisons les résultats concernant le nombre de méthodes proposées dans le tableau ci-dessous avant de détailler les réponses obtenues :

Réponse	3 méthodes	2 méthodes	1 méthode	Non répondu	Total
Fréquence	1	22	22	9	54

Tableau 9 : nombre de méthodes pour déterminer la primalité d'un nombre proposées par les enseignants

Un enseignant a donné les 3 méthodes suivantes pour répondre à cette question : les critères de divisibilité, le Crible d'Eratosthène et effectuer la division par les nombres premiers en utilisant la calculatrice.

22 enseignants interrogés ont proposé deux méthodes pour déterminer la primalité d'un nombre. Les paires de méthodes sont les suivantes :

- Diviser par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ et Crible d'Eratosthène (10 fois)
- Diviser par tous les nombres successifs jusqu'à ce que le quotient « soit » plus petit que le diviseur et Crible d'Eratosthène (1 fois).
- Critères de divisibilité et Crible d'Eratosthène (2 fois).
- Décomposer en facteurs premiers et Crible d'Eratosthène (2 fois).
- Diviser par les nombres premiers inférieurs à n et Crible d' Eratosthène (1 fois).
- Critères de Divisibilité et diviser par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ (5 fois).

- Décomposer en produit de facteurs premiers et diviser par tous les nombres successifs jusqu'à ce que le quotient « soit » plus petit que le diviseur (1 fois)

22 autres enseignants ont proposé une seule méthode :

- Diviser par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ (13 fois).
- Diviser par tous les nombres successifs jusqu'à ce que le quotient « soit » plus petit que le diviseur (4 fois).
- Critères de divisibilité (3 fois).
- Diviser par tous les nombres inférieurs à n (2 fois).

Si l'on rajoute les réponses des enseignants qui ont donné une méthode avec ceux qui ont donné deux ou plusieurs méthodes, la fréquence d'apparition d'une méthode augmente. Nous présentons dans le diagramme ci-dessous le pourcentage d'apparition d'une méthode parmi les 45 réponses obtenues. Notons que M1, M2, M0, DVL, Déc, dans ce diagramme, sont associées aux méthodes suivantes :

- M1 : Diviser par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

- M2 : Diviser par tous les nombres successifs jusqu'à ce que le quotient « soit » plus petit que le diviseur.

- M0 : Diviser par tous les nombres inférieurs à n.

- Eratosthène : Crible d'Eratosthène.

- DVL : Critères de divisibilité

- Déc : décomposition en facteurs premiers.

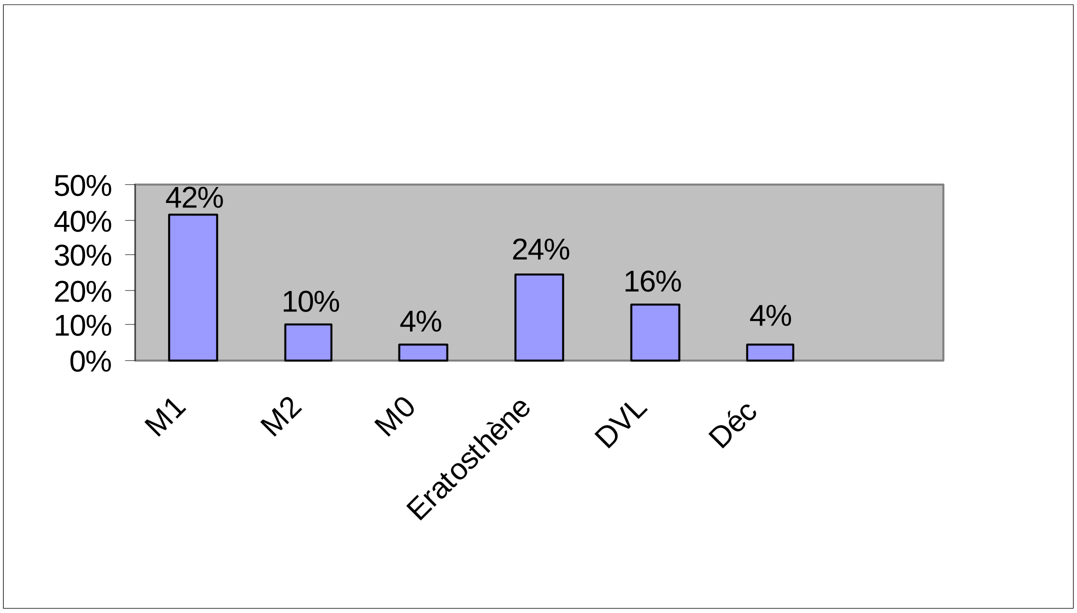


Figure 5 : les méthodes proposées par les enseignants pour étudier la primalité d'un nombre

Il apparaît clairement dans ce digramme que la méthode M1 (diviser par tous les nombres premiers inférieurs à √n) est dominante sur les autres méthodes pour déterminer la primalité d'un nombre. Peu d'enseignants (10 %) utilisent la méthode M2.

L'analyse a priori nous a montré que le choix des manuels de proposer une technique pour reconnaître si un nombre est premier est très différent. Un manuel choisit de proposer M1, alors que M2 est présentée dans un autre manuel. Le troisième manuel analysé se limite à la définition de nombres premiers.

L'analyse des trois manuels les plus utilisés par les enseignants, Hyp, Ind, Déc, nous a montré que le choix est aussi différent. Hyp2000 et Hyp04 se borne à la définition de nombre premier. Au contraire d'Ind2000, Ind04 propose M2. En ce qui concerne Dec, les deux techniques sont présentes chez Dec2000, en mettant en œuvre la technique M1 avec l'outil informatique. Mais la technique M2 va sortir des manuels Dec04 en laissant la place à M1 qui est mis en œuvre avec l'outil informatique.

Il est remarquable que, la plupart des enseignants ayant utilisé Indice, ont utilisé la technique M1 alors que la technique M2 n'est utilisée que par deux enseignants. Ceci montre que les enseignants ne se limitent pas aux techniques proposées dans le manuel utilisé, mais ils choisissent d'autres manuels pour résoudre les tâches en Seconde.

Pour les enseignants ayant déclaré utiliser les manuels Hyperbole et Déclic, la technique M1 est dominante ; la technique M2 n'est utilisée que par un seul enseignant

Notons que le crible d'Eratosthène est la deuxième méthode proposée par les enseignants.

Peu d'enseignant ont signalé qu'ils proposent l'utilisation de la calculatrice pour déterminer la primalité d'un nombre ; ce résultat est étonnant si on le met en regard avec la réponse des enseignants à la question 12 dans laquelle nous trouverons que la calculatrice est présente dans la pratique des enseignants pour déterminer la primalité des entiers.

Question 11 :

Quelle définition du pgcd donnez-vous en classe de seconde ? Quelle(s) méthode(s) de détermination du pgcd proposez-vous à vos élèves ? Si vous en proposez plusieurs, précisez à l'aide d'exemples le contexte d'utilisation de chaque méthode ?

- 8 enseignants n'ont pas répondu à la première partie de cette question concernant la définition du pgcd.

- 10 enseignants ont dit qu'il ne donnent pas de définition du pgcd car :

a) Il n'est pas au programme de seconde (7 réponses).

Ces enseignants n'ont pas non plus répondu à la deuxième partie de cette question, au motif que l'arithmétique a disparu des programmes de 2009.

b) Il est vu dans les exercices, mais pas en cours. (1 réponse)

c) Il a déjà été défini en classe de 3ème (1 réponse).

Un autre enseignant a déclaré qu'il ne définit pas le pgcd à leurs élèves de seconde sans justifier sa réponse.

En fait, ces trois derniers enseignants ont annoncé qu'ils ne définissent pas le PGCD, cependant deux enseignants d'entre eux ont indiqué dans la question 8 qu'ils retravaillent sur le PGCD. Par contre, dans la deuxième partie de cette question, ils n'ont pas proposé de méthode pour déterminer le PGCD.

Parmi les 36 enseignants ayant donné une définition du pgcd, 26 enseignants ont défini le pgcd par une reformulation de pgcd (P29: *le plus grand diviseur commun.*) ou ont signalé explicitement qu'on le définit à partir de son nom (P49 : *Celle donnée par le nom*).

Ceci peut être expliqué par deux choses :

- Les enseignants ont tendance à reformuler le pgcd parce que certains manuels le proposent comme une abréviation. Ceci met en évidence que les enseignants n'explicitent pas les relations entre les entiers, ni l'ordre divisibilité dans leur définition de PGCD. Ils montrent plutôt la propriété que vérifie le PGCD avec l'ordre naturel.

- Le pgcd n'est pas un objet d'étude en seconde, les enseignants se contentent de rappeler que le pgcd est le plus grand diviseur commun de deux nombres.

Nous présentons dans le tableau suivant une synthèse de l'ensemble des données correspondant aux 10 enseignants ayant défini le pgcd selon les aspects distingués dans l'analyse *a priori* :

	Réponse		Type de Définition		Langage		Prédicative/ Opératoire	
Définition	Complète	Non complète	Dénomination	Autre	Maths	Courant	Prédicatif	Opératoire
Effectif	5	5	2	8	6	4	7	3
Total	10							

Tableau 10 : les définitions du pgcd dans le questionnaire enseignant

La moitié des enseignants n'ont pas explicité dans leur réponse le fait que le pgcd est structuré autour des entiers ; le risque est que leurs élèves n'aient pas conscience qu'ils travaillent avec les entiers, cette absence de conscience, comme nous l'avons déjà vu, constitue une des difficultés rencontrées par les élèves du point du vue des enseignants.

La plupart des enseignants n'a pas donné de définition de type dénomination ; par contre, la majorité des réponses est donnée sous forme prédicative.

Un grand nombre des enseignants ont verbalisé leur définition en langage courant, alors qu'ils ont défini les nombres premiers en langage courant, ceci peut être expliqué par le fait que le rôle propriété/relation est en enjeu dans la définition.

Avant de présenter les différents types de définitions proposées par les enseignants, nous rappelons que nous avons distingué dans l'analyse *a priori* D1, D2, D3, D4, D5 pour définir le pgcd :

D1 : elle permet de montrer l'aspect existence du pgcd.

D2 : elle définit le pgcd comme le plus grand entier des diviseurs communs de deux entiers.

D3 : elle est proposée sous deux conditions : *i)* $d | a$ et $d | b$; *ii)* si $c | a$ et $c | b$, alors $c \leq d$. Elle peut être représentée sous la forme : le plus grand entier naturel qui divise simultanément ces deux entiers.

D4 : elle est proposée à partir de l'intersection $D(a) \cap D(b)$.

D5 : elle définit le pgcd à partir de la décomposition en facteurs premiers.

Nous regroupons les 10 enseignants ayant défini le pgcd en 4 catégories suivant le type de définition proposée :

- Enseignants ayant donné la définition D1 (1réponse).

  P42 : *comme chaque entier a un nb fini de diviseurs, et qu'il y a toujours au moins 1 comme diviseurs, il y a un diviseur commun qui est le plus grand.*

L'enseignant ici propose sa propre définition dans un langage courant sous la forme opératoire, sans donner le nom à la propriété caractéristique, en montrant l'aspect existence du pgcd.

- Enseignants ayant donné la définition D2 (5 réponses).

Elle est proposée par les enseignants dans un langage mathématique (2 réponse) et courant (3 réponse), sous la forme opératoire (2 réponses) et prédicative (3 réponses). La définition de type dénomination du pgcd n'a été proposée que par un enseignant, et seuls deux enseignants ont indiqué que le pgcd est un entier naturel : voici la réponse de certains enseignants :

P6 : *PGCD : plus grand commun diviseur*

$a = \{d_1, d_2, \ldots .d_m\}$ $b = \{p_1, p_2, \ldots .p_n\}$ *diviseur commun (a, b)* $= \{e_1, , \ldots .e_l\}$

P47 : *Le plus grand entier commun dans les listes des diviseurs de chacun des nombres.*

P51 : *On fait la liste de diviseurs, on regarde les éléments communs et on prend le plus grand.*

L'ordre divisibilité ici n'est pas explicité par les enseignants.

- Enseignants ayant donné la définition D3 (3 réponses).

Les trois enseignants ont proposé la définition D3 dans un langage mathématique, sous la forme prédicative, sans donner le type « Dénomination » de la définition. Parmi les 3 enseignants, un enseignant a donné une réponse non complète de la manière suivante :

P50 : *A l'aide de l'expression « plus grand diviseur commun » et en explicitant que*

1) c'est un diviseur de chaque nombre.

2) il n'y en a pas de « plus grand »

Cet enseignant explicite ici à la fois l'ordre divisibilité et l'ordre naturel dans sa définition.

La définition D3 est proposée par 2 autres enseignants sous la forme suivante :

P8 : plus grand nombre qui divise les deux à la fois.

- Enseignant ayant proposé la définition D4 (1 réponse).

P3 : *C'est le grand nombre entier qui appartient à* $Div(a) \cap Div(b)$

Cette définition est proposée dans un langage mathématique, sous la forme prédicative, précisant que le pgcd est structuré autour des entiers. Par contre, elle n'explicite pas l'ordre divisibilité.

Notons enfin qu'aucun enseignant ayant répondu à cette question ne propose la définition du pgcd à partir de la décomposition en facteurs premiers.

Ainsi, la définition du pgcd en référence à l'ordre divisibilité n'est presque jamais explicitée dans la réponse des enseignants ; ceci correspond à ce que l'on trouve dans les manuels.

- Dans la deuxième partie de cette question, nous avons demandé aux enseignants quelle(s) méthode(s) ils proposent à leurs élèves pour déterminer le pgcd, et dans le cas où ils en proposent plusieurs, quels sont les contextes d'utilisation des différentes méthodes. Nous synthétisons l'ensemble des données des réponses dans le tableau suivant :

Une méthode	Deux méthodes	Trois méthodes	Quatre méthodes	Non répondu	Total
14	16	10	2	12	54

Tableau 11 : nombre de méthodes proposées par les enseignants pour déterminer le pgcd

Douze enseignants n'ont pas répondu à cette partie de la question, les 42 enseignants restants ont proposé au moins une méthode pour déterminer le pgcd. Nous présentons dans ce qui suit les méthodes proposées par les 42 enseignants ayant répondu à cette question :

Une méthode : 14 enseignants ont proposé seulement une méthode pour déterminer le pgcd

- La décomposition en facteurs premiers (11 réponses).
- Algorithme d'Euclide (2 réponses).
- Ensembliste (1 réponse).

Deux méthodes : 16 enseignants ont proposé deux méthodes :

- Algorithme d'Euclide et décomposition en facteurs premiers (14 réponses).
- Ensembliste et décomposition en facteurs premiers (1 réponse).
- Soustractions successives et décomposition en facteurs premiers (1 réponse).

Trois méthodes :

- Ensembliste, algorithme d'Euclide et décomposition en facteurs premiers (7 réponses).
- Soustractions successives, algorithme d'Euclide et décomposition en facteurs premiers (2 réponses).
- Ensembliste, soustractions successives et algorithme d'Euclide (1 réponse).

Quatre méthodes :

- Ensembliste, soustractions successives, algorithme d'Euclide et décomposition en facteurs premiers (2 réponses).

Le diagramme ci-contre nous présente le pourcentage d'apparition de chaque méthode dans l'ensemble des réponses des 42 enseignants ayant répondu à cette question :

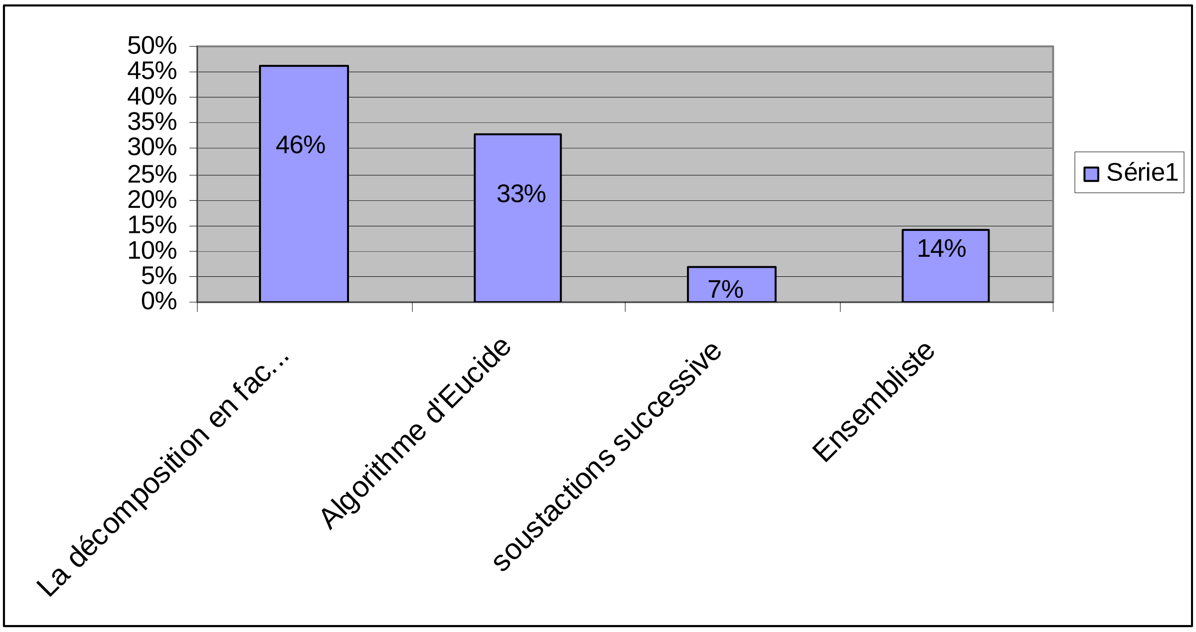


Figure 6 : pourcentage d'apparition des différentes méthodes pour déterminer le pgcd.

Ainsi nous trouvons que la décomposition en facteurs premiers est dominante dans la pratique des enseignants en classe de seconde. L'algorithme d'Euclide apparaît peu lorsque les enseignants proposent une seule méthode, mais dès lors qu'ils proposent au moins deux méthodes différentes, les enseignants choisissent l'algorithme d'Euclide.

Notons que la troisième méthode privilégiée après la décomposition en facteurs premiers et l'algorithme d'Euclide par les enseignants est la méthode ensembliste qui met en œuvre la définition D2.

Pour le contexte d'utilisation de chaque méthode, 9 enseignants ont répondu à cette partie de cette question.

	Décomposition	Algorithme d'Euclide	Ensembliste	SS
Contexte	Petits nombres (2 réponses)	Grands nombres (2 réponses).	Petits nombres (2 réponses)	Grands nombres (1 réponse).
	Simplifier des fractions (3 réponses)	Avec les nombres qui ne conduisent à plusieurs étapes (1réponse).		
	Avec les nombres décomposés (2 réponses)	Avec les nombres non décomposés (1réponse).		

Tableau 12 : le contexte d'utiliser chaque méthode du point du vu des enseignants

Trois enseignants se sont contentés d'indiquer les avantages et les désavantages de certaines méthodes :

- un enseignant a indiqué que l'algorithme d'Euclide ne nécessite pas de trouver les diviseurs premiers, mais qu'il est long et fastidieux lorsqu'il s'agit de trouver le pgcd de plus de deux nombres.

- un enseignant a signalé que la décomposition en facteurs premiers est difficile pour les élèves, alors qu'au contraire, la méthode ensembliste est facile pour eux, et ils font des erreurs avec l'algorithme d'Euclide.

- un enseignant a souligné qu'il fait la décomposition en facteurs premiers, car elle met en œuvre les nombres premiers et les puissances, bien que les élèves connaissent bien l'algorithme d'Euclide, et la méthode ensembliste est longue pour eux.

Les deux méthodes - algorithme d'Euclide et la décomposition en facteurs premiers - sont les deux méthodes les plus fréquentes dans la réponse des enseignants à la question des contextes d'utilisation des différentes méthodes, la décomposition en facteurs premiers étant celle qui est donnée lorsqu'une seule méthode est proposée.

Question 12 :

Faites-vous travailler vos élèves sur des activités basées sur l'utilisation de la calculatrice et/ou de l'ordinateur avec les notions d'arithmétique? Si oui avec quelle(s) notion(s) ?

Les réponses à cette question sont résumées dans le tableau suivant :

Réponse	Effectif	Pourcentage
Oui	24	45 %
Non	26	48 %
Non répondu	4	7 %
Total	54	100 %

Tableau 13 : Présence ou non d'activités basées sur la calculatrice ou l'ordinateur

Quatre enseignants sur 54 (7%) n'ont pas répondu à cette question, ou n'ont pas précisé leur position.

45 % des enseignants font travailler leurs élèves sur des activités basées sur l'utilisation de la calculatrice/l'ordinateur contre 48 % pour lesquels la calculatrice n'est pas utilisée dans le cours d'arithmétique. Ceci montre que la démarche algorithmique qui peut être mise en œuvre dans l'outil informatique n'est pas développée par certains enseignants.

Parmi les 26 enseignants (48%) qui ne proposent pas d'activité avec la calculatrice ou l'ordinateur, 8 enseignants ont fait des commentaires sur leur réponse:

- Pas en 2^{nde}, mais en TS (3 réponses) pour programmer la division euclidienne et l'algorithme d'Euclide et la décomposition en facteurs premiers et pour calculer le pgcd (2 réponses) et pour le cryptage (1 réponse).
- Il n'y a pas de nécessité à utiliser la calculatrice en 2^{nde} (2 réponses).
- Elle peut être utilisée pour vérifier (1 réponse).
- Il est intéressant d'utiliser la calculatrice pour tester la primalité d'un nombre (1 réponse).
- La salle informatique et les programmes utilisés ne permettent pas d'utiliser un outil informatique (1 réponse).

Ces commentaires mettent en évidence certaines contraintes pour lesquelles la niche algorithmique vit difficilement en seconde.

Pour les enseignants qui utilisent la calculatrice ou l'outil informatique, nous les avons regroupés en trois catégories :

- 11 enseignants n'ont pas clairement explicité leur réponse positive, mais ont cité les notions avec lesquelles la calculatrice est utilisée, nous les regroupons avec ceux qui ont répondu oui, car le sens de leur réponse oriente vers le cas positif ; en voici deux exemples :

> ***P45*** *: Uniquement divisibilité, décomposition en facteurs premiers.*
>
> ***P25*** *: La calculatrice pour les décompositions et la recherche de primalité d'un nombre.*

- 5 Enseignants ont signalé que l'utilisation de la calculatrice et de l'outil informatique pour la partie l'arithmétique est faible ou assez faible dans leur pratique en utilisant des indicateurs : Parfois (2 réponses), Un peu (2 réponses), Rarement (1 réponse).

Ainsi, pour ces enseignants, le travail en arithmétique avec l'outil informatique est marginal.

- 8 enseignants ont explicitement déclaré qu'ils font travailler leurs élèves à la calculatrice avec laquelle ils mobilisent les notions d'arithmétique.

Ainsi, conformément à ce que nous avons vu dans les manuels, l'utilisation de l'outil informatique pour l'arithmétique n'est pas un élément central chez la plupart des enseignants.

Pour la deuxième partie de cette question, parmi les 24 enseignants ayant déclaré qu'ils utilisent l'outil informatique, 20 enseignants ont précisé les notions d'arithmétique qu'ils mobilisent dans des activités basées sur la calculatrice et l'ordinateur en 2^{nde}.

Nous avons classé ces notions suivant la fréquence de leur apparition :

- Division euclidienne (q, r) (4 fois).

- Algorithme d'Euclide (3 fois).
- Primalité d'un nombre (3 fois).
- Division euclidienne, Pgcd (3 fois).
- Division euclidienne, primalité, simplification d'une fraction, racine (1 fois).
- Division euclidienne (q, r), pgcd, décomposition en facteurs premiers (1 fois).
- Divisibilité, décomposition en facteurs premiers (1 fois). .
- Pgcd et ppcm (1 fois).
- Diviseur, Pgcd, ppcm, primalité (1 fois).
- Primalité et la décomposition en facteurs premiers (1 fois).
- Calculer (1 fois).

Notons enfin qu'un enseignant a précisé un logiciel qu'il utilise comme un moyen informatique : Excel pour l'algorithme d'Euclide. 3 enseignants ont signalé que le tableur est un outil pour programmer les notions d'arithmétique, mais cela en classe de troisième avec l'algorithme d'Euclide (1 réponse), et en classe de terminale S pour le raisonnement (1 réponse), et pour la fonction MODULO (utiliser les restes) (1 réponse).

Le diagramme ci-dessous nous montre la répartition des notions d'arithmétique qui sont travaillées avec la calculatrice ou l'outil informatique avec les notions d'arithmétique.

Nous soulignons que nous avons regroupé l'aspect algorithmique avec la notion de pgcd dans le diagramme, nous avons aussi mis l'utilisation de la calculatrice pour simplifier des fractions, le calcul, et racine carrée sous la liste Autre dans le diagramme :

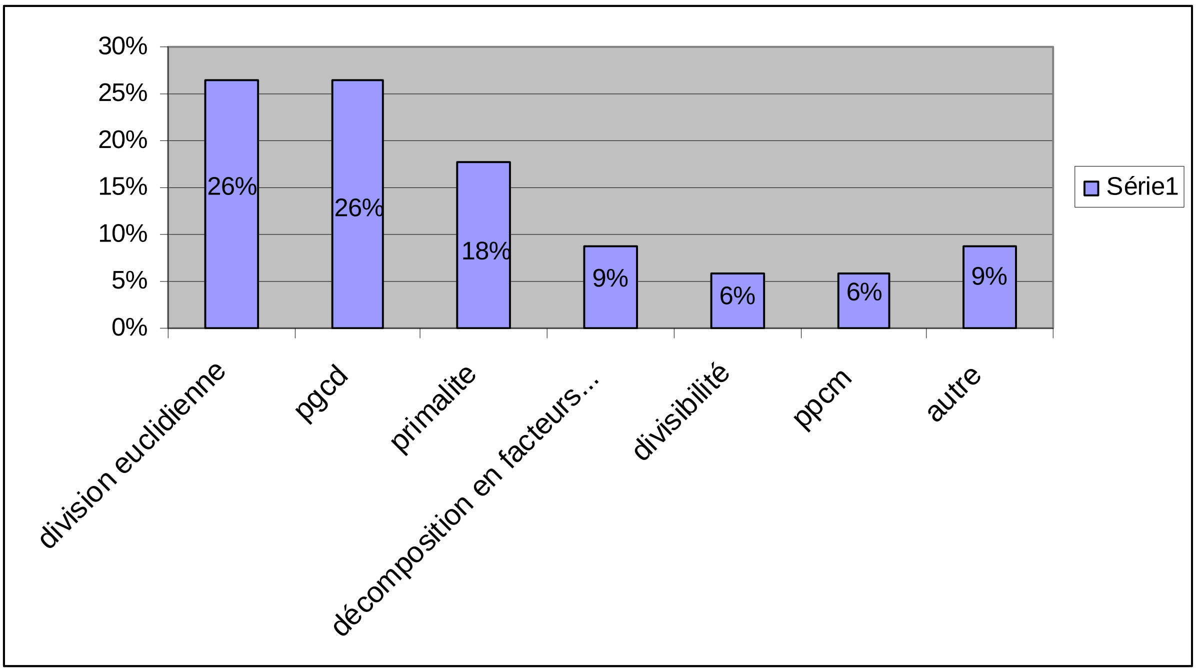


Figure 7 : répartition des notions parmi celles travaillées avec la calculatrice ou l'ordinateur.

Ce tableau nous montre que l'utilisation de la calculatrice n'est pas uniquement axée sur l'algorithme d'Euclide et le calcul de pgcd. La répartition équitable entre le PGCD (26%) et la division euclidienne (25%) peut être expliquée par le fait que la division euclidienne est un outil pour le calcul et pour simplifier des fractions, et qu'elle est considérée comme un outil pour déterminer la primalité des entiers et décomposer les nombres.

Les nombres premiers ne représentent que 18%. Ceci est justifié par le fait que les manuels ne proposent pas l'outil informatique avec les nombres premiers sauf Déclic. Cependant, les enseignants ayant utilisé ce dernier manuel, n'ont pas exploité la démarche algorithmique proposée dans leur manuel avec la calculatrice pour reconnaître les nombres premiers. Quant à la décomposition en facteurs premiers, elle ne représente que 9% des notions travaillées. Ceci montre que la mise en place d'une démarche algorithmique avec la calculatrice pour les notions de l'arithmétique en Seconde n'est pas viable chez la plupart des enseignants.

Très peu d'enseignants (6%) font travailler à leurs élèves la notion de ppcm et la relation de divisibilité avec la calculatrice/l'outil informatique.

Ce qui ressort de l'analyse de cette question est que l'intégration de l'outil informatique avec l'arithmétique reste peu présente dans la pratique des enseignants. Ceci ne permet pas vraiment de faire vivre la niche algorithmique, alors que, comme nous l'avons vu, un des objectifs de la réintroduction de l'arithmétique dans les programmes de seconde en 2000 était de faire vivre la niche algorithmique, et d'exploiter la démarche algorithmique avec l'outil informatique.

Nous pouvons faire l'hypothèse que cet état de fait est une des raisons de la disparation de l'arithmétique des programmes de 2009.

II. 2 Deuxième partie

Question 1 :

Nous envisageons de proposer l'exercice suivant à des élèves de seconde :

Soit $M = 3^2 \times 5^2 \times 7$

d) *M est-il divisible par : 7, 9, 2, 11,63 ? Justifiez votre réponse.*

e) $B = 3^2 \times 5^3 \times 7$*, B est- il diviseur de M. et pourquoi ?*

f) $F = 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$*, est- il multiple de M. et pourquoi ?*

Selon vous, quelle(s) solution(s) pourraient-ils mettre en œuvre et quelle correction leur proposeriez-vous ?

Est-ce qu'en seconde, vous proposez ce type d'exercices ? Si oui avec quel(s) objectif(s) ?

Un enseignant n'a pas répondu à la totalité de cette question. Les 53 enseignants restants ont répondu à la première et/ou à la deuxième partie. Nous allons dans ce qui suit détailler les réponses obtenues pour chaque partie.

Parmi les 53 enseignants ayant répondu à la première partie de cette question (*Selon vous, quelle(s) solution(s) pourraient-ils mettre en œuvre et quelle correction leur proposeriez-vous ?)* 2 enseignants se sont contentés de faire un commentaire :

> ***P11** : ils sont des exercices faciles d'application de résultats qui sont au programme de TS spé math.*
>
> ***P24** : Exercice peut conforme à l'actuel programme de seconde, à intégrer dans le cadre de simplification d'écriture d'un rationnel.*

Ces deux enseignants ont déclaré dans la deuxième partie de cette question qu'ils ne proposent pas cette question à leurs élèves de seconde.

Dans la première partie de la question, nous demandons aux enseignants les solutions qui peuvent être mises en œuvre par leurs élèves et les corrections qu'ils leur donneraient pour les items a, b et c. Seuls 11 enseignants ont indiqué explicitement ce qu'ils attendraient de leurs élèves. Pour les 40 enseignants restants, il est très difficile de savoir si l'enseignant donne sa propre réponse ou celle pour les élèves car il n'y a aucune indication qui permette de connaître la position des enseignants ou des élèves dans cette question. Nous allons considérer que la réponse proposée sans correction est la réponse propre des enseignants en faisant l'hypothèse suivante : les enseignants ont répondu à la question sans qu'ils se soient rendus compte du fait que cette question a été proposée dans le questionnaire des élèves.

Avant de présenter la réponse des enseignants à cette question, nous rappelons que nous avons distingué dans l'analyse a priori les deux méthodes M1, M2 :

- **M1** : utiliser la décomposition en facteurs premiers.

- **M2** : il s'agit de calculer la valeur de M et d'effectuer la division euclidienne ou d'utiliser les critères de divisibilité.

Nous avons distingué dans l'analyse *a priori* pour (b) et (c) trois techniques pour M1 :

- **M1.1** : justifier la réponse en s'appuyant sur la puissance.
- **M1.2** : utiliser la définition de diviseur ou multiple → B = M × 5 ; F = M × *33*
- **M1.3 :** simplifier les fractions : $\frac{M}{B}$ ***et*** $\frac{F}{M}$

1. Enseignants ayant donné la réponse prévue de leurs élèves, avec leur correction. (11enseignants)

Le tableau suivant nous présente l'ensemble des données des réponses des 11 enseignants qui ont prévu la réponse de leurs élèves pour les trois items a, b, c, en sachant que les enseignants ont donné la même méthode pour les trois items.

	M1	M2	M1 + M2	Total
Effectif	1	5	5	11

Tableau 14 : méthodes prévues par les onze enseignants pour le premier exercice

Comme nous l'avons prévu dans l'analyse *a priori*, la majorité des enseignants ont indiqué que leurs élèves mettraient en œuvre M2 (10 fois), évitant ainsi l'utilisation de la décomposition en facteurs premiers.

Trois enseignants nous indiquent que la mise en place de la divisibilité ne peut être faite que par un certain nombre des élèves.

> ***P21*** *: Les bons élèves utiliseront la décomposition de M pour répondre aux questions mais ceux qui n'ont pas compris cela calculeront tous les nombres avec la calculatrice et feront des vérifications.*

Alors que 2 autres enseignants précisent que les élèves peuvent utiliser M1 pour les nombres figurant explicitement dans M comme le nombre 7, et ils rencontrent une difficulté pour les nombres qui n'apparaissent pas explicitement dans M tels les nombres 9 ou 36.

***P1** : erreur probable : Dire que 9, 63 ne figurent pas dans la décomposition de M*

Pour les deux items (b) et (c), 2 enseignants seulement ont considéré que les solutions M1-2, M1-3 pourraient être mises en oeuvre par les élèves. Tandis que M1-1 ne pourrait pas être utilisée par les élèves ; ceci peut être expliqué par le fait que les élèves ne connaissent pas ou ne savent pas appliquer la règle permettant de savoir si un nombre décomposé en facteurs premiers est un multiple ou diviseur d'un autre nombre décomposé aussi en facteurs premiers, car cette règle n'est proposée ni par leur enseignant, ni par le manuel. Ainsi, d'après les enseignants, ces élèves pensent soit à effectuer la division de deux nombres soit à la définition de diviseur ou multiple.

Comme correction à l'item (a), les enseignants mettent l'accent sur le sens de facteur et diviseur en proposant de mettre le diviseur à tester dans M pour montrer qu'il figure dans la décomposition de M :

M $=7\times(3^2\times5^2)$; M=$9\times(5^2\times7)$; M= $(7\times9)\times5^2 = 63\times5^2$. Les nombres 2, 11 sont des nombres premiers ne figurant pas dans M. Cette correction a été proposée par 5 enseignants, alors que 2 enseignants se sont contentés de signaler que la correction qu'ils leurs proposent est d'utiliser M1.

Pour les deux items (b) et (c), le choix des enseignants pour les corrections est différent :

- 2 enseignants se sont contentés de signaler qu'ils proposent M1.
- 2 enseignants ont proposé de donner une définition de diviseur.
- 1 enseignant a proposé un raisonnement par l'absurde pour (b).

P27 : *par l'absurde : si B divise M, comme 5^3 divise B, alors 5^3 divise M ce qui est contradictoire avec l'unicité de la décomposition en facteurs premiers de M.*

- 1 enseignant a proposé M1-1.

Ainsi, suivant les réponses des enseignants, l'étude de la relation de divisibilité avec la décomposition en facteurs premiers est difficile pour les élèves ; ils n'arrivent pas à mobiliser leur connaissance sur la divisibilité dans la nouvelle situation (la situation qui demande si un nombre décomposé en facteurs premiers est divisible par un autre nombre). Ceci peut être expliqué par plusieurs facteurs qui se renforcent : la décomposition en facteurs premier elle-même est difficile pour les élèves ; dans les activités proposées aux élèves son rôle est limité à simplifier les fractions ; la division euclidienne et la divisibilité ne sont pas encore maîtrisées par certains élèves :

***P1 :** Reconnaître que 3M=B et donc que M divise B et pas le contraire. Rappel de la définition mais problème du sens de la division encore mal installé chez trop d'élèves.*

Ceci est conforme à ce que nous avons trouvé dans la question 9.

Il semble que l'extension de la notion de divisibilité avec la décomposition en facteurs premiers soit compliquée pour les élèves. En se référant à Zazkis et Campbell (1996), le schéma de la divisibilité pour ces élèves n'est pas construit, car ce schéma nécessite de faire un lien entre la multiplication, les facteurs et la décomposition en facteurs premiers.

2. Enseignants ayant donné leur propre réponse (40 enseignants).

Concernant les 40 enseignants ayant donné leur propre réponse, nous synthétisons l'ensemble de leurs réponses aux trois items a, b et c dans le tableau suivant :

	M1	M2	M1 + M2	Autre	Non répondu	Total
Item a	26	2	5	4	3	40
Item b	28	2	4	4	2	40
Item c	28	2	4	4	2	40

Tableau 15 : méthodes proposées par les 40 enseignants ayant donné leur propre réponse

26 enseignants ont proposé seulement M1 pour répondre à l'item (a), nous les regroupons en 5 catégories :

- 13 enseignants ont donné une réponse complète en montrant explicitement que M est divisible par 7, 9 et 63 car ils apparaissent dans la décomposition de M, alors que 2 et 11 sont des nombres premiers qui n'apparaissent pas dans la décomposition de M.
- 8 enseignants ont donné une réponse partielle en montrant seulement que M est divisible par les nombres qui apparaissent ou que l'on peut faire apparaître dans la décomposition de M, pour 7 (3 réponse) ; pour 63 (2 réponses) ; pour 7 et 9 (2 réponses) ; pour 9 et 63 (1 réponses).
- 3 enseignants ont proposé d'écrire M comme produits de nombres à la puissance 1 pour former tous les diviseurs potentiels.
- 1 enseignant a proposé de mettre la liste de tous les diviseurs de M.
- 1 enseignant a signalé qu'un tel exercice fait appel à l'utilisation de la notion de divisibilité avec la décomposition en facteurs premiers.

Notons que « Autre » dans le tableau présente les enseignants qui se sont contentés de proposer la définition de multiple et diviseur comme une réponse à cette question.

Nous constatons que l'accent est mis dans la réponse de ces enseignants sur la distinction entre facteur, facteurs premiers et diviseurs.

Les 4 enseignants ayant donné M1 et M2 pour (b) et (c), ont justifié leur réponse en utilisant M1-1 (2 réponses) et M1-2 (2 réponses).

Le tableau suivant présente les enseignants ayant proposé uniquement M1 pour (b) et (c) :

M1	M1-1	M1-2	M1-3	Total
B	8	20	---	28
C	5	23	---	28

Tableau 16 : répartition des techniques pour les réponses de type M1 aux items b et c

Nous pouvons conclure que les enseignants mettent en place la divisibilité avec la décomposition en facteurs premiers, alors qu'ils ne s'attendent pas à ce que leurs élèves le fassent. Ceci peut être justifié du fait que la divisibilité n'est privilégiée avec la décomposition en facteurs premiers ni par les programmes ni par la plupart des manuels.

Notons que l'unicité de la décomposition en facteurs premiers n'est pas prise en compte explicitement par les enseignants pour justifier leur réponse à l'item (a) et que la détermination de la relation de divisibilité en s'appuyant sur la comparaison des facteurs et des puissances de deux nombres décomposés en facteurs premiers n'est pas mise en avant. Dans la deuxième partie de cette question, il s'agit de savoir si les enseignants font vivre cet exercice dans leur pratique en classe, et dans le cas affirmatif, quels sont leurs objectifs en proposant un tel exercice.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

Oui	Non	Non répondu	Total
37	15	2	54

Tableau 17 : présence d'exercice du type de l'exercice 1 dans les classes des enseignants

Nous remarquons que deux tiers des enseignants (37 réponses) font vivre ce type d'exercice dans leur classe. Alors qu'il est peu présent dans les manuels. L'objectif de proposer un exercice de ce type d'après ces enseignants est de :

- Faire fonctionner les notions de multiple et de diviseur à partir des nombres décomposés en facteurs premiers (10 réponses).

- Travailler sur la décomposition en facteurs premiers (9 réponses) et parmi celles-ci on trouve : travailler sur l'unicité de la décomposition en facteurs premiers (1 réponse) et comprendre son intérêt (2 réponses).

- Travailler sur les puissances (5 réponses) dont le travail sur les puissances et la décomposition en facteurs premiers et une réponse pour le travail sur les puissances avec les fractions.
- Revenir sur les notions de multiple et diviseur avec la décomposition en facteurs premiers (2 réponses).
- Simplifier des fractions (2 réponses).
- Dégager la notion de ppcm (1 réponse).
- Déterminer le pgcd et comprendre l'intérêt de la décomposition en facteurs premiers (1 réponse).
- Aborder la notion de carré parfait : *Par quoi multiplier A pour que A soit 1 carré parfait ? cube parfait ?* (1 réponse).
- Voir les spécialités de chaque nombre (1 réponse).
- Donner différentes méthodes (1 réponse).
- Essayer de voir leur réaction (1 réponse).

Alors que les contraintes qui empêchent certains enseignants de proposer cet exercice aux élèves sont les suivantes :

- Ce n'est pas réellement au programme. (1 réponse)
- Faute de temps. (1réponse)

Ainsi, contrairement au choix des programmes et des manuels, les enseignants choisissent de ne pas réserver exclusivement le rôle de la décomposition en facteurs premiers au travail sur les fractions ; ils cherchent à motiver son introduction et à la mettre en lien avec les autres notions d'arithmétique.

Question 2 :

Nous envisageons de proposer l'exercice suivant à des élèves de seconde.

Soit $A = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ *et* $C = 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$

Donner un multiple commun de deux nombres

Selon vous, quelle(s) solution(s) pourraient-ils mettre en œuvre et quelle correction leur proposeriez-vous ?

Est-ce qu'en seconde, vous proposez ce type d'exercices ? Si oui avec quel(s) objectif(s) ?

Deux enseignants n'ont pas répondu à la totalité de cette question.

En ce qui concerne la première partie de cette question, nous avons demandé aux enseignants les solutions qui peuvent être mises en œuvre par les élèves, et ensuite leurs corrections à ces solutions. 2 enseignants n'ont pas répondu à cette question et 2 autres ont seulement indiqué que cette notion n'est pas au programme ; cela n'empêche pas pour l'un de ces deux enseignants de proposer de trouver un multiple commun à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

Par ailleurs, deux autres enseignants ont fait des commentaires sans proposer les solutions attendues et le corrigé ; l'un des deux a précisé que l'objectif en proposant cet exercice est de travailler sur les fractions :

- ***P 13****: Un peu possible à ce que j'ai écris en 1. Leur explique le but : pour moi la recherche du dénominateur commun de 2 fractions d'entiers donc décomposer en facteurs premier chaque dénominateur.*

18 sur 46 des enseignants ont donné explicitement les solutions que pourraient mettre en œuvre leurs élèves. Nous allons procéder, de la même manière dans la question précédente (1), avec les réponses que nous n'avons pas pu préciser la position des enseignants ou celle de leurs élèves dans cette question en supposant que les enseignants ont répondu à la question sans qu'ils se soient rendus compte que cette question a été proposée dans le questionnaire des élèves.

1. Enseignants ayant donné la réponse de leurs élèves (18 réponses).

Nous synthétisons dans le tableau ci-dessous, la réponse de 18 enseignants ayant prévu la réponse de leurs élèves à cette question, en rappelant que nous avons distingué deux solutions dans l'analyse a priori :

- S1 : trouver le produit A C (en utilisant la décomposition en facteurs premiers ou la calculatrice).

- S2 : trouver le ppcm (en utilisant la décomposition en facteurs premiers ou la calculatrice).

	S1	S2	S1+ S2	Autre	T
Effectif	12	1	2	3	18

Tableau 18 : Méthodes prévues par les 18 enseignants pour le deuxième exercice

Nous signalons qu'un enseignant a indiqué que les élèves vont utiliser la calculatrice sans qu'il précise s'ils utiliseront S1 et/ou S2. Nous supposons que les élèves utilisent S1 car il leur propose d'utiliser S2 comme une correction à cet exercice.

Douze enseignants disent qu'ils ne s'attendent pas à ce que leurs élèves cherchent le ppcm contre 3 enseignants qui le prévoient. Ceci peut être expliqué, d'une part, parce que la question demande de trouver un multiple commun, sans préciser s'il s'agit ou non du PPCM, et d'autre part par ce que la recherche de ppcm est difficile pour les élèves à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

Notons que 3 enseignants pensent que leurs élèves vont chercher le pgcd. Voici l'extrait de leur réponse :

> ***P 24:*** *J'ai aussi posé cet exercice et beaucoup ont confondu avec diviseur commun et ont donc donné comme réponse le pgcd. Après avoir repris l'exercice 1) c) , ils ont trouvé la bonne réponse. J'avais plutôt posé la recherche du pgcd. Pour le ppcm, je pars d'un exercice de réduction de fraction au même dénominateur et je ne m'appesantis pas plus car c'est une notion peu utile.*
>
> ***P28 :*** *Sans explications, les élèves calculent les deux nombres et appliquent un des algorithmes vus en 3e. Après explications, on cherche « la plus grande partie commune dans les décompositions ».*
>
> ***P31 :*** *Oralement : on cherche les nombres premiers diviseurs communs avec leur puissance et on garde la plus petite afin de décomposer en deux 'morceaux' : le pgcd et un nombre entier*
>
> *$A = 3 \times 5^2 \times 7 \quad \times \quad 2^2$ et $C = 3^2 \times 5^2 \times 7 \quad \times \quad 11$; 4 et 11 sont des nombres entiers premiers entre eux donc le pgcd est $3^2\ 5^2\ 7 = 1575$*
>
> *Ils auront tendance prendre la calculatrice, calculer A et C puis appliquer l'algorithme d'Euclide ...*

La réponse de l'enseignant P24, laisse entendre que les élèves font une confusion entre le pgcd et le ppcm. Pour les deux enseignants P28, P31, nous supposons qu'ils ont spontanément pensé au pgcd sans qu'ils ne soient rendus compte du fait que l'exercice porte sur la recherche de multiple commun. Ainsi, Nous pouvons faire l'hypothèse suivante : certains enseignants associent exclusivement la décomposition en facteurs premier à la recherche de pgcd parce le travail sur le ppcm à l'aide de la décomposition en facteurs premier est hors programme, et dans leur pratique ils font travailler leurs élèves sur la décomposition en facteurs premier avec le pgcd beaucoup plus que le ppcm.

Quant à la correction proposée par les enseignants ayant pensé que leur élèves proposeraient S1 et/ou S2, 9 enseignants ont proposé S2 ; 4 autres enseignants se sont contentés de signaler que leurs élèves ont donné une réponse correcte lorsqu'ils ont utilisé S1 et deux autres enseignants n'ont pas donné de corrigé pour les élèves qui auraient utilisé S1 (1 réponse) et S2 (1 réponse).

2. Enseignants ayant donné leur propre réponse (28 réponses).

Nous synthétisons leurs réponses dans le tableau ci-dessous :

	S1	S2	S1+ S2	Autre	T
Effectif	7	11	5	4	28

Tableau 19 : méthodes proposées par les 28 enseignants ayant donné leur propre réponse (exercice 2)

Nous trouvons que 7 enseignants ne proposent pas la recherche de ppcm, la moitié de ces enseignants ont indiqué qu'ils ne proposent pas le PPCM en classe.

Onze enseignants proposent S2 même si certains enseignants ne le proposent pas dans leur cours d'arithmétique.

Nous groupons les quatre enseignants ayant donné une autre solution que S1 ou S2 dans trois catégories :

- Enseignants qui ont proposé de trouver les diviseurs communs (1 réponse) et le pgcd (1réponse).
- Enseignants qui se sont contentés de signaler qu'ils utilisent la décomposition en facteurs premiers (1réponse).
- Enseignants qui ont indiqué qu'ils proposent une définition de multiple commun pour cet exercice (1 réponse).

Nous donnons ci-dessous les réponses des deux enseignants ayant proposé un ou plusieurs diviseurs communs au lieu de multiple commun.

P17 *: $A= (3 \times 5^2 \times 7) \times (2^2)$; $C= (3 \times 5^2 \times 7) \times (3^2 \times 5^2 \times 11)$*

$(3 \times 5^2 \times 7)$ est un multiple de A et C.

P5 *: Il serait intéressant de décomposer A et C comme suit :*

$A = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$

$B = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11$

Donc les multiples communs de A et C sont 3, 5, 6, 7, 15, 21, 25, 35, 105, 175, 525.

Ces deux enseignants semblent faire une confusion entre les deux notions de multiple ou diviseur, ceci bien qu'ils aient indiqué dans la deuxième partie de cette question qu'ils proposent de tel exercice à leurs élèves. En lisant leur expérience dans l'enseignement, nous trouvons que P17 est en activée depuis 9 ans et que P5 a 4 ans d'expérience. Il est difficile d'aller plus loin dans l'interprétation au vu de ces seules données.

Nous synthétisons dans le tableau ci-dessous l'ensemble des données pour les 46 enseignants ayant répondu à cette question.

Notons que la ligne correspondante à P-*élèves* présente la réponse des enseignants ayant donné la réponse que leurs élèves pourraient donner, et celle correspondante à P-*propre* présente la réponse des enseignants ayant donné leur propre réponse.

	S1	S2	S1+ S2	Autre	NR	Total
P-*élèves*	4	9	---	3	6	18
P-*propre*	7	11	5	4	----	29
T	11	20	5	7	6	46

Tableau 20 : *méthodes proposées par les 46 enseignants ayant répondu à la question 2 (exercice 2)*

Nous observons qu'un nombre significatif d'enseignants propose le ppcm bien que la question ne porte que sur un multiple commun.

Dans la deuxième partie de cette question, nous avons voulu savoir si les enseignants de seconde proposent cet exercice à leurs élèves et si oui, avec quel objectif ils le proposent.

Nous donnons un tableau regroupant les types de réponses avant de détailler ces réponses :

Réponse	Fréquence
Oui	34
Non	16
Non répondu	4
Total	54

Tableau 21 : présence d'exercice du type de l'exercice 2 dans les classes des enseignants

Huit enseignants sur 16 ont commenté leur réponse dans le cas négatif en présentant les raisons suivantes :

- Hors programme (4 réponses).
- Faute de temps (1 réponse).
- Il est intéressant de le proposer pour réduire aux mêmes dénominateurs (2 réponses).
- Il est intéressant de le proposer pour la recherche de multiples, mais un tel exercice fait appel au ppcm (1 réponse).

Parmi les 34 enseignants ayant indiqué qu'ils proposent ce type d'exercice, 27 enseignants ont avancé l'objectif de proposer un tel exercice dans leur pratique de l'arithmétique :

- Réduire au même dénominateur (7 réponses).
- Travailler sur la décomposition en facteurs premiers (6 réponses).
- Travailler sur les puissances (4 réponse).
- Décomposer des nombres en écriture fractionnaire (4 réponses).
- Travailler sur la notion de ppcm (2 réponses).
- Faire réfléchir les élèves (2 réponses).
- Avoir différentes méthodes (1 réponse).
- Dans les problèmes pratiques (1 réponse).

Compte tenu de ce que la notion de PPCM est hors programme, on aurait pu s'attendre à ce que les exercices du type de l'exercice 2 ne soient en général pas proposés par les enseignants. On voit que dans la population qui a répondu à notre questionnaire, près des deux tiers des enseignants disent le proposer, avec des motivations proches de celles proposées pour l'exercice 1. Il semble, au vu des réponses aux deux questions, que contrairement à ce que nous avons trouvé dans les programmes et les manuels, certains enseignants cherchent à mettre en lien la décomposition en facteurs premiers avec les autres notions d'arithmétique. Rappelons néanmoins que notre population est composée majoritairement d'enseignants proche des IREM ou de l'APMEP, et n'est donc pas représentative de la profession en générale.

II. 3 Troisième partie

Nous rappelons que les enseignants ayant répondu à cette partie sont des enseignants ayant rempli le questionnaire dans le cadre des journées organisées par l'APMEP en octobre 2009, des enseignants Pn ayant envoyé leur réponse par courriel, et très peu des enseignants P-E ayant rempli cette partie dans leur établissement.

Dans cette partie, nous avons demandé aux enseignants leur point de vue sur la disparition de l'arithmétique des programmes de seconde et sur l'effet de cette disparition sur leur pratique.

Question 1 : *L'arithmétique disparaît des programmes de seconde à la rentrée de l'année scolaire 2009 : qu'est ce que vous pensez de ce changement (les raisons et/ou les conséquences et/ou tout autre commentaire) ?*

Nous avons obtenu 27 réponses à cette question : 20 réponses des enseignants d'APMEP, 5 réponses des enseignants Pn ayant renvoyé leur réponse par courriel et 2 réponses des enseignants ayant accepté de proposer le questionnaire-élèves à leurs élèves (P-E).

En ce qui concerne la position des enseignants par rapport à la disparation de l'arithmétique en seconde, nous avons relevé 4 catégories : ceux qui sont explicitement en accord avec ce changement, ceux qui sont explicitement contre la disparition de l'arithmétique du programme de seconde, ceux qui sont partagés, et des enseignants qui ont avancé des raisons et des conséquences sans donner explicitement leur position par rapport au changement des programmes. Pour cette dernière catégorie, nous avons considéré la réponse des enseignants ayant pointé l'effet négatif de la disparition de l'arithmétique en termes de perte des notions, des niches, ou comme provoquant des problèmes, comme implicitement une réponse contre ce changement, tandis que une réponse des enseignants ayant expliqué que l'arithmétique avait peu d'importance dans les programmes, est implicitement une réponse pour la disparition. Nous considérons comme une réponse explicite contre la disparition de l'arithmétique, celle qui utilise des expressions comme : « je regrette », « ça me semble être une erreur », « c'est surprenant », « c'est dommage » …, tandis que des expressions telles que « Bien, je ne pense pas que cela soit préjudiciable,.. » sont considérées comme manifestant un accord explicite avec cette disparition.

Notons enfin que nous n'avons pas su catégoriser la réponse de trois enseignants ayant indiqué que l'introduction de l'algorithmique est une raison de la disparition de l'arithmétique.

P44 : *Question de mode + introduction Algorithme.*

Ainsi, les catégories de réponses retenues sont :

- Réponse explicite pour la disparition :

P37 : *Bien ! car un travail limité à 2 ou 4h sur l'année, n'est pas pertinent.*

- Réponse implicite pour la disparition :

P7 *: Le problème de la classe de seconde est que nous nous adressons à des élèves de niveaux très différents. La plupart des élèves ne comprennent pas la différence entre un nombre non décimal et un irrationnel. L'arithmétique de seconde était souvent conçue comme un paragraphe dans le chapitre sur les ensembles de nombres. La notion de nombre premier y était abordée mais n'était pas vraiment réutilisée par la suite.*

- Réponse explicite contre la disparition :

P34 *: Je le regrette car les nb premiers intéressent et intriguent les élèves ; la démonstration qu'il y en a une infinité, leur utilisation en cryptographie.*

- Réponse implicite contre la disparition :

P38 *: Les élèves n'ont plus de moyen de simplifier rapidement et au maximum des fractions. A l'heure d'Internet où l'a sait l'importance des nombres premiers, on se demande ce que fait l'institution*

- Réponse partagée :

P46 *: C'est dommage … parce que c'est un « joli » sujet, des types de raisonnements dont les élèves n'ont pas l'habitude. D'un autre coté, ce n'est pas indispensable, et comme on manque toujours de temps pour traiter le programme, cet allégement est le bienvenu.*

Le tableau ci-dessous présente l'ensemble des données des réponses de 27 enseignants à la première partie de cette question concernant la disparition de l'arithmétique :

Réponse	Pour	Contre	Partagé	Autre	Total
Explicite	5	7	1	---	13
Implicite	4	7	---	3	14
Total	9	14	1	3	27

Tableau 22 : Position des 27 enseignants par rapport à la disparition de l'arithmétique

Nous pouvons constater que le nombre des enseignants contre la disparition de l'arithmétique est plus élevé que celui des enseignants pour cette disparition ; ceci montre que l'enseignement de l'arithmétique en classe de seconde est apprécié par la majorité des enseignants ayant répondu à cette question.

Les raisons avancées par les 9 enseignants étant pour ce changement explicitement ou implicitement sont les suivantes (chaque enseignant a indiqué au moins une raison) :

- notions très peu nombreuses (3 fois).
- notions qui ne sont pas réinvesties par la suite (3 fois).
- Elle est utilisée principalement pour les fractions irréductibles (2 fois).
- faute de temps (1 fois).
- La place qu'elle occupe est limitée (1fois).
- L'arithmétique se trouve dans le chapitre « Ensemble des nombres » dans lequel les élèves font une confusion entre les nombres non décimaux et irrationnels (1 fois).
- La décomposition en facteurs premiers est la seule qui disparait, mais elle est déjà vue, et le calcul de pgcd et ppcm peut être fait sans passer par la décomposition en facteurs premiers (1 fois).
- L'objectif pour lequel l'arithmétique a été réintroduite n'est pas tenu (1fois).
- Les applications sauf l'aspect algorithmique sont peu intéressantes (1 fois).

Les 14 enseignants étant contre la disparition de l'arithmétique ont pointé l'impact de la disparition de l'arithmétique dans le processus d'enseignement, sur l'habitat, la niche et les notions d'arithmétique d'une part, sur leurs élèves et sur leur pratique en seconde et en TS d'autre part :

- Difficulté concernant la familiarité des élèves avec les entiers surtout pour décomposer les nombres (1fois).
- Les élèves ne peuvent pas savoir la différence entre le travail sur les entiers et les réels (1fois).
- Manque des notions (nombres premiers) (4 fois).
- C'était l'occasion de travailler sur les différents types de raisonnement (4 fois).
- Introduire l'algorithme et faire disparaitre l'arithmétique au même temps parait paradoxal car l'arithmétique permet de travailler sur l'algorithme (2 fois).
- Il est utile pour les fractions irréductibles (2 fois).
- Il sera dur d'enseigner l'arithmétique en TS.
- C'est une base pour enseigner l'arithmétique en TS (1 fois).
- Il était assez facile à traiter avec les élèves en seconde (2 fois).
- Il est gênant de ne plus les enseigner (1 fois).

Les raisons/conséquences avancées par la réponse partagée sont :

- D'une part : l'arithmétique n'est pas indispensable, et il n'y a pas assez de temps pour traiter le programme.
- D'autre part, c'est un joli sujet et il permet de travailler sur le raisonnement.

Quant aux réponses Autres que nous n'avons pas classées avec les catégories précédentes, nous présentons les raisons et les conséquences avancées par les enseignants :

- pour introduire l'algorithme (3 fois).
- Faute de temps (1 fois).

Nous résumons les raisons avancées par les 27 enseignants sur la disparition de l'arithmétique du programme suivant l'impact de cette disparition sur l'habitat, la niche et les notions de l'arithmétique.

Son habitat est limité : on ne trouve l'arithmétique qu'au chapitre « Ensembles de nombres ».

En ce qui concerne sa niche, les applications de l'arithmétique sur les fractions sont peu intéressantes ; elle est essentiellement utilisée pour les fractions irréductibles :

P53 : *Vue la place qu'elle occupait avant, ça ne va pas changer grand-chose. La principale utilisation était de rendre des fractions irréductibles.*

L'arithmétique a disparu pour introduire l'algorithme :

P39 *: « Raisons : on ne peut pas tout faire avec le même horaire en introduisant en plus d'algorithmes, … »*

Et l'objectif pour lequel elle est déjà réintroduite n'est pas réalisé :

P54 : *L'arithmétique a été introduite en seconde en 2000. On y consacrait très peu de temps et les applications en cryptologie notamment (ce qui était l'objectif de cette introduction) ne se sont pas faites (trop difficile ? Pas assez de temps ?)*

Par ailleurs les applications pratiques étaient peu intéressantes.

Dans leurs réponses, P53 et P29 n'identifient pas la niche algorithmique de l'arithmétique tandis que P54 souligne qu'elle n'était pas viable.

Au sujet des notions de l'arithmétique, les enseignants trouvent que l'arithmétique a disparu des programmes car ses notions sont peu nombreuses et pas réutilisées ; ils notent également que seuls les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers ont disparu.

Notons enfin que certains enseignants mentionnent le temps comme une des raisons de la disparition de l'arithmétique en seconde.

Pour les conséquences de la disparition de l'arithmétique, avancées par les 27 enseignants, sur les trois pôles, habitat, niche, notions, nous les synthétisons dans le tableau ci-dessous :

Conséquences sur Habitat, niche, notion	Conséquences
Concepts des nombres	Difficultés avec les nombres entiers.
Notions	Manque des notions.
	Difficultés avec d'autres thèmes.
	Enseigner le pgcd et le ppcm sans passer à la décomposition en facteurs premiers.
	Difficulté pour enseigner l'arithmétique en TS.
Habitat	Travail sera adressé seulement aux élèves de TS.
Niche: « calcul numérique »	Difficulté dans le travail sur les fractions.
Niche : « raisonnement mathématique»	Disparition des raisonnements mathématiques de l'arithmétique.
Niche : « algorithmique »	Intégrer l'algorithme sans l'arithmétique.

Tableau 23 : conséquences de la disparition de l'arithmétique en seconde selon les enseignants

Nous remarquons que certains enseignants signalent la disparition de la niche raisonnement de l'arithmétique et apprécient sa niche algorithmique ; comme l'arithmétique est rentrée en seconde en faveur de l'aspect algorithmique, et que c'est cet aspect qui a pris la place de l'arithmétique dans le nouveau programme, ceci leur semble paradoxal :

> P27 : [….] *le chapitre d'arithmétique de l'ancien programme était assez facile à traiter avec les élèves. De plus, il donnait l'occasion de traiter des algorithmes simples : primalité d'un nombre, algorithme d'Euclide… Or le nouveau programme intègre une partie algorithmique. Donc la disparition de l'arithmétique parait paradoxale.*

Et la niche calcul numérique semble essentielle pour certains enseignants qui indiquent que la disparition de l'arithmétique, en particulier la décomposition en facteurs premiers, enlève un outil utile pour le travail avec les fractions.

> ***P52 :*** *« C'est dommage car utile pour simplifier des fractions (décomposition de grands nombres). »*

D'après certains enseignants l'arithmétique sera réduite en Terminale S, ce qui évoque une difficulté pour les enseignants qui s'appuyaient sur les connaissances des élèves en seconde pour les enseigner en Terminale, une difficulté aussi pour les élèves de TS.

Question 2 : *Pensez-vous que la disparition de l'arithmétique, spécifiquement des contenus nombre premier et décomposition en facteurs premiers, implique une perte en termes d'organisation des apprentissages mathématiques pour la classe de seconde? Si oui, pouvez-vous donner des exemples.*

Comme le tableau ci-dessous nous le montre, 8 enseignants sur 27 ayant répondu à cette question trouvent que la disparition de l'arithmétique de seconde implique une perte en termes d'organisation des apprentissages mathématiques. Treize autres disent que ce n'est pas une perte. Tandis que 6 enseignants n'ont pas précisé leur position sur cette question ; nous les avons classés dans « Ne se prononce pas ». Notons que nous avons classé avec les enseignants considérant qu'il y a une perte, ceux qui ont donné des éléments de réponses sur l'effet de la disparition de l'arithmétique sur l'organisation mathématique sans se prononcer explicitement.

Oui	Non	Ne se prononce pas	Total
8	13	6	27

Parmi les 13 enseignants ayant indiqué qu'il n'y aucune perte avec la disparition de l'arithmétique, 6 enseignants ont commenté leur réponse, et nous avons les regroupés en deux catégories :

- Quatre enseignants ont avancé des raisons pour justifier leur réponse qu'il n'y a pas une perte avec cette disparition

- La suppression de la décomposition en facteurs premiers ne change rien car peu de temps est y consacré, et son application avec les radicaux est vue en classe de troisième, et pour le calcul du pgcd, on utilise l'algorithme d'Euclide, elle n'est pas passionnante (1fois).
- C'est un chapitre indépendant du reste (1 fois).
- On peut faire du calcul mental sur les entiers dans l'algorithmique (1 fois).
- Cette partie est retenue en TS (1 fois).

- Deux enseignants ont dit qu'il n y a pas une perte sur l'organisation des apprentissages, mais ils ont quand même évoqué la perte de certains aspects (2 réponses) :

- ***P38*** *: Non, c'est juste la perte de contenus simples (programme de 5° au débat des années 80) et ludiques. (Il n'est que de voir l'importance de l'arithmétique du championnat des jeux mathématiques et logiques).*

P53 *: Non, […..] Il est vrai que dans une classe « normale » ce doit être intéressant d'approfondir ces notions… et je pense que les élèves aiment bien cette partie du programme (en 3°, les élèves accrochent bien car ce sont des « recettes » à appliquer !)*

Les 6 enseignants qui n'ont pas précisé leur position dans cette question, ont avancé des commentaires sur l'intérêt de l'arithmétique pour les nombres (4 réponses), pour le travail sur les fractions (1 réponse) et sur l'aspect algorithmique (1réponse).

P26 *: Sans pouvoir l'affirmer à 100 %, il me semble que les élèves qui ont grandi avec une calculatrice sont moins familiers avec les nombres, et notamment avec les nombres entiers, que leurs lointains ainés qui avaient pratiqué beaucoup de calcul mental et posé Du coup, j'observe des erreurs qui me surprennent souvent : produit de deux nombres pairs qui donnerait un résultat impair, puissance de 2 qui serait multiple de 3, ce genre de choses. Peut-être qu'une pratique régulière de l'arithmétique (un chapitre dans chaque classe de la 6ème à la 2de ou même à la TS) permettrait de pallier ce problème.*

P27 *: Pour ce qui est de la suppression de l'arithmétique, je n'ai pas grand chose à dire. L'utilisation systématique des nombres premiers pour simplifier des fractions ou des racines me semble artificielle. L'existence de diviseurs premiers et la décomposition en*

> *produit de facteurs premiers viendront assez tôt en TS ou 1L Spé maths. Par contre, comme il est question d'algorithmique, je traiterai ces deux derniers thèmes mais uniquement sur le plan algorithmique.*

Les 8 enseignants ayant souligné qu'il y une certaine perte avec la disparition de l'arithmétique du programme de seconde ont montré que la perte est liée ont indiqué les points suivants :

- familiarité des entiers (3 fois).
- habilité pour le calcul mental (3 fois)
- occasion de travailler avec d'autres sujets tels que : puissance, radicaux, proportion, ordre de grandeurs (3 fois).
- travail sur les fractions (4 fois)
- raisonnements mathématiques (2 fois)
- connaitre les applications d'arithmétique : des codages, des clés (2 fois)
- notions d'arithmétique (1 fois)

Ce qui se dégage des réponses des enseignants, c'est que ce sont les niches « calcul numérique » et « raisonnement » qui seront le plus touchées par cette disparition ; Il en ressort par contraste que la niche algorithmique n'est pas affectée, ce qui va dans le sens des résultats précédents, à savoir que bien que l'une des motivations de la réintroduction de l'arithmétique en seconde en 2000 ait été le développement de l'algorithmique, cet objectif n'a pas été tenu.

Conclusion sur l'analyse de rapport personnel des enseignants

Dans ce chapitre, nous avons tenté de cerner le rapport effectif des enseignants aux notions d'arithmétique en classe de Seconde. Le premier résultat montre qu'il y a une distance non négligeable entre le savoir savant et ce que nous pouvons cerner du savoir enseigné à partir des réponses des enseignants.

Les enseignants n'explicitent pas les relations et les propriétés des entiers. Surtout lorsqu'ils définissent l'arithmétique et le PGCD. La plupart des enseignants explicitent la définition du PGCD en termes de propriété en donnant une définition de type abréviation. Conformément à ce que nous avons trouvé dans les manuels, la propriété du PGCD liée à l'ordre divisibilité est absente chez la plupart des enseignants, qui ne retiennent que la propriété liée à l'ordre naturel.

Comme nous l'avons vu, certains enseignants associent la décomposition en facteurs premiers exclusivement au PGCD ; nous faisons l'hypothèse que ceci pourrait expliquer la réponse de certains enseignants qui propose le PGCD comme réponse à la question de la recherche d'un multiple commun.

En outre, la recherche de multiple commun pour d'autres enseignants signifie la recherche de du plus petit multiple commun, ce qui correspond au choix fait dans les manuels.

D'autre part, il y a une différence significative entre le choix des enseignants et le choix des manuels relative aux exercices et les techniques. Ainsi les enseignants font vivre des exercices peu présents dans les manuels ou même absents lorsqu'ils repèrent chez leurs élèves une difficulté à saisir certaines notions, et ils disposent des techniques pour résoudre des exercices qui ne sont pas forcément proposées dans le manuel utilisé dans leur établissement.

Concernant la question relative à la reprise des notions d'arithmétique en Seconde, elle occupe assez peu de place dans la pratique des enseignants. Compte tenu de ce que nous avons vu dans les programmes et les manuels, on peut dire que la transition de l'enseignement de l'arithmétique entre le collège et le lycée n'est assez prise en compte par les programmes et les manuels et les enseignants jusqu'en 2009.

Concernant l'usage informatique avec l'arithmétique, la plupart des enseignants ne met pas en œuvre un travail d'intégration de l'outil informatique avec les notions d'arithmétique. En particulier, la mise en œuvre de la démarche algorithmique avec la calculatrice ou un logiciel n'est pas vivante dans la pratique des enseignants. Ceci contrairement à la volonté des concepteurs des programmes pour qui l'une des finalités de la réintroduction de l'arithmétique était de faire vivre la niche algorithmique, et d'exploiter la démarche algorithmique avec l'outil informatique.

CHAPITRE VII

Analyse des rapports personnels des élèves de la classe de seconde

Introduction

Nous nous sommes intéressée dans ce chapitre aux rapports personnels des élèves aux objets de l'arithmétique du point de vue de la théorie des nombres (relation de divisibilité ; concepts de division euclidienne, PGCD, PPCM, nombres premiers entre eux, nombre premier, la décomposition en facteurs premiers).

Nous avons fait le choix de décrire ce rapport pour les élèves de Seconde, car dans ce niveau les élèves complètent leurs connaissances de l'arithmétique par l'étude des nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers.

Nous tentons, à travers un questionnaire pour les élèves de seconde, d'identifier leurs connaissances en arithmétique en interrogeant leurs capacités à définir certaines notions de l'arithmétique et à résoudre différentes tâches pour lesquelles on dispose en général de plusieurs techniques pour les accomplir. L'enjeu de l'enquête est de mettre en évidence des résultats de l'enseignement effectif de l'arithmétique. Pour certaines questions, nous confronterons les résultats obtenus à ceux de l'enquête auprès des enseignants de seconde.

Ce chapitre comporte trois parties : la première présente l'analyse *a priori* du questionnaire ; la deuxième partie est consacrée à l'analyse *a posteriori* ; dans la troisième partie nous proposons une mise en perspective des réponses aux questionnaires professeurs et élèves.

I. Analyse a priori du questionnaire destiné aux élèves de la classe de Seconde.

Le questionnaire est constitué de 7 questions. La plupart des questions adressées aux élèves sont en commun avec le questionnaire des enseignants, afin de confronter les réponses des enseignants avec les réponses des élèves. Les première et la deuxième questions sont relatives à définir certaines notions de l'arithmétique. Dans les autres questions, on demande aux élèves de résoudre des exercices dans l'objectif d'identifier les différentes techniques utilisées par les élèves ; on souhaite plus particulièrement repérer si les élèves utilisent une démarche algorithmique pour accomplir certains exercices, et s'ils mettent en oeuvre leurs connaissances apprises au collège pour résoudre ces exercices. On souhaite également identifier les difficultés que pourraient rencontrer les élèves et les confronter avec celles indiquées par leurs enseignants.

Le questionnaire est donné dans l'annexe 6.

Question 1.

Comment expliqueriez-vous à un élève de troisième ce qu'est l'Arithmétique ?

Cette question vise à savoir si les élèves de Seconde peuvent expliquer le mot « Arithmétique » après avoir étudié ses objets tout au long du collège jusqu'à la classe de Seconde. Plus particulièrement, elle vise à savoir si les élèves associent l'arithmétique au calcul numérique ou à l'étude des propriétés des entiers. Nous allons confronter également les réponses données par les élèves avec celles des enseignants.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves vont interpréter l'arithmétique de façon non précise ou erronée ; ceci peut être justifié d'une part parce que la définition de l'arithmétique n'est pas proposée dans les manuels analysés sauf dans Déclic, et d'autre part, parce que la moitié des enseignants ayant répondu au questionnaire professeur ne proposent aucune définition de l'arithmétique.

Du fait que l'arithmétique se présente habituellement avec les nombres et le calcul, nous nous attendons à ce que les élèves interprètent l'arithmétique en faisant appel au calcul numérique, ou en référence aux quatre opérations, ou encore à l'étude des nombres.

Question 2.

Pouvez-vous expliquez les expressions suivantes :

- *« être divisible par » :*
- *« être multiple de » :*
- *« être diviseur de » :*
- *« être le pgcd de » :*
- *« être le ppcm de » :*
- *« être un nombre premier » :*
- *« être un nombre non premier » :*

Nous étudions d'abord les trois premières expressions relatives à la relation de divisibilité, ensuite, nous présentons une analyse des deux expressions, PGCD et PPCM, relative à une Relation/Propriété, pour finir avec les deux dernières expressions relatives à une propriété caractéristique.

1. Les expressions relatives à la relation de divisibilité

La relation de divisibilité est étudiée dès l'école primaire, son étude est poursuivie au collège, en prenant une place importante dans les programmes. Certains manuels les reprennent en classe de Seconde pour proposer les nouvelles notions de l'arithmétique telle la définition des nombres premiers qui s'appuie essentiellement sur la divisibilité.

Nous avons voulu à travers cette question savoir comment les élèves expliquent les expressions *« être divisible par » ; « être multiple de » ; « être diviseur de ».* Est ce que le lien entre les trois expressions est bien établi chez les élèves ?

Nous faisons une analyse de ces expressions en distinguant les aspects suivants :

- *Aspect opératoire/aspect prédicatif* : pour aborder cet aspect, nous faisons référence aux travaux de Vergnaud (2001) sur la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance. La forme prédicative, celle qui énonce les propriétés et les relations des objets, elle « *prend la forme de textes, d'énoncés, de traités et de manuels* », et la forme opératoire *« de la connaissance »* c'est-à-dire connaissance en acte, est celle qui permet d'agir en situation. Ainsi, les élèves peuvent soit définir les expressions dans cette question en citant ce qu'ils peuvent faire dans l'action, soit verbaliser leurs connaissances dans des énoncés explicites correspondant à ceux que l'on rencontre en mathématiques.

Nous donnons un exemple pour les définitions opératoires et prédicatives dans un langage courant et mathématique :

- Si on multiplie deux nombres entiers b et c, on obtient un entier a qui est un multiple de a et de b. (définition opératoire dans un langage courant).

- Le produit de deux entiers b et c est un multiple de ces deux entiers (définition prédicative dans un langage courant).

- Par définition, un entier a est multiple d'un entier b s'il existe un entier c tel que $a = b\ c$. (prédicative dans un langage mathématique).

- *Relation/propriété* : les expressions : « être divisible par », « être multiple de », « être diviseur de » présentent une relation entre deux entiers (ce sont des relations binaires). Nous prenons le mot propriété dans un sens de propriété d'objets, pas dans un sens de propriété de structure qui correspond à un énoncé tel un théorème ; il en est de même pour le mot relation.

Par exemple « être divisible par » est une relation entre deux entiers a et b, elle correspond à la relation R (a, b) qui est définie de la façon suivante :

« On dit que a est divisible par b s'il existe un entier naturel k tel que $a = kb$. »

Mais « Etre divisible » et « être divisible par 6 (par exemple) » sont des propriétés ; la première correspond à la forme suivante : il existe un nombre *b* qui divise le nombre a.

En effet, une relation peut se transformer en propriété qui « *se formalise par un prédicat à une place, et que l'on peut associer à l'énoncé formalisé suivant :*

> « $\exists\ y\ S(x, y)$ » *(1)*
>
> *qui possède exactement une variable libre, l'autre variable étant dans le champ du quantificateur existentiel.* » (Durand –Guerrier, p. 13)

On peut aussi fixer la valeur d'une des deux variables : exemple : *a* est divisible par 3 s'il existe k $\in$ N : a = 3b.

Nous signalons que « divisible » n'a pas d'intérêt en soi puisqu'un nombre est toujours divisible par lui-même ; par contre, on s'intéresse plutôt aux nombres composés au sens des nombres qui ne sont pas premiers : un nombre composé est un nombre entier qui a au moins un diviseur autre que 1 et lui-même.

Ainsi, ces expressions peuvent être interprétées en terme *Relation/propriété* de la manière suivante :

« Être diviseur de » : la définition mathématique de la notion de diviseur peut être proposée en termes de multiplication ou en termes de division,

En termes de multiplication : Soit *a* et *b* deux entiers, on dit que *b* est un diviseur de *a* s'il existe un entier *c* tel que $a = b\ c$.

En termes de division : Soit *a* et *b* deux entiers, On dit *b* est un diviseur de *a* s'il existe un entier *c* tel que $a \div b = c$.

Cette définition explicite la relation entre les entiers, elle est associée à la division euclidienne. Mais l'explication de la notion de diviseur par la propriété qu'elle vérifie (le nombre par lequel on divise) ne montre pas la relation entre les entiers, de plus elle donne le sens de la division décimale. Nous faisons l'hypothèse que la distinction entre la relation « être diviseur de » relative à la division euclidienne, et la propriété de cette expression associée à la division décimale n'est pas évidente pour les élèves.

« Être divisible par » : comme nous le montre Zazkis (2002), l'adjectif « divisible » peut être expliqué d'un point du vue grammatical dans la forme suivante «peut être divisé ». Ainsi, nous faisons l'hypothèse suivante : les élèves vont transformer le vocabulaire « être divisible par » par la forme « Pouvoir être divisé » en donnant la réponse : un nombre qui peut être divisé par un autre nombre. Cette interprétation correspond à l'aspect propriété. De même, nous pensons que la distinction entre la relation *« Être divisible par »* relative à la division euclidienne et la propriété « Etre divisible » ou la propriété « être divisible par un 9 » (par exemple) n'est pas évidente pour les élèves.

Nous formulons la même hypothèse pour la notion de multiple : les élèves ont une difficulté pour expliciter les relations entre les entiers dans la définition de multiple, ils ont une tendance à expliciter la propriété dans cette définition.

- *A quel concept renvoie la définition produite* : cet aspect nous permet de voir à quel concept renvoie la définition donnée par un élève, ceci nous permet plus particulièrement de savoir si les élèves donnent la définition de la divisibilité en sens de la division/division euclidienne, ou sous une forme de structure multiplicative.
- *Type de définition* : nous avons dégagé de l'analyse épistémologique des définitions de plusieurs types dont *la dénomination*, *les définitions par exemples* qui sont dominantes dans les manuels actuels, ainsi que *les définitions par équivalence*. Nous avons ainsi voulu savoir quel type de définitions est proposé par les élèves.
- *Langage mathématique/ langage courant* : cet aspect nous permet de savoir si les élèves arrivent à donner une définition dans un langage mathématique qui correspond aux définitions qu'on trouve dans les manuels, ou s'ils expriment ces définition dans leur propre langage.

Nous nous attendons à trouver plusieurs types de définitions :

D1 : Les expressions peuvent être présentées à partir de la relation « $\exists$ k$\in$ N : a = b k. »

Dire que le naturel a est divisible par un naturel b signifie qu'il existe un naturel k tel que : a = b k

Dire que le naturel a est un multiple du naturel b signifie qu'il existe un naturel k tel que : a = b k

Dire que le naturel b est un diviseur du naturel a signifie qu'il existe un naturel k et un seul tel que : a = b k

En analysant cette définition selon les aspects précédents, nous trouvons qu'il s'agit d'un *énoncé prédicatif* qui définit *une relation entre deux entiers* dans un *langage mathématique*, il est sous la forme « dire que … » qui donne le lieu à *la dénomination* dans cette définition et qu'il renvoie au point du vue de *structure multiplicative*.

D2 : Ces expressions peuvent aussi être définies à partir de la division euclidienne :

Quand le reste est nul dans la division euclidienne : a = b q + r , on dit que :

Le nombre entier a est un multiple du nombre entier b ou

Le nombre entier a est divisible par le nombre entier b ou b divise a.

Il s'agit d'un énoncé *prédicatif* formulé dans un *langage mathématique* de type « *Dénomination* », partant d'une *propriété* et faisant référence à la *division euclidienne*.

D3 : Les expressions du multiple et du diviseur peuvent être proposés à partir d'une définition équivalente des deux vocabulaires :

Si a est un multiple de b on dit que b est un diviseur de a.

En sachant que les relations *« être divisible par »* et *« être multiple de »* sont équivalentes alors que la relation *« être divisible par »* est une relation réciproque de la relation *« être diviseur de »*.

Ce type de formulation, qui renvoie au concept *multiple/diviseur*, donne lieu à l'aspect *relation entre a et b* dans une *forme prédicative* et dans *un langage mathématique*, et le type de définitions est «*Dénomination* ».

L'expression « être divisible par » peut aussi se définir de la même manière :

Un entier naturel a est divisible par un entier naturel b signifie que b est un diviseur de a ou a est de multiple de b.

D4 : Ces expressions peuvent être proposées à partir d'un exemple.

Exemple : On dit alors que : $12 = 3 \times 4$

- 12 est divisible par 3 ;
- 3 est un diviseur de 12 ;
- 12 est un multiple de 3.

Il s'agit ici d'une définition par exemple dans un *langage mathématique*. Cette formalisation définit une *relation entre deux nombres* et renvoie au concept de la *décomposition multiplicative*, elle est présentée dans une *forme prédicative*.

Nous faisons l'hypothèse que certains élèves qui n'arrivent pas à formuler une expression générale peuvent s'appuyer sur un exemple.

Une autre manière de répondre à la demande de produire une définition consiste à proposer une reformulation. Nous allons considérer la réponse qui explique une expression d'un point de vue grammatical comme une réponse de reformulation RM qui n'introduit pas un nouveau vocabulaire.

En ce qui concerne « être divisible par », on peut s'attendre à trouver la reformulation « Pouvoir être divisé ». Cette reformulation peut renvoyer implicitement à une relation :

Un nombre qui peut être divisé par un autre nombre en donnant un nombre entier.

Pour l'expression « être diviseur de », on peut s'attendre à trouver la reformulation « Pouvoir diviser, qui pourrait renvoyer également à une relation :

Un nombre qui peut diviser un autre nombre en donnant un nombre entier.

Quant à l'expression « être multiple de », la tentative de reformuler cette expression sous la forme « pouvoir multiplier » produit une forme erronée : « Un nombre qui peut multiplier par un autre nombre », tandis que la forme « peut être multiplié » donne une forme sans intérêt.

Ainsi, nous faisons deux hypothèses :

- La difficulté linguistique est liée à la difficulté de définir une expression par rapport à la signification qu'elle porte ; cette difficulté peut conduire les élèves à proposer des reformulations.
- Un certain nombre d'élèves, lorsqu'ils tentent de reformuler les expressions, se trompent avec l'expression « être multiple de », alors qu'ils donnent une reformulation correcte pour « être divisible par » et « être diviseur de ».

Pour analyser la réponse des élèves, nous allons faire les distinctions suivantes :

- Réponse correcte C1 : il s'agit d'une question correspondant aux définitions D1, D2, D3, D4 indiquées plus haut.
- Réponse correcte acceptable C2 : il s'agit d'une définition correcte mais non complète, c'est-à-dire qui n'associe pas l'expression définie aux entiers, ou qui est acceptable.
- Réponse fausse notée F.
- Réponse de reformulation qui consiste à simplement reformuler le défini notée : RM.

2. Les expressions relatives au PGCD et PPCM

Nous avons proposé les deux notions pgcd et ppcm dans cette question car nous avons l'intention de proposer aux élèves, plus tard dans ce questionnaire, des exercices concernant ces deux notions. De plus, nous avons voulu tenter d'identifier leurs connaissances sur ces deux notions et de repérer s'ils arrivent en particulier à donner une définition du ppcm, ce dernier étant absent comme objet d'étude, mais présent comme outil dans les manuels.

Nous avons proposé, dans l'analyse a priori du questionnaire des enseignants, une analyse de la définition du PGCD. Nous rappelons les définitions que nous avons distinguées :

D1 : elle permet de montrer l'aspect existence du pgcd.

D2 : elle définit le pgcd comme le plus grand entier des diviseurs communs de deux entiers.

D3 : elle est proposée sous deux conditions : *i)* $d | a$ *et* $d | b$; *ii) si* $c | a$ *et* $c | b$, *alors* $c \leq d$

Elle peut être représentée par la forme : le plus grand entier naturel qui divise simultanément ces deux entiers.

D4 : elle est proposée par l'intersection $D(a) \cap D(b)$.

D5 : elle définit le pgcd à partir de la décomposition en facteurs premiers.

Vu que les manuels ne définissent pas le pgcd à partir de la décomposition en facteurs premiers ni en termes d'intersection, nous ne nous attendons pas à ce qu'ils soient présents dans la réponse des élèves. Ainsi, nous pensons trouver les trois définitions : D1, D2 et D3.

Le fait qu'un nombre élevé des enseignants a défini le PGCD sous forme d'une abréviation nous faisons l'hypothèse suivante :

Cette forme d'abréviation du pgcd peut inciter certains élèves à donner une définition de type reformulation : « Le plus grand diviseur commun à *a* et *b* est appelé PGCD », ainsi, nous allons considérer les élèves qui vont transformer la définition sous la forme suivante : « c'est le plus grand diviseur de deux nombres » ou « être le plus grand diviseur commun de deux entiers », est une réponse de reformulation.

Nous faisons une autre hypothèse : le fait que les enseignants n'ont pas explicité dans leur définition du PGCD les relations entre les entiers, ni l'ordre divisibilité, la familiarité avec les entiers ne sera pas évidente pour les élèves, et l'ordre naturel sera présent dans leur réponse au détriment de l'ordre divisibilité.

De la même manière, nous allons distinguer seulement trois définitions pour le PPCM :

D1 : Parmi les multiples communs à deux naturels, **il en existe** un différent de 0 et plus petit que tous les autres, c'est le ppcm de *a* et de *b*.

D2 : Le plus petit entier naturel qui soit à la fois multiple de deux entiers *a* et *b* est appelé le PPCM.

D3 : Le plus petit des multiples communs à *a* et *b* est noté PPCM (*a*, *b*).

Nous pensons que certains élèves formulent D3 de la manière suivante : c'est « Le plus petit multiple commun de deux nombres » que nous allons considérer comme un type de reformulation de ppcm. Nous faisons l'hypothèse suivante : peu d'élèves arriveront à définir le ppcm car ce dernier est absent comme objet d'étude dans les manuels.

Pour analyser les réponses des élèves nous allons aborder les aspects précédents que nous avons détaillés au paragraphe 1 :

- Prédicative/opératoire
- Relation/propriété.
- Concept auquel renvoie la définition.
- Type de définition.
- Langage mathématique/langage courant.

Les définitions D1, D2 et D3 pour le PGCD et le PPCM sont sous la forme prédicative et écrites dans un langage mathématique, le type de définition est « dénomination ». Concernant la définition produite, D1 et D3 renvoient à la notion de diviseur alors que D2 renvoie plutôt à la notion de divisibilité.

Nous allons classer les réponses en trois catégories ; réponse correcte, réponse fausse, réponse de reformulation, en distinguant deux types de réponses correctes : réponse correcte C1, correspondant aux trois formes précédentes, réponse correcte C2 formulée dans un langage courant ou écrit dans un langage mathématique mais qui n'est pas complète, en considérant qu'une réponse correcte non complète est celle qui ne précise pas que les nombres sont des entiers naturels.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves n'expliciteront pas l'aspect « existence et unicité » du pgcd et du ppcm, et vont donner plutôt D2 ou D3 pour répondre à cette question.

3. Les expressions relatives aux nombres premiers et nombres composés

En ce qui concerne les vocabulaires suivants : « être un nombre premier », « être un nombre non premier », nous avons voulu savoir comment les élèves font la distinction entre les nombres premiers et les nombres non premiers, et si ces derniers sont développés chez les élèves comme la notion de nombres premiers.

La réponse des élèves nous donne des informations sur la question 7 si les élèves vont mobiliser ces définitions pour tester la primalité des nombres.

La définition des nombres premiers et des nombres non premiers introduit une propriété d'objet, donc nous allons analyser les réponses des élèves suivant les aspects suivants :

- Prédicative / opératoire.
- Concept auquel renvoie la définition
- Type de définition.
- Langage mathématique/ langage courant.

En distinguant deux types de réponses correctes :

- C1 correspondant à la définition suivante :

  Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs 1 et lui-même.

  Un nombre non premier est un entier naturel qui possède un diviseur entier naturel autre qu'un ou lui-même.

- Et C2 pour les réponses correctes formulées dans un langage courant ou les réponses correctes non complètes qui ne précisent pas que le nombre premier est un nombre entier naturel.

La définition des nombres premiers ne donne pas le lieu pour une réponse de reformulation donc l'analyse des réponses suivant les aspects précédents sera menée sur les réponses correctes et sur les réponses fausses.

Question 3

Déterminez le pgcd de 72 et 132 en utilisant si possible deux méthodes différentes.

Cette question posée aux élèves est couplée avec une question proposée aux enseignants dans le questionnaire-professeur concernant la méthode de détermination du pgcd qu'ils proposent à leur élèves et dans quels contextes ils utilisent plusieurs méthodes.

Comme nous l'avons déjà vu, il y a quatre techniques pour calculer le PGCD : la définition opératoire du pgcd (le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs de deux entiers), l'algorithme d'Euclide et la méthode des soustractions successives. Ces trois techniques sont étudiées en Troisième. La décomposition en facteurs premiers devient une technique à connaître en classe de Seconde.

Nous tentons à travers cette question de savoir si l'aspect algorithmique est encore présent dans le travail des élèves ; est-ce qu'ils mettent en place la définition du pgcd qu'ils ont donnée dans la question 2 du questionnaire ? Est-ce qu'ils mettent en œuvre la décomposition en facteurs premiers qui est objet d'étude en seconde ou bien est-ce qu'ils privilégient les techniques rencontrées en troisième?

Les méthodes attendues sont les suivantes :

- Définition opératoire du pgcd : il s'agit de trouver le plus grand diviseur de l'ensemble de diviseurs communs de deux nombres de la manière suivante :

  Les diviseurs de 72 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

  Les diviseurs de 132 : 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132

  Les diviseurs communs : 1, 2, 3, 4, 6, 12

  Pgcd (72, 132) = 12

- Méthode des soustractions successives : cette méthode consiste à soustraire deux nombres autant de fois que nécessaire jusqu'à ce que le reste soit égal à zéro :

  Soit a et b deux entiers : $a \geq b$ Pgcd (a, b) = pgcd (b, a-b).

  132 - 72 = 60

72 – 60 = 12

60 – 12 = 48

48 – 12 = 36

36- 12 = 24

24 – 12 = 12

12 – 12 = 0

Le pgcd est 12.

- Algorithme d'Euclide :

Principe : si $b < a$ et $a = bq + r$ avec $r < b$ alors : pgcd (a, b) = pgcd (b, r).

Le pgcd est le dernier reste non nul

$132 = 71 \times 1 + 60$

$72 = 60 \times 1 + 12$

$60 = 12 \times 5$

Donc, le pgcd est 12.

- Décomposition en produits de facteurs premiers.

Pour calculer le pgcd, nous sélectionnons les facteurs communs (présents dans les deux produits) ; s'ils figurent avec des exposants, nous leur attribuons leur plus petit exposant ; ensuite nous effectuons le produit :

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$
$132 = 2 \times 2 \times 3 \times 11 = 2^2 \times 3^1 \times 11^1$
pgcd $(72, 132) = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$

Avec quatre méthodes possibles, il y a six choix pour proposer deux méthodes:

Algorithme d'Euclide et la définition opératoire du pgcd : E-O

Algorithme d'Euclide et la soustraction successive : E-S

Algorithme d'Euclide et la décomposition en facteurs premiers : E-D

Définition opératoire du pgcd et la soustraction successive : O-S

Définition opératoire du pgcd et la décomposition en facteurs premiers : O-D

Soustractions successives et la décomposition en facteurs premiers : S-D

Etant donné que les élèves ont travaillé en troisième sur l'aspect algorithmique, nous supposons qu'ils disposent des deux méthodes : l'algorithme d'Euclide et celui des soustractions successives. De plus, comme la décomposition en facteurs premiers est un objet d'étude en seconde, on peut s'attendre à la voir apparaître. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que les réponses couplant un des deux algorithmes étudiés en troisième et la décomposition en facteurs premiers seront les plus fréquentes lorsque deux réponses seront données.

Nous ne nous intéressons pas seulement aux réponses correctes mais aussi aux réponses fausses afin de savoir quelle méthode est la mieux maîtrisée par les élèves et avec quelle(s) méthode(s) ils se trompent.

Question 4

- *Soit $A = 6 \times 147 + 1$. A est-il divisible par 2 ?*
- *Soit $B = 6 \times 147 + 2$. B est-il divisible par 2 ?*

Cet exercice a été déjà proposé dans le travail de Campbell (2002). Il s'intéresse dans son étude à la signification donnée par de futurs enseignants à la division euclidienne. En outre, les manuels de 1970 proposaient cet exercice dans la partie cours concernant les critères de divisibilité.

L'idée de cette question, qui est proposée sous la forme $a = bq + r$, est de mettre en place la définition de « être divisible par » à partir de la division euclidienne : si le reste de la division euclidienne est nul, on dit que « a est divisible par b ». Ainsi, cette question permet de savoir si les élèves mettent en œuvre la définition de divisibilité qu'ils ont déjà définie dans la question 1 du questionnaire ; en particulier, elle nous permet de répondre à la question suivante : est ce que les élèves ayant défini correctement cette expression vont réussir à répondre à cette question ? Ou bien, les élèves peuvent-ils donner une définition correcte sans répondre à cette question ? Ou encore : les élèves peuvent-ils répondre correctement sans donner une définition correcte de cette expression ?

Pour répondre à cette question, plusieurs méthodes sont à la disposition des élèves :

T1 : Déterminer la divisibilité de A et de B par 2 à partir de la forme donnée en précisant le quotient et le reste de la division de A et B par 2.

Le quotient de la division A par 2 est 3×147 et le reste est 1.

Le quotient de la division de B est 3×147 et le reste est nul.

Donc, A n'est pas divisible par 2 car le reste de la division euclidienne par 2 est non nul, alors que B est divisible par 2 car le reste est nul.

La réponse ici est liée à la définition opératoire de la divisibilité : un nombre est divisible par 2 si et seulement si le reste dans la division euclidienne de ce nombre par 2 est nul.

Notons que pour utiliser T1 ici, il ne faut pas seulement connaître l'équivalence entre reste nul et divisibilité ; il faut aussi transformer l'écriture afin de faire apparaître le quotient et le reste dans la division par 2, ce qui rend peu vraisemblable son apparition.

T2 : Trouver la valeur de A et de B, et effectuer ensuite la division euclidienne pour obtenir le quotient et le reste.

T2-1 : Le quotient de A par 2 est un nombre décimal : A = 441| 2 = 220.5

Le quotient de B par 2 est un entier : B = 442 | 2 = 221

La réponse porte aussi sur la définition opératoire de la divisibilité après avoir trouvé la valeur de A et de B, elle met l'accent sur la nature du quotient : si le quotient dans la division par 2 est entier alors le nombre est divisible par 2 ; s'il est décimal, il n'est pas divisible par 2.

T2-2 : Le reste de la division euclidienne (441÷ 2) n'est pas nul pour A : r = 1, donc A n'est pas divisible par 2.

Le reste de la division euclidienne de B par 2 est nul : r = 0, donc B est divisible par 2.

Ici l'accent est mis sur la valeur du reste dans la division euclidienne ; on ne travaille qu'avec des entiers.

T3 : Utiliser les critères de divisibilité après avoir trouvé la valeur de A et de B. Reconnaissance de la parité d'un nombre sur le dernier chiffre et connaître les deux équivalences « être pair » et « être divisible par 2 » ; « être impair » et « ne pas être divisible par 2»

A = 883 n'est pas divisible par 2 ; en effet il se termine par le chiffre 3 ; c'est donc un nombre impair.

B = 884 est divisible par 2 ; en effet, il se termine par le chiffre 4, c'est donc un nombre pair.

T4 : Utiliser des résultats opératoires concernant les nombres pairs et impairs : le produit d'un nombre pair avec un nombre impair est un nombre pair, en ajoutant 1 au nombre pair on obtient un nombre impair qui n'est pas divisible par 2 ; en ajoutant 2 au nombre pair on obtient un nombre pair qui est divisible par 2.

T5 : Mettre en œuvre la notion de nombre premier : A = 883 est un nombre premier qui n'est divisible que par 1 et lui-même, donc A n'est pas divisible par 2, alors que B = 884 est un nombre non-premier, il est divisible par 2.

Mais T5 demande d'utiliser les méthodes de vérification de la primalité d'un nombre ; ceci donne à penser que cette technique apparaîtra très peu dans les réponses des élèves. Elle est de fait peu adaptée ici. Néanmoins, certains élèves, qui confondent les nombres premiers et les nombres impairs, pourraient justifier leurs réponses en considérant A en tant que nombre impair est un nombre premier, il en résulte que A n'est pas divisible par 2.

Etant donné que T2 permet aux élèves de facilement déterminer la divisibilité de A et de B par 2, nous faisons l'hypothèse que c'est celle qui sera la plus fréquente.

Question 5

Soit $M = 3^2 \times 5^2 \times 7$

5a) M est-il divisible par : 7, 9, 2, 11,63 ? Justifiez votre réponse.

5b) $B = 3^2 \times 5^3 \times 7$*, B est- il diviseur de M et pourquoi ?*

5c) $F = 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$*, est- il multiple de M et pourquoi ?*

Nous avons proposé cet exercice dans le questionnaire destiné aux professeurs, en leur demandant s'ils proposaient ce type d'exercice à leurs élèves et quelles corrections ils donneraient à leurs élèves ; ceci afin de les mettre en perspective avec les réponses des élèves à cette question.

Comme nous l'avons déjà dit, les connaissances en jeu ici portent sur la relation de divisibilité avec la décomposition en facteurs premiers et plus précisément, elle met en jeu les notions suivantes : diviseur, divisible, multiple, facteur, facteur premier, avec l'idée de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Les élèves ont l'habitude dès la classe de sixième de déterminer la divisibilité d'un nombre par un autre à partir de la forme suivante : $a = b \times c$: a est divisible par b ou a est un multiple de b ou encore b est un diviseur de a.

Cette question permet de voir comment les élèves mettent en œuvre la notion de divisibilité dans une nouvelle situation, à partir d'un nombre décomposé en facteurs premiers. Elle nous permet également de savoir si les élèves font référence dans leur réponse à l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, explicitement ou implicitement, pour donner des arguments sur la question de la divisibilité.

5.1. La question 5.a

Pour répondre à la question 5a), les élèves disposent des techniques suivantes:

- Première technique T1: il s'agit de montrer que M est divisible par les facteurs qui apparaissent explicitement ou implicitement dans la décomposition de M, alors qu'elle n'est pas divisible par les nombres premiers qui ne figurent pas explicitement dans M du fait de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Ainsi, M est divisible par 7 (facteur explicitement figuré dans M), et divisible aussi par $9 = 3^2$, $63 = 7 \times 9$ (9 et 63 sont des facteurs implicitement figuré dans M) alors que M n'est pas divisible par 2 et 11.

Il est également possible de trouver tous les diviseurs de M et ensuite déterminer la divisibilité de M par les nombres donnés.

- Deuxième technique T2: elle consiste à trouver la valeur de M et à effectuer la division euclidienne ou à utiliser les critères de divisibilité pour déterminer si les nombres donnés sont divisibles par M ou pas. $M = 3^2 \times 5^2 \times 7 = 9 \times 25 \times 7 = 1575$.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves vont plutôt utiliser la deuxième méthode parce qu'ils ont l'habitude de déterminer la divisibilité des nombres non décomposés. Cette hypothèse est renforcée par notre analyse a posteriori du questionnaire-professeur (les enseignants ont prévu que leurs élèves vont utiliser la technique T2).

La première méthode leur pose une difficulté surtout avec les entiers qui ne figurent pas dans la décomposition de M. Ils pourraient réussir à donner une réponse correcte pour les facteurs figurant explicitement dans M, mais certains élèves ne pourraient pas donner une réponse correcte avec les facteurs qui apparaissent implicitement dans M. Nous prenons par exemple le nombre 7 : les élèves peuvent facilement donner la bonne réponse car 7 apparaît explicitement dans la décomposition de M. Pour 9 et 69 en revanche, les choses peuvent leur sembler un peu difficile, surtout pour 63 car il ne figure pas explicitement dans M : il faut d'abord trouver 3^2 pour multiplier ensuite 9×7 afin de dire que 63 est un diviseur de M. Ce n'est pas la même chose pour 2 et 11 car ce sont des nombres premiers qui ne figurent pas dans la décomposition de M ; nous faisons l'hypothèse que les élèves auront une difficulté à justifier leur réponse pour ces deux nombres parce que l'unicité de la décomposition en facteurs premiers est en jeu.

Concernant les questions 5b) et 5c), l'objectif est de savoir comment les élèves mettent en place la notion de diviseur/multiple dans une nouvelle situation avec la décomposition en facteurs premiers.

5.2. La question 5.b

Deux techniques sont à la disposition des élèves pour répondre à la question :

Soit $M = 3^2 \times 5^2 \times 7$

5b) $B = 3^2 \times 5^3 \times 7$*, B est- il diviseur de M et pourquoi ?*

- **T1 :** Utiliser la forme décomposée de B en facteurs premiers.

T1-1 : On utilise la règle suivante : Pour qu'un nombre M soit un diviseur de B, il faut que la décomposition de M en facteurs premiers ne contienne que des facteurs premiers qui figurent dans la décomposition de B avec un exposant au plus égal.

Si la décomposition en facteurs premiers de B contient des facteurs premiers avec un exposant plus élevé que l'exposant de ce facteur dans M, alors B n'est pas un diviseur de M.

T1-2 : On utilise la définition de diviseur : dire que le naturel b est diviseur du naturel a signifie qu'il existe un naturel q tel que : $a = b\,q$

En fait, B n'est pas un diviseur de M car $B = 5 \times M$ (ou $M = 1/5\ B$)

T1-3 On utilise le critère de l'ordre naturel

Pour tout entiers naturels a et b | a → $b \leq a$ (ordre de divisibilité). or $B > M$.

T1-4 : Ecrire le quotient sous forme de fraction et simplifier:

$$\frac{M}{B} = \frac{3^2 \times 5^2 \times 7}{3^2 \times 5 \times 7}$$

- **T2 :** Calculer les valeurs de M et B et faire la division euclidienne ou décimale.

5.3 La question 5.c

Pour la question suivante : Soit $M = 3^2 \times 5^2 \times 7$

5c) $F = 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$*, est- il multiple de M et pourquoi ?*

On a aussi deux façons pour chercher à savoir si F est un multiple de M :

- **T1 :** Utiliser la forme décomposée de *B* en facteurs premiers.

T1-1 : On utilise la règle suivante : Pour qu'un nombre *B* soit multiple de *M*, il faut que la décomposition de *B* en facteurs premiers contienne au moins tous les facteurs premiers qui figurent dans la décomposition de M avec un exposant égal ou supérieur.

T1-2 : On utilise la définition du multiple :

Dire que le naturel a est un multiple du naturel b signifie qu'il existe un naturel q tel que a = b q

$F = 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$

$M = 3^2 \times 5^2 \times 7$

$F = 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 3 = M \times 11 \times 3$ ➔ $F = M \times C$

- **T2 :** Calculer les valeurs de M et F et faire la division euclidienne ou décimale.

Question 6

Soit $A = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ *et* $C = 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$

Donner un multiple commun de ces deux nombres.

Cette question est aussi posée dans le questionnaire des enseignants. Comme nous l'avons déjà vu, la plupart des manuels analysés en classe de quatrième proposent la recherche du PPCM sous le titre « multiple commun ». Ainsi, nous voulons savoir si les élèves vont trouver un multiple commun ou s'ils recherchent le PPCM avec la décomposition en facteurs premiers.

Cette question nous permet aussi de voir si les élèves font une confusion entre un multiple commun ou un diviseur commun, ou entre le PGCD et le PPCM à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

Les techniques qui peuvent être mises en œuvre par les élèves pour déterminer un multiple commun sont les suivantes :

T1 : Trouver le produit A × C à partir de la décomposition en facteurs premiers ou calculer la valeur de A et C et faire le produit A × C de la manière suivante :

$$A = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 4 \times 3 \times 25 \times 7 = 2100$$

$$C = 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11 = 1299375$$

La recherche d'un multiple commun en déterminant le produit A ×C fournit une bonne réponse à cette question, sans faire appel au PPCM.

Notons que la taille des nombres visait à disqualifier cette méthode.

T2 : Chercher le ppcm à l'aide de la décomposition en facteurs premiers : pour déterminer le ppcm de deux nombres décomposés en facteurs premiers, on utilise la règle suivante : Soit m un multiple commun à deux nombres *A* et *B*.

a) Chacun des facteurs élémentaires intervenant dans la décomposition en facteurs premiers de l'un ou l'autre des deux nombres A et B intervient dans la décomposition en facteurs premiers de m

b) L'exposant d'un facteur élémentaire dans la décomposition de *m* est supérieur ou égal au plus grand de deux exposants de ce même facteur élémentaire dans les décompositions de *A* et *B*, lorsqu'il intervient dans les deux, ou à l'exposant de ce même facteur dans le nombre où il intervient lorsqu'il intervient dans un seul des deux nombres.

Le ppcm est donc le produit de tous les facteurs communs et non communs avec le plus grand exposant : ppcm = $2^2 \times 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- HP1 : Le fait que cet exercice n'est pas un exercice habituel pour les élèves car, d'une part il est proposé à l'aide de la décomposition en facteurs qu'ils viennent de l'étudier, et d'autre part, le travail sur la notion de ppcm est peu rencontrée en classe, on s'attend à ce que le taux de non réponses soit élevé pour cette question. Nous confrontons notre hypothèse à ce que nous avons trouvé dans le questionnaire des enseignants dont un grand nombre a indiqué qu'il fait travailler leurs élèves avec un tel exercice.

- HP2 : Etant donné que la question proposée ne demande pas le ppcm, et que la détermination du ppcm nécessite d'utiliser la règle précédente, qui n'est pas abordée par certains manuels, nous faisons l'hypothèse suivante : peu d'élèves donneront le ppcm comme multiple commun de deux nombres. Cette hypothèse s'appuie également sur la réponse des enseignants qui ont prévu que leurs élèves vont utiliser la technique T1.

- HP3 : lorsque les élèves tentent de chercher le PPCM, certains confondent avec la recherche du PGCD. Cette hypothèse s'appuie également sur la réponse de certains enseignants ayant indiqué que leurs élèves vont trouver le PGCD.

Question 7

Les nombres suivants sont-ils premiers ? Justifier votre réponse.

7a) 98

7b) 89

7c) 599

Cette question est couplée avec la question 10 du questionnaire des enseignants, dans laquelle nous avons demandé aux enseignants la définition des nombres premiers et les méthodes qu'ils proposent pour déterminer la primalité des nombres.

Nous avons posé cette question aux élèves pour savoir quelles méthodes sont utilisées par les élèves dans le cas où les critères de divisibilité ne permettent pas de déterminer la primalité d’un nombre. Nous cherchons plus particulièrement à savoir si les élèves disposent de la démarche algorithmique pour reconnaître si un nombre est premier ou pas, et quelle méthode ils privilégient.

Nous avons choisi trois nombres :

Le premier nombre est pair (98), ce choix permet de privilégier l’utilisation des critères de divisibilité où le nombre 98 est divisible par 2, de plus il permet aux élèves d’utiliser : « les nombres pairs ne sont pas premiers sauf 2 ».

Cependant, les élèves peuvent dire que 98 est un nombre non premier en utilisant :

- La définition des nombres premiers : le nombre 98 a plusieurs diviseurs autres que 1 et lui-même (2, 7, 49 …) donc 98 n’est pas premier.
- La décomposition en facteurs premiers : 98 peut s’écrire en produit de deux facteurs dont l’un est premier $98 = 2\times 7^2$ ce qui montre que 98 n’est pas premier.
- Le Crible d’Eratosthène.

Le deuxième nombre est impair (89) : ce choix nous permet de savoir quelle méthode est utilisée par les élèves dans le cas où les critères de divisibilité ne permettent pas de déterminer si le nombre est un premier ou pas. Il nous permet aussi de voir si les élèves identifient le fait que « les nombres premiers sauf 2 sont impairs », mais que « les nombres impair ne sont pas nécessairement des nombres premiers ».

Pour déterminer si 89 est un premier ou non, les élèves peuvent utiliser les critères de divisibilité qui montre que le nombre 89 n’est pas divisible par 2, 3, 5, 7, … Ils peuvent ensuite mettre en œuvre plusieurs techniques:

- M1 : Diviser par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

  On divise 89 par les nombres premiers successifs, on trouve qu’il n’est pas divisible par les nombres 2, 3, 5, 7, ($7^2 = 49$),

  Le suivant est 11 et $11^2 = 121 > 89$. Il faut s’assurer que 11 ne divise pas 89 ; on peut ensuite conclure que 89 est premier.

- M2 : On divise 89 par les nombres premiers successifs 2, 3, 5, 7, …et on s’arrête quand le quotient devient inférieur au diviseur.

  $89 \div 11 = 8{,}090$ (ou division euclidienne $89 = 11\times 8 + 1$) le quotient est inférieur au le diviseur, donc 89 est premier.

- Crible d’Eratosthène.

Le troisième nombre (599) est aussi impair, avec ce choix les élèves ne peuvent pas déterminer si 599 est premier ou pas ni avec les critères de divisibilité, ni avec le Crible d'Eratosthène (dans lequel les nombres premiers sont proposés jusqu'à 100).

Pour déterminer si 599 est un nombre premier ou non, les élèves peuvent utiliser :

- les critères de divisibilité, il en sort que 599 est n'est pas divisible par 2, 3, 5, …

Ensuite, ils disposent des deux méthodes suivantes :

- M1 : Diviser par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

  On divise 599 par les nombres premiers successifs, on trouve qu'il n'est pas divisible par les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, (23^2= 529)

  Le suivant est 29$29^2$ = 841 > 599. Il faut s'assurer que 29 ne divise pas 599 ; on peut conclure que : 599 est premier.

- M2 : On divise 599 par les nombres premiers successifs, on trouve que 599 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

  On s'arrête quand le quotient devient inférieur au diviseur

  $599 = 23 \times 26 + 1$

  $599 = 29 \times 20 + 19$; $20 < 29$

  On est certain que le nombre est premier.

Nous faisons l'hypothèse suivante : les élèves vont utiliser la technique M1 conformément à la réponse de la plupart des enseignants lorsque les critères de divisibilité ne permettent pas de déterminer la primalité des nombres.

II. Analyse a posteriori du questionnaire destiné aux élèves de la classe de seconde

Introduction

En nous appuyant sur notre analyse a priori, et prenant en compte la réponse des enseignants aux questions communs, nous présentons une analyse des réponses des élèves. Comme nous l'avons déjà dit, les 10 enseignants (notés dans les annexes P- E) ayant accepté de répondre à notre questionnaire ont fait passer le questionnaire des élèves à leur élèves. Le questionnaire a été diffusé au début de mois de mai 2009. Nous avons recueilli 186 réponses d'élèves de Seconde de 11 classes différentes réparties dans 9 établissements. Du fait de condition de passion du questionnaire à la fin de l'année scolaire, le nombre des réponses que nous avons obtenues varie d'une classe à l'autre. Nous avons trois classes dont le nombre d'élèves est égal presque 29 élèves, et quatre classes où le nombre d'élève est égal (16 – 21 élèves), et autres quatre classes où le nombre d'élève est égal (4- 8 élèves). Notons enfin que le questionnaire a été rempli par certains élèves à la maison, et par d'autres en classe.

Question 1

Comment expliqueriez-vous à un élève de troisième ce qu'est l'Arithmétique ?

83 élèves (45 %) n'ont pas répondu à cette question dont 6 élèves ont signalé qu'ils ne savent pas le sens d'arithmétique et 7 élèves ont donné une réponse ambigüe, nous présentons un exemple :

> *« Quelque chose qui sert tout le temps et tous les jours, c'est une matière essentielle. »*

Les autres élèves de ce groupe se sont contentés de dire que l'arithmétique est une partie des mathématiques ; nous avons considéré que cette réponse relève de la catégorie « non répondu » car elle ne donne pas d'éléments sur ce qu'est l'arithmétique.

Ainsi, le taux élevé (45%) de non – réponse montre que les élèves ont une difficulté à expliquer le sens du mot « arithmétique ». Ceci peut être justifié par le fait que d'une part les manuels ne proposent pas une définition de l'arithmétique, et que d'autre part, certains enseignants ne la définissent pas ; c'est le cas de 48% des enseignants ayant répondu au questionnaire professeur. En ce qui concerne les élèves ayant répondu à cette question (103 élèves), nous les regroupons en 7 catégories à partir de leurs réponses :

- Elèves associant l'arithmétique aux nombres et calculs. (54 réponses).
  - Calcul sur les nombres (22 réponses).
  - Etude / science des nombres (22 réponses).
  - Numération (3 réponses).

- Opération sur les nombres : addition, soustraction, multiplication, division (3rép).
- Calcul numérique (3 réponses).
- Contraire de l'algèbre (1 réponse).

Nous pensons que, pour la dernière réponse, l'élève associe l'arithmétique aux nombres et calculs.

Le fait que l'arithmétique se présente dans la plupart des manuels dans un chapitre intitulé « Calculs et nombres », peut inciter les élèves à associer l'arithmétique au calcul numérique ou à l'étude des nombres. Ceci est conforme à la réponse de certains enseignants ayant défini l'arithmétique par le calcul numérique, étude des nombres ; opérations.

- Elèves ayant répondu que l'arithmétique se rapporte à la théorie des nombres élémentaire ou à la théorie des nombres avancés (13 réponses).

6 élèves ont défini l'arithmétique en termes de la géométrie algébrique et 2 autres élèves l'ont défini en terme de propriété des nombres entiers et rationnels

> *« L'arithmétique c'est une branche des mathématiques qui comprennent la partie de la théorie des nombres qui utilise des méthodes de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes. »*

Il est surprenant de trouver cette définition dans la réponse de ces élèves, car aucun enseignant n'a pas donné cette définition dans la réponse des enseignants. Nous pensons que ces élèves avaient l'accès à l'internet du fait que certains élèves ont rempli le questionnaire chez eux. En ce qui concerne l'arithmétique définie en référence à la théorie des nombres élémentaire, nous trouvons qu'un seul élève a donné la définition suivante :

> *« Étude des propriétés des nombres entiers. »*

Tandis que 2 autres élèves ont précisé des objets de l'arithmétique en montrant que l'arithmétique comporte à la fois le calcul numérique et la théorie des nombres

> *« L'arithmétique est tout l'enseignement des mathématiques dans l'ordre : apprendre à compter, les additions, soustractions, multiplication, division, décomposition des nombres, PGCD…L'arithmétique est ce que vous faites ! ».*

Notons que 2 élèves se sont contentés de dire que l'arithmétique concerne exclusivement les entiers. 2 autres élèves semblent ne pas avoir une bonne compréhension de l'arithmétique ; ils associent l'arithmétique en terme propriété et relation, mais la familiarisation avec les entiers n'est pas évidente pour eux. Pour un autre élève, c'est l'étude les propriétés des nombres, tandis que pour l'autre élève, c'est la relation entre les nombres :

> *« Prendre des nombres et déterminer leur relations avec d'autres. »*

Le nombre très faible d'élèves ayant réussi à défini correctement l'arithmétique met en évidence que les propriétés et les relations associés à l'arithmétique ~~est~~ sont très difficiles à saisir par les élèves de Seconde. Ceci confirme à ce qui est prévu dans l'analyse a priori, car très peu d'enseignants l'ont explicité dans leur réponse.

- Elèves ayant trouvé que l'arithmétique c'est le partie qui concerne à la fois l'étude des nombres et l'algèbre auxquels on rajoute les élèves ayant signalé qu'elle n'appartient pas à la géométrie (17 réponses) :

- Contraire la géométrie (7réponses).
- Etude des nombres et algèbre (5 réponses).
- Calcul et contraire de la géométrie (4 réponses).
- Calcul numérique ou algébrique (1 réponse).

Pour les élèves ayant défini l'arithmétique en tant que partie ne concernant pas la géométrie, nous pensons qu'ils associent l'arithmétique au calcul et à l'algèbre.

Dans cette catégorie, les élèves définissent l'arithmétique par le calcul numérique et algébrique. Ce qui montre que la spécificité de l'arithmétique à l'étude des propriétés des nombres entiers n'est saisie par ces élèves.

- Elèves ayant trouvé que l'arithmétique concerne exclusivement l'algèbre (11 réponses) :

- Calcul algébrique (7 réponses).
- Algèbre (2 réponses).
- Algèbre et contraire de la géométrie (2 réponses).

Ces élèves ont une mauvaise compréhension de l'arithmétique, ils l'associent à l'habitat et la niche algébrique.

- Elèves ayant signalé que l'arithmétique est utilisée pour le raisonnement (5 réponses).

> *« Il s'git d'un raisonnement, une logique en mathématique. »*

Le fait que l'arithmétique a une niche raisonnement, ces élèves ont associé l'arithmétique au raisonnement.

- Elèves ayant écrit qu'elle concerne l'ensemble des nombres (entiers, décimaux, réel,..) (2réponses).

> *« L'arithmétique sert à déterminer ce qui est un nombre (entiers, décimaux, rationnels et réels). »*

- Elèves ayant écrit que l'arithmétique se rapporte à la fois à l'étude des nombres et de la géométrie (1réponse).

Les trois dernières réponses associent l'arithmétique à l'ensemble des nombres ; ceci peut être mis en relation avec le fait que l'arithmétique se présente dans les manuels à la suite de l'étude de l'ensemble.

Nous synthétisons les catégories des réponses des élèves dans le tableau suivant :

Description variables Question Q1	Nombre	Pourcentage
Calcul numérique : Etude des nombres / opérations /calculs / calcul / numération	54	29 %
Théorie des nombres (élémentaire / avancé) : l'étude *des propriétés des entiers*	13	7 %
Etude des nombres et Calcul algébrique	17	9 %
Calcul algébrique / algèbre	11	6 %
Raisonnement	5	3 %
Ensemble des nombres	2	1 %
Etude des nombres et géométrie	1	1%
Non répondu	83	44 %
Total	186	100 %

Ainsi, les élèves dans cette question ont donné des réponses variées. La plupart de ces réponses ne sont pas précises et sont parfois erronée. Ceci montre que l'arithmétique en tant que domaine spécifiée aux propriétés et relations sur les entiers n'est pas comprise par la majorité des élèves. Ceci peut être expliqué par le fait que la niche « Théorie des nombres » ne prend une importance ni dans les programmes ni dans les manuels. En outre, les enseignants, comme nous l'avons vu, n'explicitent pas les propriétés et les relations associées à l'arithmétique.

Question 2. Pouvez-vous expliquez les expressions suivantes :

- « être divisible par » :
- « être multiple de » :
- « être diviseur de » :
- « être le pgcd de » :
- « être le ppcm de » :
- « être un nombre non premier » :
- « être un nombre premier » :

Le tableau ci-dessous synthétise l'ensemble des données pour les trois premières expressions :

Réponses	Réponse correcte	Réponse fausse	Non répondu	Reformulation	Total
Etre divisible par	46	48	25	67	186
Etre multiple de	50	62	37	37	186
Etre diviseur de	47	26	68	45	186

Nous constatons que les réponses correctes des trois expressions sont presque équitables.

Les réponses erronées de la notion de multiple sont plus élevées par rapport à deux expressions : « être divisible par » et « être diviseur de ». Ceci confirme l'hypothèse faite lors de l'analyse a priori selon laquelle les élèves lorsqu'ils tentent de reformuler les expressions, ils se trompent avec l'expression « être multiple de » et ils donnent une reformulation correcte pour « être divisible par » et « être diviseur de ».

Avant de présenter les réponses des élèves, nous rappelons que nous avons distingué dans l'analyse a priori les aspects suivants pour analyser les réponses :

- *Aspect opératoire / prédicative*.
- *Relation/ propriété.*
- *A quel concept renvoie la définition produite*.
- *Type de définition (Dénomination, équivalente, par exemple, …)*
- *Langage mathématique/ langage courant*.

Nous avons aussi distingué 4 définitions possibles pour définir les trois premières expressions :

D1 (définition avec la relation a = b c) ; D2 (définition à partir de la division euclidienne) ; D3 (définition donnant une notion à partir de l'autre : multiple/ diviseur ou multiple/divisible) ; D4 (définition par exemple). Nous avons souligné que les réponses correctes complètes sont regroupées dans C1, et les réponses correctes non complètes (acceptables) sont classées dans C2. Les réponses des élèves concernant la définition de « être divisible par » sont présentées dans le tableau suivant :

DVL		Définition	Opératoire / Prédicative	Relation /Propriété /objet	Quel Concept/ opération renvoi	Type de définition	Langage	Fréquence
C1	D1	Si on multiplie deux nombres entiers entre eux, le résultat de la multiplication est divisible par chacun de deux facteurs.	Opératoire	Relation	Multiplication	-----	Courant	1
	D3	Signifie qu'un entier naturel a est divisible par un entier naturel b signifie que b est un diviseur de a.	Prédicative	Relation	Divisible / Diviseur	Equivalente	Maths	1
C2	D1	1 : a est divisible par b, a : b = q	Prédicative	Relation	Division	Dénomination	Maths	1
		2 : c = a × b où c est divisible par a ou b	Prédicative	Relation	Multiplication	Dénomination	Maths	1
		3 : a est divisible par b car $\frac{a}{b} \in$ Z.	Prédicative	Relation	Division	Dénomination	Maths	4
		4: C'est un nombre qui se divise par un autre nombre et dont le résultat un entier.	Prédicative	Relation Implicite	Division	------	Courant	17
		5 : Lorsqu'un nombre est divisible par un autre, cela signifie que le premier nombre contient plusieurs fois le second.	Prédicative	Relation	Multiple	Dénomination	Courant	3
	D2	1 : Dans le cas où a = b × c , a est divisible par b car a ÷ b = c	Opératoire	Relation	Division euclidienne	Dénomination	Maths	1
		2: Lorsqu'un nombre est divisible par un autre c'est que le résultat de la division est un entier et le reste égale à Zéro.	Prédicative	Relation	Division euclidienne	Dénomination	Courant	1
	D3	a est divisible par B,	Prédicative	Relation	Divisible /	Equivalent	Maths	1

		donc a est multiple de B.			Multiple	e		
	D4	**Cas n°1** *Faire de même dans la suite du tableau* 6 = 3 × 2 6 est divisible par 3 et 2.	Opératoire	Relation	Décomposition multiplicative	Par exemple	Maths	3
		Cas n°2 6 est divisible par 3.	Opératoire	Propriété	Critères de divisibilité	Par exemple	Maths	10
		Cas n°3 6 est divisible par 3, 6 ÷ 3 = 2	Opératoire	Relation	Division	Par exemple	Maths	2
RM	F1	1 : Soit a et b deux nombres (≠0) a est divisible par b signifie $\frac{a}{b}$ = R	Prédicative	Relation	Division	Dénomination	Maths	2
		2 : Un nombre x est divisible par un autre y quand $\frac{x}{y}$ donne un autre relatif entier.	Prédicative	Relation	Division	Dénomination	Maths	2
		3 : peut être partagé en plusieurs parties égales.	Opératoire	Propriété	Division	------	Courant	12
		4 : Pouvoir être séparée en différentes parties égales.	Opératoire	Propriété	Division	------	Courant	4
		5 :Il est possible de trancher un nombre par un autre, le résultat étant entier.	Prédicative	Relation	Division	-------	Courant	1
		6: un nombre divisible par un autre quand le quotient est un entier.	Prédicative	Relation Implicite	Division	------	Courant	12
		7 : On peut diviser un nombre par un autre en faisant une fraction.	Opératoire	--------	Fraction	------	Courant	1
		8 : C'est que le nombre soit sans virgule quand il est divisible par ce nombre.	Prédicative	-----	-----	------	Courant	1
		9 : c'est une division	Prédicative	--------	Division	-----	Courant	3
		10 : C'est la possibilité d'être diminué un certain nombre de fois par un diviseur sans être un nombre final avec un nombre infini de	Prédicative	Propriété	Division	-----	Courant	1

		chiffre après la virgule.						
		11 : C'est lorsqu'un nb divise peu un autre nombre, donne un résultat entier.	Prédicative	Relation	Divisibilité	-------	Courant	4
		12 : On cherche le nombre qui divise le nombre à divisé faisant le nombre que l'on souhaiter.	Opératoire	---------	Divisibilité	--------	Courant	1
	F2	Un nombre est divisible par x quand le reste égale 0.	Prédicative	Relation	Division euclidienne	Dénomination	Courant	1
	F3	un nombre est divisible par un autre s'il est multiple du diviseur.	Prédicative	Relation	Divisible / Diviseur	Equivalente	Courant	3
	RM	Il peut être divisé par un autre nombre.	Prédicative	Propriété	Division	-----	Courant	67
		Que l'on peut diviser par..	Prédicative	Propriété	Division	-----	Courant	

Tableau 1 : la réponse des élèves à la question « être divisible par »

Les 46 élèves ayant donné une réponse correcte à l'expression « être divisible par » ont proposé les définitions D1, D2, D3, D4.

La définition D1 est la plus mobilisée (27 élèves sur 46). La plupart des définitions de type D1 proposées par les élèves sont en termes de division (22 élèves), alors que la définition qui renvoie au concept de multiple n'est présente que chez 3 élèves, et à la multiplication (2 élèves). Ceci montre que les élèves comprennent l'expression « être divisible par » en termes de division.

Seulement deux élèves ont donné D3 (divisible/diviseur (1réponse) ; divisible/multiple (1réponse)). Nous pouvons faire l'hypothèse que le lien entre les trois expressions de la divisibilité n'est pas évident pour les élèves. Cette hypothèse sera confortée par l'analyse des deux autres expressions « être multiple de » et « être diviseur de ».

15 élèves ont utilisé la définition D4 ; nous avons fait l'hypothèse que ceci traduit une difficulté langagière ; on peut se demander si le fait que cette définition concerne les entiers est perçu par ces élèves qui donnent une définition par l'exemple.

Nous constatons que les définitions opératoires sont assez présentes chez les 46 élèves ayant donné un réponse correcte : 17 élèves ont défini l'expression « être divisible par » sous une forme opératoire, tandis que contre 29 élèves ont proposé la définition sous une forme prédicative. Les définitions en langage mathématique et en langage courant sont presque équitables. 24 élèves ont défini en langage mathématique contre 22 élèves ont formulé la définition en langage courant.

Notons que la plupart des élèves ayant donné une réponse que nous avons considérée correcte ont explicité les relations entre les entiers dans leur définition. Tandis que 10 élèves ont donné la définition

Quant au type de définition, nous trouvons trois types de définitions pour la moitié des élèves ayant donné une réponse correcte : définition de dénomination (11 réponses) ; définition équivalente (2 réponses) et définition par exemple (15 réponses). Le reste des élèves ont verbalisé leur expression sans donner le nom au défini.

En ce qui concerne les élèves ayant donné une réponse erronée (48 réponses), nous synthétisons les réponses les plus fréquentes chez les élèves :

- Expliquer la divisibilité en utilisant le sens « Partager, séparer, trancher, …).

  (F1-3 ; F1-4 ; F1-5 ; F1-10) (18 réponses). Ceci met en évidence que ces élèves comprennent la divisibilité en termes de division, et ont tendance à donner une définition langagière de la division plutôt que de donner une définition mathématique.

- Concentrer dans la définition sur le fait que le quotient est entier (F1-6 ; F1-11) (16 rép).

- Expliquer l'expression « être divisible par » avec les nombres réels et avec des expressions littérales (x, y). (F1-1 ; F1-2 ; F1-8 ; F2-1 : 6 rép). Ceci montre que ces élèves ont du mal à comprendre que la divisibilité concerne uniquement les entiers.

Pour les élèves ayant donné une réponse de reformulation, 67 élèves ont transformé l'expression « être divisible par » par la forme « Pouvoir être divisé par ». Nous avions prévu ceci dans l'analyse *a priori* en lien avec la transformation des relations en propriétés. Nous présentons dans le tableau ci-dessous, les réponses des élèves à la question concernant l'expression « être multiple de ».

<table>
<tr><th colspan="2">MUL</th><th>Définition</th><th>Opératoire / Prédicative / Objet</th><th>Relation / Propriété</th><th>Quel concept renvoi</th><th>Type de définition</th><th>Langage</th><th>Fréquence</th></tr>
<tr><td rowspan="2">C1</td><td rowspan="2">D1</td><td>1 : On dit qu'un nombre a est un multiple d'un nombre entier b s'il existe un entier c tel que :
$a = b \times c$</td><td>Prédicative</td><td>Relation</td><td>Multiple</td><td>Dénomination</td><td>Maths</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2 : Si on multiplie deux nombres entiers entre eux, le résultat est un multiple de chacun de ces nombres.</td><td>Opératoire</td><td>Relation</td><td>Multiplication</td><td>--------</td><td>Courant</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="10">C2</td><td rowspan="6">D1</td><td>1 : $a \times b = c$
c est multiple de a</td><td>Prédicative</td><td>Relation</td><td>Multiple</td><td>-----</td><td>Maths</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2 : un nombre qui comprend plusieurs fois un autre nombre ex 9 est un multiple de 3.</td><td>Prédicative</td><td>Relation</td><td>Multiple</td><td>-------</td><td>Courant</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3 : Signifie qu'un nombre résultat est le multiple de deux nombres qui se multiple.</td><td>Prédicative</td><td>Relation</td><td>Multiplication</td><td>--------</td><td>Courant</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4 : Multiple d'un nombre est un entier produit de l'additionner successive d'un même nombre.</td><td>Opératoire</td><td>Propriété</td><td>Addition</td><td>Dénomination</td><td>Courant</td><td>5</td></tr>
<tr><td>5 : Lorsque l'on multiplie deux nombres entre eux le résultat est multiple de ces 2 nombres.</td><td>Opératoire</td><td>Relation</td><td>Multiplication</td><td>--------</td><td>Courant</td><td>5</td></tr>
<tr><td>6 : c'est un nombre qui peut être divisé par un autre nombre résultant un nombre entier.</td><td>Prédicative</td><td>Relation Implicite</td><td>Division</td><td>----------</td><td>Courant</td><td>4</td></tr>
<tr><td>D2</td><td>1 : Un nombre est multiple d'un autre nombre s'il contient un certain nombre de fois sans qu'il ait un reste.</td><td>Prédicative</td><td>Propriété</td><td>Division euclidienne</td><td>Dénomination</td><td>Courant</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">D3</td><td>1 :C'est le résultat d'une multiplication, qui est donc divisible.</td><td>Prédicative</td><td>Relation</td><td>Multiple / divisible</td><td>Equivalent</td><td>Courant</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2 : a est divisible par b, donc a est multiple de b.</td><td>Prédicative</td><td>Relation</td><td>Multiple / divisible</td><td>Equivalent</td><td>Courant</td><td>5</td></tr>
<tr><td>D4</td><td>1: 6, 12, 24, 36, 60 les multiples de 6.</td><td>Opératoire</td><td>Propriété</td><td>L'ensemble des multiples d'un nombre</td><td>Par exemple</td><td></td><td>4</td></tr>
</table>

		2: 12 est multiple de 2 car 2 × 6 = 12	Prédicative	Relation	Décompositio n multiplicative	Par exemple	------	7
		3: 25 est un multiple de 5.	Opératoire	Propriété	Critères de divisibilité	Par exemple	------	5
F	F1	1 : a est multiple de b si b × x = a.	Prédicative	Relation	Multiple	Dénomin ation	Maths	4
		2 : R x = y Y est un multiple de x	Prédicative	Relation	Multiple	---------	Courant	4
		3 : c'est un nombre qui figure dans la table de multiplication d'un autre nombre.	Prédicative	Propriété	Multiplication	--------------	Courant	19
		4 : Ce même nombre multipliés par lui-même donne le résultat ex : 2 multiple de 4 car 2 × 2 = 4	Prédicative	Propriété	Multiplication	-----------	Courant	1
		5 : Un nombre pouvant être divisé par un même nombre même lorsqu'il est multiplié plusieurs fois. Ex : 2 multiple 2 2 × 2 = 4, 4 multiples de 2.	Prédicative	Relation Implicite	Division	----------	Courant	1
		6 : C'est un nombre entier qu'on peut multiplier par d'autres nombres et on obtient en entiers.	Opératoire	Objet	Multiplication	----------	Courant	3
		7 : C'est le fait d'être un nombre qui peut être contenu par un multiple.	Prédicative	Propriété	Multiplication	---------	Courant	1
		8 : C'est quand un nombre fait partie d'un ensemble par exemple 123 est un multiple de 3 car 1 + 2 + 3 =6 et 6 : 2 = 3.	Opératoire	Propriété	Critères de divisibilité	------	Courant	1
		9 : Multiple de 7 par exemple est quand il peut être multiplié par 7 et diviser par 7 en donnant un nombre entier.	Opératoire	Propriété	Fraction égales	---------	Courant	1
		10 : être le résultat d'une multiplication par.	Objet	-----	Multiplication	-----------	Courant	2
		11: C'est une multiplication	Objet	----	Multiplication	--------	Courant	3
		12: Un nombre est multiple d'un autre quand le produit est entier.	Opératoire	-----		--------	Courant	5
		13 : Il multiplie un autre	Prédicative	--------	Multiplication	-----	Courant	9

		nombre.						
		14 : Nombre multiplié par un nombre premier	-------	----------	Multiplication	----	Courant	1
		15 : nombre ayant un multiple.	-------	Propriété	Multiple	------	Courant	1
	F3	1 : il est le multiple du diviseur.	Prédicative	Relation	Multiple / diviseur	------	Courant	1
		2 : Etre divisible par l'inverse.	Prédicative	Relation		------	Courant	1
		3 : Un nombre est multiple de x lorsqu'il est divisible par x (voir au-dessus).	Prédicative	Relation	Multiple / divisible	Equivalente	Courant	1
	F4	1 : Les nombres qui multiplient forme le nombre de départ ex : 6 = 2 × 3 ; 2 et 3 multiples	Opératoire	Relation	Décomposition multiplicative	-----	Courant	1
		2 : 2 est multiple de 8 : 8 × 2=16	Prédicative	Relation	Multiple	Par exemple	Courant	2
RM	1	Multiplier un nombre par un autre.	Opératoire	--------		----	Courant	40
	2	Un nombre qui peut être multiplié par un autre nombre	Prédicative	Propriété		------	Courant	
	3	que l'on peut multiplier par	Prédicative	Propriété		--------	Courant	
	4	Qui peut être multiplié d'un autre nombre et donne un nombre entier.	Prédicative	Propriété		-------	Courant	

Tableau 2 : la réponse des élèves relative « être multiple de »

50 élèves ont défini correctement l'expression « être multiple de » en utilisant les définitions D1, D2, D3, D4.

La définition D1 est la plus mobilisée (27 élèves sur 50). La définition D1 reproduite renvoie au concept de multiple (11 réponses), ou à la multiplication (7 réponses). Mais cette définition est vue chez certains élèves en termes de division (4 élèves) ou d'addition (5 réponses), ce qui donne lieu à une définition opératoire chez ces élèves.

Un seul élève a donné D2, et 6 élèves ont mobilisé D3, ceci montre que peu d'élèves font le lien avec la relation de divisibilité.

La définition D4 prend une place assez importante chez les élèves lorsqu'ils ont du mal à utiliser la forme prédicative. Nous trouvons 16 élèves ayant donné D4.

Les définitions opératoires sont aussi présentes chez les élèves pour expliquer la notion de multiple. 20 élèves ont donné une définition opératoire contre 30 élèves qui ont utilisé la forme prédicative. Par contre, les définitions en langage mathématique sont peu présentes chez les élèves. Seulement 9 élèves ont défini en langage mathématique contre 41 élèves qui ont donné une expression en langage courant. Ce nombre élevé de réponses en langage courant montre la difficulté pour certains élèves à expliquer la notion de multiple.

Notons enfin que la plupart des élèves ayant donné une réponse que nous avons considérée comme correcte ont explicité les relations entre les entiers dans leur définition.

La définition de dénomination n'est pas présente chez la plupart des élèves, car ils ont verbalisé leur définition en langage courant sans donner le nom au défini.

En ce qui concerne les élèves ayant donné une réponse erronée (62 réponses), nous constatons que les réponses erronées pour définir la notion de multiple est en nombre plus élevé par rapport aux deux expressions « être divisible par » et « être diviseur de ». Nous donnons ci-après les réponses les plus fréquentes chez les élèves :

- Expliquer la notion de multiple en se référant à la table de multiplication (24 réponses). Ceci correspond à une définition de type « propriété ».
- Confusion dans la compréhension de la relation de divisibilité. (14 réponses). Les élèves confondent multiple et diviseur. Les élèves ici cherchent à expliquer le sens de multiple en montrant qu'elle multiplie un autre nombre. Ceci induit une mauvaise compréhension de la relation de divisibilité. Nous pensons que l'aspect propriété/relation est un enjeu important, qui peut expliquer cette confusion chez les élèves.
- Expliquer l'expression « être multiple de » avec des expressions littérale (x, y). (8 réponses).

Pour les élèves ayant donné une réponse de reformulation, 37 élèves ont transformé l'expression «Etre multiple de » sous la forme « Pouvoir être multiplié », ceci renforce l'hypothèse selon laquelle les élèves ont une tendance forte.

Nous allons présenter, dans le tableau ci-dessous, les réponses des élèves à la question concernant l'expression « être diviseur de ».

DVR		Définition	Opératoire / Prédicative / Objet	Relation / Propriété	Quel Concept/ (Opération) renvoi	Type de définition	Langage	Fréquence
C1	**D1**	1 : a × b = c avec $c \in Z$ alors a et b sont des diviseurs de c.	Prédicative	Relation	Multiplication	Dénomination	Maths	1
		2 : Si on multiplie deux nombres entiers entre eux, alors ils sont chacun un diviseur du résultat de la multiplication.	Prédicative	Relation	Multiplication	----------	Courant	1
	D3	Si a est un multiple de b alors b (pas nue) est un diviseur de a.	Prédicative	Relation	Multiple/ Diviseur	Equivalente	Maths	4
C2	**D1**	1 : a = b c ; b ou c est le diviseur de a.	Prédicative	Relation	Multiplication	Dénomination	Courant	2
		2 : b est diviseur de a signifie que a : b = q	Prédicative	Relation	Division	Dénomination	Maths	1
		3 : a et b deux nombres, b étant non nul, quand on divise a par b, le nombre b est le diviseur.	Prédicative	Relation	Divisibilité	Dénomination	Courant	1
		4: C'est un nombre qui diviser un autre en donnant un nombre entier.	Prédicative	Relation Implicite	Divisibilité	-------	Courant	22
		5: Un nombre est diviseur d'un autre lorsqu' il est contenu plusieurs fois dans l'autre.	Prédicative	Relation	Multiple	Dénomination	Courant	1
		6: Cela correspond à un nombre qui se trouve un nombre de fois précis dans la quantité d'un autre nombre.	Prédicative	Relation	Multiple	-------	Courant	1
	D2	1 : le diviseur d'un nombre est le nombre que contient le divisé sans qu'il ait un reste.	Prédicative	Relation implicite	Division euclidienne	----------	Courant	1
		2 : un nombre est diviseur d'un autre lorsque le reste de la division est égale à 0.	Prédicative	Relation	Division euclidienne	-----------	Courant	1
	D4	1 : 3 est diviseur de 9.	Opératoire	Propriété	Critères de divisibilité	Par exemple	Courant	7
		2: 8 ÷ 2 = 4 2 est le diviseur de 4.	Opératoire	Relation	Décomposition	Par exemple	Courant	2

					multiplicative			
		3 : 6 = 3 × 2 ; 3 et 2 diviseur de 6	Prédicative	Relation	Décomposition multiplicative	Par exemple	Maths	2
F	F1	1 : a et b deux nombres, a divise b le résultat signifie $\frac{a}{b}$ = R.	Prédicative	Relation	Division	Dénomination	Courant	4
		2 : Un nombre x est diviseur d'un autre y quand $\frac{y}{x}$ = k avec k relatif entier.	Prédicative	Relation	Division	Dénomination	Courant	2
		3 : $\frac{a}{b}$ = c b est le diviseur de c.	Prédicative	Relation	Division	Dénomination	Courant	1
		4 : a et b sont deux chiffre a est diviseur de b si $\frac{a}{b}$ est entier	Prédicative	Relation	Division	Dénomination	Courant	1
		5 : un nombre utilisé pour partager un autre nombre	Prédicative	Relation Implicite	Division	----------	Courant	3
		6 : le diviseur est le dénominateur d'une fraction.	Prédicative	Relation	Fraction	Dénomination	Courant	2
		7 : être le résultât d'une division.	Objet	Propriété	Division	-----------	Courant	2
		8 : Plus grand nombre dans la table du chiffre ou nombre à divisé mais plus petit que le chiffre/nb à diviser.	Prédicative	Propriété	Division	---------	Courant	2
		9 : « être diviseur de » signifie un nombre ou un chiffre « x » qui peut être dans la division pour obtenir la valeur « n ».	Prédicative	Relation	Division	Dénomination	Courant	1
		10 : Le nombre diviseur est un nombre par lequel le résultat sera un entier.	Prédicative	Propriété	Diviseur	----------	Courant	1
		11 : C'est un nombre qui a plusieurs nombre avec lesquelles on peut diviser	Prédicative	Propriété	Divisibilité	------------	Courant	2
	F2	Le diviseur d'un nombre x est un nombre qui divise x sans laisser	Prédicative	Propriété	Division euclidienne	Dénomination	Courant	1

		de reste.						
	F3	1 : Un nombre est un diviseur de l’autre s’il est divisible par ce nombre.	Prédicative	Relation	Multiple / diviseur	Equivalente	Courant	2
		2 : Chiffre qui divise un multiple.	---------	----	Divisibilité	-----	Courant	1
	F4	2 : 8 ÷ 2 = 4 2 est le diviseur de 4.	------	Relation	Division	Par exemple	Courant	1
RM	1	Un nombre qui divise un autre nombre.	Prédicative	Relation Implicite			Courant	53
	2	Le nombre peut diviser un nombre.	Prédicative	Relation Implicite				

Tableau 3 : la réponse des élèves relative « être diviseur de »

Les définitions D1, D2, D3, D4 sont mobilisées correctement par 47 élèves pour définir l’expression « être diviseur de ».

Parmi les 30 élèves ayant utilisé la définition D1, 23 élèves ont exprimé leur définition en termes de divisibilité, et un seul élève l’a donnée en termes de division. Mais elle est vue chez certains élèves en termes de multiplication (4 réponses), et renvoie au concept de multiple (2 réponses).

Deux élèves ont donné D2, et 4 élèves ont mobilisé D3, ceci montre que peu des élèves font le lien avec la relation de divisibilité.

La définition D4 prend une place dans la définition des élèves : nous trouvons 11 élèves ont donné D4.

Les définitions opératoires sont peu présentes chez les élèves pour expliquer la notion de diviseur. 9 élèves ont donné une définition opératoire contre 38 élèves qui utilisent la forme prédicative. Par contre, les définitions en langage mathématique sont peu présentes chez les élèves. Seulement 8 élèves ont défini en langage mathématique contre 39 élèves ont interprété l’expression en langage courant. Ce nombre élevé des réponses en langage courant montre la difficulté chez les élèves d’expliquer la notion de diviseur.

Notons enfin que la relation entre les entiers est explicitée chez la plupart des élèves ayant donné une réponse correcte de la définition de diviseur.

La définition de dénomination n’est pas présente chez la plupart des élèves, car ils ont verbalisé leur définition en langage courant sans donner le nom au défini.

En ce qui concerne les élèves ayant donné une réponse erronée (26 réponses), nous constatons que les élèves ont fait moins de faute avec la définition de diviseur par rapport aux deux expressions précédentes. Nous donnons ci-après les réponses les plus fréquentes chez les élèves :

- Expliquer la notion de diviseur en utilisant le sens « Partager ». (3 réponses).
- Expliquer l'expression « être diviseur de » avec les nombres réels et avec des expressions littérale (x, y). (6 réponses). Ceci montre que ces élèves n'ont pas la familiarité avec les entiers.
- Confusion dans la compréhension de la relation de divisibilité. (2 réponses) Les élèves confondent multiple et diviseur.

Pour les élèves ayant donné une réponse de reformulation, 45 élèves ont transformé l'expression «Etre diviseur de » par la forme « Pouvoir diviser ».

Le tableau ci-dessous synthétise les définitions utilisées par les élèves ayant donné une réponse que nous avons considérée comme correcte pour les trois expressions :

Définition	D1	D2	D3	D4	Total
Etre divisible par	27	2	2	15	46
Etre multiple de	27	1	6	16	50
Etre diviseur de	30	2	4	11	47

Nous constatons la quasi-absence des définitions D2, ceci montre que le lien entre relation de divisibilité et division euclidienne n'est pas évident chez les élèves.

Il est remarquable aussi que D3 soit très peu présente chez les élèves. Ceci vérifie l'hypothèse selon laquelle la relation entre les expressions « Etre divisible par », « Etre multiple de » et « Etre diviseur de » n'est pas assez établie chez les élèves.

PGCD et PPCM

Le tableau suivant synthétise l'ensemble des données des réponses des élèves à la question de PGCD en distinguant quatre catégories de réponses : correcte, fausse, reformulation, non répondu. Nous rappelons que la réponse de reformulation est de reformuler le pgcd par « le plus grand diviseur commun ».

PGCD	Correcte	Fausse	Reformulation	Non répondu	Total
Fréquence	22	50	74	39	186
Fréquence	12 %	27 %	40 %	21 %	100 %

21% n'ont pas répondu à cette question.

40 % des élèves ont défini le pgcd par « le plus grand diviseur commun » en donnant la réponse de reformulation. Ceci confirme l'hypothèse que nous avons faite lors de l'analyse a priori, selon laquelle certains élèves proposent la définition de reformulation

Très peu d'élèves (12 %) ont réussi à définir correctement le PGCD.

Avant de présenter les définitions proposées par les élèves, nous rappelons que nous avons distingué les définitions suivantes :

D1 : elle permet de montrer l'aspect existence du pgcd.

D2 : elle définit le pgcd comme le plus grand entier des diviseurs communs de deux entiers.

D3 : elle est proposée sous deux conditions : *i)* $d | a$ *et* $d | b$; *ii) si* $c | a$ *et* $c | b$, *alors* $c \leq d$

Elle peut être représentée par la forme : Le plus grand entier naturel qui divise simultanément ces deux entiers

D4 : elle est proposée par l'intersection $D(a) \cap D(b)$.

D5 : elle définit le pgcd à partir de la décomposition en facteurs premiers.

Les réponses correctes complètes sont regroupées dans C1, les réponses correctes non complètes (acceptables) dans C2. Le tableau ci-dessous présente la réponse des élèves ayant répondu à cette question :

PGCD		Définition	Opératoire / Prédicative	Relation / Propriété	Quel concept renvoi	Type de définition	Langage	Fréquence
C1	**D1**	-------------	------	----	-----	----	---	0
	D2	------	------	------	------	------	------	0
	D3	1 : Etre le plus grand diviseur commun : c'est le plus grand entier naturel qui divise simultanément ces deux nombres.	Prédicative	Relation	Divisibilité	Dénomination	Maths	2
		2 : le pgcd est le plus grand commun au dénominateur, c'est le nombre entier le plus grand par lequel deux nombres (différents) sont divisibles.	Prédicative	Propriété	Divisibilité	Dénomination	Courant	2
C2	**D1**	---------------	----	----	----	----	----	0
	D2	1 : c'est le plus grand diviseur que deux nombres ont en commun.	Prédicative	Relation	Diviseur	-----	Courant	4
	D3	1 : C'est le plus grand nombre qui divise deux nombres.	Prédicative	Relation	Divisibilité	-----	Maths	3
		2 : C'est le plus grand nombre par lequel on peut diviser 2 nombres.	Prédicative	Relation Implicite	Divisibilité	-----	Courant	11
F	**1**	C'est le plus grand dénominateur commun de deux nombres.	Opératoire	Relation	Fraction	--------	Courant	19
	2	tous les réels divisibles de ce nombre.	Prédicative	Propriété	Ensemble des nombres	----------	Courant	1
	3	Le plus grand nombre par lequel on peut diviser un nombre tout en ayant un résultat entier.	Prédicative	Propriété	Divisibilité	-----------	courant	5
	4	Etre le plus grand diviseur commun d'un nombre.	Prédicative	Propriété	Diviseur	------	Courant	8
	5	Signifie que deux nombres ont un multiple commun.	Prédicative	Relation	Multiple commun	Dénomination	Courant	2
	6	Etre le plus grand diviseur commun : le nombre qui est	Prédicative	Relation	Multiple commun	Dénomination	Courant	2

		multiple de deux nombres.						
	7	Le plus grand diviseur commun donc que si on multiplie par ce nombre, le nombre divisé est après irréductible.	Opératoire	Relation	Multiplication & Fraction	Dénomination	Courant	3
	8	12 est le pgcd de 162 et 72.	Opératoire	Relation	----	Par exemple	-----	2
	9	cela signifie « plus grand diviseur commun » ; c'est-à-dire le plus grand par lequel la division donnera un entier.	Prédicative	Propriété	Division	Dénomination	Courant	2
	10	Le pgcd ou plus grand commun diviseur c'est le plus grand nombre par lequel deux chiffre peuvent être diviseur	Prédicative	Propriété	Diviseur	Dénomination	Courant	1
	11	Le PGCD est le plus grand commun diviseur, c'est-à-dire que le PGCD de deux nombres est le diviseur le plus proche de 0 de ces mêmes nombres.	-----	Propriété	---	Dénomination	Courant	1
	12	« Etre le pgcd de » veut dire plus grand diviseur commun. Il sert à diviser plusieurs 1nombres par un seul diviseur commun.	------	Propriété	Division	Dénomination	Courant	1
	13	Nombre premier entre eux.	-----	---	Nombres premiers entre eux.	----	--	1
	14	Le plus petit quotient de	------	----	Division	-----	---	2
RM	1	Etre le plus grand diviseur commun de deux nombres.				--------		74
	2	Etre le diviseur commun				------------		
	3	Etre le plus grand diviseur de				-------------		
	4	Plus diviseur commun				------------		
	5	Pouvoir diviser par				------------		
	6	Plus grand diviseur commun						

Tableau 4 : la réponse des élèves relative à la définition du PGCD

4 élèves seulement ont explicité que le PGCD est relatif aux entiers, ce qui laisse penser que les élèves n'ont pas de familiarité avec les entiers.

Nous remarquons la quasi-absence d'une définition complète de PGCD en langage mathématique. Tous les élèves ayant donné une réponse correcte ont expliqué le PGCD en langage courant, et la définition D1, relative à l'aspect existence, est absente chez les élèves.

Comme nous l'avions prévu, les définitions D4 et D5 n'apparaissent pas dans la réponse des élèves. Par contre, l'hypothèse que nous avons faite selon laquelle l'ordre naturel serait présent dans la définition de PGCD n'est pas vérifiée. Ceci est aussi en contradiction avec ce que nous avons trouvé chez les enseignants (les enseignants ont explicité dans leur définition du PGCD l'ordre naturel au détriment de l'ordre divisibilité).

En fait, la définition D2 en référence à l'ordre naturel est très peu présente dans les réponses des élèves (4 réponses), alors que la définition D3, relative à l'ordre divisibilité, est plus présente chez les élèves. Ceci peut être expliqué par le fait que les élèves tentent d'interpréter le PGCD en termes de divisibilité qui explicite l'ordre divisibilité. Par contre, l'accent est mis dans la réponse des élèves sur l'aspect propriété au détriment des relations entre les entiers. Voici un exemple de définition d'un élève :

« C'est le plus grand nombre par lequel on peut diviser 2 nombres »

Nous soulignons ici que le langage utilisé joue un rôle très important dans le jeu entre propriété et relation.

Il est remarquable que la définition opératoire du PGCD soit absente dans la réponse des élèves. Nous faisons l'hypothèse que les élèves ne mettent pas en place la définition du PGCD pour calculer le PGCD. Le type de définition vivant chez certains élèves est la définition de dénomination.

En ce qui concerne les réponses erronées, nous synthétisons les réponses les plus fréquentes chez les élèves :

- Elèves ayant associé le pgcd dans le travail des fractions. (22 fois). F1 + F7
- Elève ayant défini le PGCD d'un nombre. (13 fois).F3 + F4.
- Confusion entre le diviseur commun et le multiple commun (4 réponses)

En fait, le PGCD est exclusivement utilisé dans les manuels pour les fractions irréductibles, ce qui pourrait expliquer le fait que 19 élèves ont associé explicitement le PGCD aux les fractions.

« C'est le plus grand dénominateur commun de deux nombres ».

Huit élèves ont donné la définition du PGCD en faisant référence à un seul nombre de la manière suivante : *« Etre le plus grand diviseur commun d'un nombre »*. Ceci peut être mis en relation avec la tendance forte à expliquer le PGCD en termes de propriété.

Définition du ppcm

Nous présentons l'ensemble des réponses des élèves pour la définition du ppcm dans le tableau suivant :

Réponses	Correcte	Fausse	Reformulation	Non répondu	Total
Fréquence	8	31	35	112	186
Fréquence	4 %	17 %	19 %	60 %	100 %

Pour cette question, le pourcentage d'élèves n'ayant pas répondu à la question est très élevé (60%). tandis que le pourcentage de réponses correctes est très faible (4%). Ceci met en évidence que le concept de PPCM n'est pas établi pour la plupart des élèves. Ce qui vérifie notre hypothèse faite dans l'analyse *a priori*. Les définitions proposées par les élèves ayant correctement répondu sont de type reformulation : « le plus petit multiple commun ».

Nous présentons dans le tableau ci-dessous une analyse des réponses des élèves ayant répondu à cette question :

Ppcm		Définition	Opératoire / Prédicative	Relation / propriété	Quel concept renvoi	Type de définition	Langage	Fréquence
C 1	D1	----------------	------	------	--------	-------	-------	0
	D2	Signifie que c'est le plus petit entier à être le multiple de ces deux nombres.	Prédicative	Relation	Multiple commun	--------	Courant	2
		Le plus petit multiple commun de deux nombres entiers naturels est leur plus petit multiple commun.	Prédicative	Relation	Multiple commun	Dénomination	Maths	2
C 2	D1	---------------	-----	-------	----------	--------	------	0
	D2	1: c'est le plus petit multiple que 2 nombres ont en commun	Prédicative	Relation	Multiple commun	-------	Courant	2
		2 : C'est être le plus petit multiple commun donc le multiple le plus petit entre plusieurs nombre	Prédicative	Relation	Multiple commun	----------	Courant	1
		3 : Il s'agit du plus petit nombre par lequel on doit multiplier des fractions pour qu'elles aient le même dénominateur diviser deux nombres (plus petit multiple commun)	Opératoire	Relation	Fraction	---------	Courant	1
F	1	C'est le plus petit diviseur commun entre deux nombres.	Prédicative	Relation	diviseur commun	---------	Courant	13
	2	Le PPCM de deux nombres ou plusieurs nombres est le plus petit entier divisible sans reste par ces 2 nombres.	Prédicative	Relation	Divisibilité	---------	Courant	1
	3	C'est être le plus petit nombre commun à plusieurs autres, par lequel on peut multiplier ces nombres.	Opératoire	Relation Implicite	Fractions	---------	Courant	4
	4	Etre le plus petit multiple commun d'un nombre.	Prédicative	Propriété	Multiple	---------	Courant	3
	5	Etre le plus petit commun multiplicateur.	Prédicative	---	Multiple	------	Courant	3
	6	C'est le plus petit des dénominateurs multiples communs de deux réels.	Prédicative	------			Courant	1
	7	Le plus petit nombre qui	Prédicative		Diviseur		Couran	1

		peut diviser.					t	
	8	Le ppcm de deux nombres x et y est le + petit nombre z multiple commun à x et y.	Prédicative		Multiple		Couran t	1
	9	3 est le PPCM de 72 ET 132.			-----		---------	2
	10	Ex : 6 = 2 × 3 ; 2 = ppcm de 6	Prédicative	Relation	Décomposit ion multiplicati on	Par exemple	------	2
	1	Le plus petit multiple commun.	Prédicative				----	
	2	Plus petit multiple commun de deux nombres.					-------	

Tableau 5 : la réponse des élèves relative à la définition du PPCM

Nous remarquons l'absence d'une définition complète du PPCM en langage mathématique. La définition D2 était la seule présente dans les réponses des élèves.

En ce qui concerne les réponses erronées chez les élèves, nous donnons ci-après les plus fréquentes :

- Confusion avec le PGCD (F1 :13 réponses).
- Problème langagiers (F3 ; F5 ; F7 : 8 réponses) : la réponse erronée est produite lorsque les élèves tentent d'exprimer le PPCM sous forme langagière.
- Associer le PPCM à un seul nombre (F4 : 3 réponses).

Pour les élèves ayant donné répondu par reformulation, 35 élèves ont défini le PPCM par le plus petit multiple commun.

Nombres premiers et nombres non premiers

Nous présentons dans le tableau ci-contre la réponse des élèves concernant la définition des nombres premiers et des nombres non premiers :

	Nombres premiers		Nombres non premiers	
Réponse	Effectif	Pourcentage	Effectif	Pourcentage
Correcte	105	57%	92	50 %
Fausse	62	33%	60	32 %
Non répondu	19	10 %	34	18 %
Total	186	100 %	186	100 %

Les réponses correctes pour la définition des nombres premiers représentent 59% des réponses, ce qui est un nombre important.

Nous allons analyser la réponse des élèves ayant répondu à cette question suivant les éléments évoqués dans l'analyse a priori, nous regroupons les réponses en trois catégories : réponses correctes C1 (réponse correcte complète) et C2 (réponse correcte non complète) et réponses fausses.

Nous avons distingué pour C2 trois types de réponses : C2-1, C2-2, C2-3.

C2-1 : il s'agit de réponses correctes non complètes montrant les différentes formes langagières utilisées par les élèves pour expliquer la notion de nombre premier.

C2-2 : il s'agit des réponses acceptables.

C2- 3 : il s'agit d'un exemple.

.

NP		Définition	Opératoire / Prédicative	Quel concept renvoi	Type de définition	Langage	Fréquence
C1		1. un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs (qui sont alors1 et lui-même).	Prédicative	Diviseur	Dénomination	Maths	1
C2	**C2 – 1**	1.1Qui n'a pour diviseur que 1 et lui-même.	Prédicative	Diviseur	--------	Courant	13
		1.2 : un nombre qui n'est divisible que par 1 et lui-même.	Prédicative	Divisibilité	--------	Maths	44
		1.3 : Il ne *peut être divisé* que par 1 et lui-même.	Prédicative	Divisibilité	---------	Courant	9
		1.4 : Un nombre qui ne *se divise* que par 1 et lui-même.	Prédicative	Divisibilité	---------	Courant	10
	C2 – 2	2.1: nombre qui peut se diviser que par lui-même.	Prédicative	Divisibilité	-------	Courant	10
		2.2 Le nombre est divisible que par 1.	Prédicative	Divisibilité	---------	Courant	5
		2.3 : Signifie que le nombre n'est divisible que par 1 ou par lui-même.	Prédicative	Divisibilité	---------	Courant	11
	C2-3	3.1 : 5 est un nombre premier car il est divisible que par 5 et 1.	Prédicative	Divisibilité	Par exemple	Maths	2
E	1	C'est un nombre qui n'est pas divisible que par un entier.	Prédicative	Divisibilité	--------	Courant	5
	2	nombre qui est divisible par 1 ou lui-même.	Prédicative	Divisibilité	-----------	Courant	7
	3	un nombre divisible par 1 et lui-même.	Prédicative	Divisibilité	-------	Courant	24
	4	Il est multiple à 1 et lui-même.	Prédicative	Multiple	--------	Courant	2
	5	Ce sont des nombres qui ne sont pas divisibles entièrement.	Prédicative	Divisibilité	-----	Courant	1
	6	on a leur pgcd est égal à 1.	----	Nombres premiers entre eux	-----	Courant	3
	7	N'ayant pas de diviseur commun à part un	Prédicative	Nombres premiers entre eux	------	Courant	1
	8	Un nombre premier sert à trouver le pgcd.	------	Nombres premiers entre	------	Courant	2

				eux			
	9	nombre pair pas 0.	----	Nombre impair	-----	----	1
	10	c’est un nombre qui n’a pas de racine carré tel que √25 = 5 c’est un nombre premier.	Prédicative	racine carré	----	Courant	1
	11	nombre impossible à diviser pas de division	-------	Division	------	Courant	1
	12	c’est un nombre que ne peut être divisé sans que son résultat soit entier.	Prédicative	Division	----	Courant	3
	13	C’est le premier.	------	-----	------	Courant	1
	14	Un nombre premier est un nombre non divisible	Prédicative	Divisibilité	------	Courant	2
	15	C’est nombre qui n’est divisible par 1 et par lui – même	Prédicative	Divisibilité	-----	Courant	1
	16	C’est un nombre que lorsque on le divise on obtient 1.	------	Division	-----	Courant	1
	17	divisible par 2.	----------	-------	---------	------	1

Tableau 6 : la réponse des élèves relative à la définition de nombres premiers

L’analyse de cette question montre une quasi-absence d’une définition complète en langage mathématique. La familiarité avec les entiers n’est pas évidente chez les élèves.

Les élèves tentent d’expliquer les nombres premiers en faisant appel à la divisibilité utilisant les formes langagières « Pourvoir diviser » ; « Pouvoir être divisé » ; « se diviser ». Nous pensons que ceci induit chez eux une définition en langage courant.

Nous constatons que les réponses erronées ont diminué avec les nombres premiers, ceci met en évidence que lorsqu’il s’agit d’une définition associée à une propriété, les élèves ont moins de difficultés que lorsqu’il s’agit d’une relation.

Les élèves verbalisent l’expression sans donner le nom au défini, ceci ne permet pas de faire vivre la définition de dénomination.

Nous avons dégagé de l’analyse des réponses erronées que la condition de négation (Ne …que) n’est pas maîtrisée par les élèves. 32 élèves ont fait des confusions à ce propos (F2 ; F3 ; F15).

Pour la définition des nombres non premiers

Nous avons regroupé les réponses correctes C2, en deux catégories :

- Réponses C2-1 : Elles consistent en réponses correctes divisées selon le concept auquel elles renvoient (Diviseur, divisibilité) et suivant la syntaxe : être divisible/pouvoir être divisible.
- Réponses C2 -2 : il s'agit des réponses acceptables non complètes regroupées selon le concept auquel elles renvoient et la syntaxe : être divisible/pouvoir être divisible/se diviser.
- Réponses C3- 3 : Elle donne une définition par exemple.

NNP		Définition	Opératoire / Prédicative	Quel concept renvoi	Type de définition	Langage	Fréquence
C2	C2-1	1.1: c'est un nombre qui a plus de deux diviseurs.	Prédicative	Diviseur	-----	Maths	8
		1.2 Un nombre n'est pas premier s'il a diviseurs que 1 et lui-même.	Prédicative	Diviseur	Dénomination	Maths	9
		1.3 C'est un nombre divisible par plus de deux nombres.	Prédicative	Divisibilité	----	Maths	5
		1.4: Il est divisible par d'autres nombres que 1 et lui-même.	Prédicative	Divisibilité	----	Maths	18
		1.5 Qui peut être divisé par un autre nombre que1 et lui-même.	Prédicative	Divisibilité	----	Courant	11
	C2 - 2	2.1 : signifie qu'il a plusieurs diviseurs	Prédicative	Diviseur	----	Courant	5
		2.2 : un nombre non premier peut être divisible par un nombre autre que par 1 ou que part lui-même.	Prédicative	Divisibilité	Dénomination	Courant	6
		2.3 : Un nombre qui est divisible par d'autres nombres.	Prédicative	Divisibilité	-----	Courant	2
		2.4: Etre divisible par plusieurs nombres.	Prédicative	Divisibilité	-----	Courant	11
		2.5 : Il peut être divisé par un nombre autre que lui-même.	Prédicative	Divisibilité	----	Courant	3
		2.6: Un nombre qui se divise par tous les autres nombres.	Prédicative	Divisibilité	----	Courant	8
		2.7: Un nombre non premier est un multiple d'un autre nombre (en plus de 1 et lui-même) voir plusieurs.	Opératoire	Décomposition	Dénomination	Courant	2
		2.8 : Nombre qui a plusieurs diviseurs communs.	Prédicative	Diviseur commun	-----	Courant	2
	C2 - 3	3 : 25 est un nombre non premier car il est divisible par 25, 5, 1.	Prédicative	Divisibilité	----	Par exemple	2
F	1	Il n'est pas divisible par 1 et lui-même.	Prédicative	Divisibilité	------	Courant	4
	2	un nombre pouvant être divisé par 1 mais pas par lui-même.	Prédicative	Divisibilité	------	Courant	3
	3	C'est un nombre qui peut être divisé sauf par 1 et 0	Prédicative	Divisibilité	----------	Courant	3
	4	Un nombre qui peut être divisible par un nombre.	Prédicative	Divisibilité	-----------	Courant	14
	5	Il est divisible par tous les R	----	Divisibilité	-------	Courant	1
	6	Tout le reste des nombres.	----	----------	---------	Courant	4
	7	C'est le contraire d'un de nombre premier	----	Nombres premiers	---	Courant	14
	8	C'est quand le quotient devient inférieur au dividende.	Opératoire	Division euclidienne	---------	Courant	1
	9	c'est un nombre que l'on peut diviser par des nombres premiers.	Opératoire	Division successif des	---------	Courant	3

				Nombres premiers			
	10	On a le pgcd n'est pas égal à 1.	Opératoire	Nombres premiers entre eux	--------	Courant	2
	11	Un nombre qui peut être divisible par un pgcd.	Prédicative	Divisibilité	--------	Courant	1
	12	c'est nombre impair	--------	Nombre impair	---------	Courant	2
	13	Les nombres non- premiers, lorsque ils sont divisés ou multipliés donne des chiffres ou nombres tout rond.	Prédicative	-----	---------	Courant	1
	14	Ce sont des nombres qui se divisent un entier.	Prédicative	Divisibilité	--------	Courant	2
	15	Il a une racine carrée.	Opératoire	Racine carrée	--------	Courant	1
	16	Un nombre non premier sert à tout	------------	------	--------	Courant	1
	17	Un nombre qui ne divise avec tout les nombre.	----------	Divisibilité	-------	-----	1
	18	avoir des diviseurs.	-------	Diviseur	--------	----	1
	19	c'est un nombre qui est pair plus de deux nombres	------------	Nombre pair	--------	---	1

Tableau 7 : la réponse des élèves à la définition de nombres non premiers

Nous constatons qu'aucune réponse correcte complète n'est proposée par les élèves.

39 élèves ont donné une définition acceptable des nombres non premiers en faisant référence au concept de diviseur (5 fois), de divisibilité (30 fois) et de multiple (2 fois).

Nous remarquons que les élèves ont rencontré des difficultés pour prendre la négation de la forme (Ne …que), en proposant par exemple : il n'est pas divisible par 1 et par lui-même ; il est divisible par 1 mais par lui-même ; il est divisible sauf 1 et 0 ; … Ceci est lié à une difficulté relative à la négation chez les élèves.

Pour les réponses fausses, elles concernent les points suivants :

- Tenter de faire la négation de la définition des nombres premiers (7 réponses).
- Tenter de faire la négation de la définition opératoire des nombres premiers (2 réponses).
- Confusion avec les nombres premiers entre eux (1 réponses).
- Confusion dans le travail des fractions (1 réponses).
- Confusion non premier/impair (1 réponse).
- Confusion avec la division euclidienne (il faut que le quotient soit entier) (1 réponse).

Ainsi, nous trouvons que les nombres non premiers (composés) ne sont pas établis aussi bien que les nombres premiers chez certains élèves. Comme Zazkis et Campbell (1996) l'ont souligné, la décomposition en facteurs premiers repose sur le concept des nombres composés, sur celui des nombres premiers et sur la relation entre eux ; ils font l'hypothèse que si les deux concepts ne sont pas adéquatement construits, ceci empêchera probablement toute conceptualisation significative de la décomposition en facteurs premiers. Ceci peut-être explique les difficultés que les enseignants ont signalées relativement à la décomposition en facteurs premiers. Comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, on ne trouve aucune définition des nombres non premiers ; les manuels se contentent de proposer un exemple pour montrer un nombre non premier.

Il ressort des analyses de cette question que les élèves rencontrent moins de difficultés lorsqu'il s'agit de définir une propriété que lorsqu'il s'agit de définir une relation ; ceci est à mettre en relation avec la tendance que nous avons observée consistant à transformer les relations en propriétés en utilisant des formes linguistiques du langage courant. D'une manière générale, la distinction entre propriétés et relations n'est pas explicitée dans les manuels, et on peut faire l'hypothèse qu'elle est peu explicitée en classe. Nous pensons que cette question mériterait d'être approfondie.

Nous avons aussi vu que les élèves n'ont pas de familiarité avec les entiers. La définition par l'exemple prend une place importante dans la réponse des élèves lorsqu'ils n'arrivent pas à utiliser des formes prédicatives. Les définitions équivalentes sont très peu vivantes chez les élèves plus particulièrement pour les expressions « être diviseur de » ; « être multiple de » et « être divisible par ». Ceci a mis en évidence que le lien entre les trois expressions n'est pas évident pour la plupart des élèves.

Question 3
Déterminez le pgcd de 72 et 132 en utilisant si possible deux méthodes différentes.

Le tableau ci–dessous présente l'ensemble des donnés des réponses des élèves à cette question :

Réponse	Réponse correcte	Réponse fausse	Non répondu	Total
Effectif	87	34	65	186
Pourcentage	47 %	18 %	35 %	100 %

35% des élèves n'ont pas répondu à cette question, et 18% des élèves ont donné une réponse erronée lorsqu'ils ont proposé au moins une méthode. Ceci peut être expliqué par le fait que le travail sur le PGCD n'est pas très présent dans la pratique des enseignants (32% des enseignants qui ont répondu à notre questionnaire reprennent le PGCD en Seconde), et est très peu présent dans les manuels.

47% des élèves ont donné une réponse correcte en utilisant correctement au moins une méthode.

Comme nous l'avons indiqué, nous allons nous intéresser aux réponses correctes et erronées. Nous présentons d'abord la réponse des élèves ayant correctement utilisé au moins une méthode, ensuit la réponse des élèves ayant incorrectement utilisé au moins une méthode.

3.1. Les réponses correctes

87 élèves ont répondu correctement à cette question dont :

44 élèves ayant utilisé uniquement une méthode.

- algorithme d'Euclide (18 réponses).
- soustraction successive (14 réponses).
- la décomposition en facteurs premiers (11 réponses).
- la définition opératoire du pgcd (1réponse).

36 élèves ont correctement utilisé deux méthodes différentes :

- algorithme d'Euclide et la décomposition en facteurs premiers (15 réponses).
- algorithme d'Euclide et la soustraction successive (14 réponses).
- algorithme d'Euclide et la définition opératoire du pgcd (6 réponses).
- la définition opératoire du pgcd et la décomposition en facteurs premiers (1 réponse).

7 élèves ont correctement utilisé une des deux méthodes qu'ils ont mises en œuvre :

- 5 élèves ont donnés une réponse correcte pour l'algorithme d'Euclide avec une réponse fausse avec l'algorithme de la soustraction successive (3 réponses) et une réponse fausse avec la décomposition en facteurs premiers (2 réponses).
- 1 élève a correctement calculé le pgcd avec la définition opératoire du pgcd alors qu'il a donné une réponse fausse avec la décomposition en facteurs premiers.
- 1 élève a correctement utilisé la décomposition en facteurs premiers avec une réponse fausse avec la soustraction successive.

Ainsi, nous trouvons que la démarche algorithmique est présente dans le travail des élèves. Les deux méthodes algorithme d'Euclide et la soustraction successive sont privilégiées chez les élèves pour le calcul de PGCD. A la différence des enseignants, la méthode de la décomposition en facteurs premiers est moins présente chez les élèves. Ceci nous a conduit à examiner les réponses erronées pour savoir si les élèves confondent avec la décomposition en facteurs premiers. Nous soulignons enfin que peu des élèves ont mobilisé la définition de PGCD comme une méthode de la recherche de PGCD. Nous faisons l'hypothèse que :, définir le PGCD comme le plus grand diviseur commun, ne permet pas aux élèves de mettre en place cette définition pour trouver le PGCD.

3.2. Réponses erronées

34 élèves ont répondu incorrectement à cette question dont :

- 2 élèves ont mal utilisé deux méthodes différentes :
  - algorithme d'Euclide et la décomposition en facteurs premiers (1 réponse).
  - algorithme d'Euclide et la soustraction successive (1 réponse).
- 29 élèves ayant disposé uniquement une méthode, ont utilisé incorrectement les méthodes:
  - la décomposition en facteurs premiers (13 réponses).
  - algorithme d'Euclide (10 réponses).
  - la soustraction successive (5 réponses).
  - la définition opératoire du pgcd (1 réponses).
- 3 élèves n'ont pas ùis en œuvre aucune méthode reconnue pour la recherche de PGCD. Ils ont mis la fraction : $\frac{132}{72}$.

Nous trouvons que la décomposition en facteurs premiers est la méthode avec la quelle les élèves font le plus d'erreurs pour le calcul de PGCD. Nous résumons les méthodes utilisées par les élèves dans le tableau ci-dessous :

Nous soulignons que Algorithme d'Euclide est noté dans le tableau par : E ; la soustraction successive : S ; la décomposition en facteurs premiers : D ; Définition opératoire du pgcd : O.

Méthodes		CC	CF	FC	FF
Deux méthodes	E + O	6	0	0	0
	E + S	14	3	0	1
	E + D	15	2	0	1
	O + S	0	0	0	0
	O + D	1	1	0	0
	S + D	0	0	1	0
Une méthode	E	18			10
	S	14			5
	D	11			13
	O	1			1
Total		80	6	1	31

Ce qu'il ressort de l'analyse de cette question, est que la définition de PGCD n'est pas mise en place chez la plupart des élèves. Le nombre plus élevé des réponses erronées avec la décomposition en facteurs premiers que des réponses correctes, montre certainement qu'il y une difficulté face à cette méthode. Ceci confirme à ce que nous l'avons trouvé dans le questionnaire des enseignants (certains enseignants ont indiqué que la décomposition en facteurs premiers est difficile pour les élèves.)

Nous avons ainsi trouvé, le choix des enseignants était de mettre en place de la décomposition en facteurs premiers au détriment de la démarche algorithmique, alors que les élèves disposent la démarche algorithmique.

Question 4

- *Soit* $A = 6 \times 147 + 1$. *A est-il divisible par 2 ?*
- *Soit* $B = 6 \times 147 + 2$. *B est-il divisible par 2 ?*

Nous présentons dans le tableau ci-dessous l'ensemble des données des réponses pour la première et la deuxième partie de cette question en indiquant dans le cas de la réponse correcte pour A et B : CC, et la réponse fausse pour A et B : FF, et la réponse correcte pour A uniquement : CF, et la réponse correcte pour B uniquement : FC.

	CC	CF	FC	FF	Non répondu	Total
Effectif	159	2	4	17	4	186
Pourcentage	86 %	1 %	2 %	9 %	2 %	100 %

Nous remarquons que la plupart des élèves (86 %) ont correctement répondu à la première et la deuxième partie de cette question, et 9% ont donné une réponse fausse pour toutes les deux parties, et 3% ont répondu correctement à une de deux parties de cette question.

Les réponses correctes ici correspondent aux élèves ayant utilisé une méthode correcte et ceux qui ont donné seulement la réponse : non pour A, et oui pour B. Nous pensons ainsi certains élèves ont spontanément donné la réponse correcte sans avoir la conscience à cette question. Ce qui peut - être justifie le nombre élevé des réponses correctes.

Parmi les 159 élèves (86 %) ayant donné une réponse correcte, 61 élèves n'ont pas justifiés leur réponse, 2 élèves ont donné une justification fausse à leur réponse. Ce qui montre que cette question n'est pas une question classique. Les 96 élèves restants ont utilisé une méthode pour justifier leur réponse. Avant de relever la fréquence de ces méthodes dans la réponse des élèves, nous allons rappeler les méthodes que nous avons avancées dans l'analyse à priori.

T1 : Déterminer la divisibilité de A et de B par 2 à partir de la de la forme donnée en précisant le quotient et le reste de la division de A et B par 2.

T2 : Trouver la valeur de A et de B, et effectuer ensuite la division euclidienne pour obtenir le quotient et le reste.

- T2-1 : Le quotient de A par 2 est un nombre décimal donc il n'est pas divisible, alors que le quotient de B par 2 est un entier, donc il est divisible.

- T2-2 : L reste de la division euclidienne de A par 2 n'est pas nul, donc A n'est pas divisible par 2. Le reste de la division euclidienne de B par 2 est nul, donc B est divisible par 2.

T3 : Utiliser les critères de divisibilité après avoir trouvé la valeur de A et de B. .

T4 : Utiliser des résultats opératoires concernant les nombres pairs et impairs.

T5 **:** Mise en oeuvre de la notion de nombres premiers.

Le tableau ci-dessous nous présente la fréquence les techniques utilisées par les élèves ayant donné une réponse correcte pour A et B, en sachant que les élèves ont utilisé les mêmes méthodes pour répondre à tous les deux parties de cette question.

Réponse	T1	T2	T3	T4	T5	Total
Effectif pour A et B	1	13	68	13	1	96

Nous remarquons que plus de deux tiers des élèves ayant donné une réponse correcte pour les deux parties A et B, ont justifié leur réponse en utilisant T3, alors que les deux méthodes T2 et T4 ont été utilisé d'une façon équitables par les élèves (13 réponses). Il est à noter que les élèves ayant mis en œuvre T2, ont utilisé T2-1 (12 réponses), et T2-2 (1 réponse). Ceci met en évidence que la divisibilité n'est pas évidente chez les élèves à partir de la division euclidienne. En fait, comme nous l'avons vu dans la question 2, peu des élèves ont défini les expressions « être divisible par » ; « être diviseur de » ; « être multiple de » à partir de la division euclidienne,

Comme nous l'avions prévu, la notion de nombres premiers n'est mise en œuvre que par un seul élève. Ainsi qu'un seul élève est arrivé à donner la technique T1. Ceci met en évidence que l'identification du quotient et du reste de la division euclidienne dans la forme proposée est très difficile pour les élèves. Ainsi, la détermination de la divisibilité de A et B après identifier le couple (q, r) est très compliqué. Conformément aux réponses des enseignants, la division euclidienne reste encore difficile pour les élèves.

En ce qui concerne les élèves qui ont donné une réponse correcte pour A ou B, nous avons regroupé leur réponse en deux catégories :

- Aucune technique avancée par les élèves ayant donné une réponse correcte seulement pour B (3 réponses) et une réponse correcte pour A (1 réponse).

- Utiliser la technique T2 pour donner une réponse correcte à A et fausse à B (1 réponse).

- Utiliser la technique T3 pour donner une réponse fausse à A et correcte à B (1 réponse).

Ce qui ressort de l'analyse de cette question, le lien entre la divisibilité et la division euclidienne n'est pas évident chez les élèves, car ils ont une difficulté à identifier le quotient et le reste à partir de la forme $a = b\,q + r$. Il faut noter cependant que les nombres A et B ne sont pas donnés explicitement sous la forme de la division euclidienne par 2. Le passage de l'écriture $A = 6 \times 147 + 1$ à l'écriture $A = 2\times (3\times 147) + 1$ (ou écriture équivalente par rapport à l'explicitation du diviseur 2) ne peut pas être considéré comme allant de soi ; pour aller vers cette explicitation du diviseur dans ce type d'écriture, il faut déjà avoir en tête l'idée d'exploiter le lien entre divisibilité par 2 et division euclidienne par 2.

Question 5

Soit $M = 3^2 \times 5^2 \times 7$

5a) M est-il divisible par : 7, 9, 2, 11,63 ? Justifiez votre réponse.

5b) B = $3^2 \times 5^3 \times 7$, B est- il diviseur de M et pourquoi ?

5c) F= $3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$, est- il multiple de M et pourquoi ?

38 élèves n’ont pas répondu à la totalité de cette question. Ceci montre que cette question n’est pas une question classique pour les élèves malgré que la plupart des enseignants aient indiqué qu’ils font vivre tel exercice dans leur pratique.

Pour la première partie de cette question 5a), 48 élèves n’ont pas répondu à cette question, 16 élèves ont donné une réponse fausse, et 122 élèves ont donné une réponse correcte complète / partielle, nous regroupons ces derniers en trois catégories :

- élèves ayant donné une réponse correcte (complète / partielle) avec une méthode correcte (76 réponses)

- élèves ayant donné une réponse correcte (complète / partielle) avec une méthode fausse (7 réponses).

- élèves ayant donné une réponse correcte (complète / partielle) sans donner une méthode (39 réponses)

Nous pensons que les élèves ayant donné une réponse correcte sans donner une méthode, soit ont donné la réponse spontanément, soit ne sont pas sûr de leur réponse.

Le tableau ci-dessous présent l’ensemble des données des réponses les 76 élèves ayant utilisé correctement les techniques évoquées dans l’analyse à priori :

- **T1**: il s’agit de montrer que M est divisible par les facteurs qui apparaissent explicitement ou implicitement dans la décomposition de M.
- **T2**: elle consiste à trouver la valeur de M et effectuer la division euclidienne ou utiliser les critères de divisibilité.

Méthode	T1	T2	Total
Fréquence	56	20	76

Ce tableau illustre que la plupart des élèves ayant justifié leur réponse correcte à cette partie de cette question, ont utilisé T1.

Pour vérifier notre hypothèse que nous avons fait dans l’analyse à priori : si les élèves arrivent à déterminer la divisibilité des nombres figurant implicitement dans M et même pour les nombres premiers 2 et 11, nous allons montrer dans le tableau ci –dessous l’ensemble des données de réponses des élèves pour chaque nombre suivant à la technique utilisée :

Réponse correcte	T1					T2				
Nombres proposés	7	9	63	2	11	7	9	63	2	11
Fréquence	56	55	42	8	9	13	18	13	9	8
Total	56					20				

Nous remarquons qu'un grand nombre d'élèves ont choisi la technique T1 pour répondre à cette question, ceci confirme notre hypothèse, mais en même temps, ceci n'est pas en accord avec ce que les enseignants ont prévu. Il semble que les élèves aient compris qu'il est possible de déterminer la divisibilité de la forme proposée sans calculer M et effectuer la division euclidienne. Ceci met en évidence que le lien entre la divisibilité et la décomposition en facteurs premiers est claire chez certains élèves, mais seulement pour les nombres figurant explicitement dans M. Certains élèves ont rencontré une difficulté avec les nombres qui figurent implicitement dans M. Ce qui laisse penser que ce lien entre la divisibilité et la décomposition en facteurs premiers n'est pas assez établie chez les élèves. En particulier, lorsqu'il s'agit de déterminer la divisibilité de M par les nombres premiers qui n'apparaissent pas dans M, la plupart des élèves ne parviennent pas à donner une réponse correcte. Ceci confirme ce qui a été prévu par les enseignants. Ceci montre que l'idée de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers est absente chez la plupart des élèves.

Notons que certains élèves ayant utilisé la technique T1 avaient aussi une difficulté avec les nombres premiers pour savoir si M est divisible par 2 et 11.

Pour la deuxième et la troisième partie de cette question, il s'agit de déterminer si B est diviseur de M, et F est multiple de M.

68 élèves n'ont pas répondu à la deuxième et la troisième partie de cette question et 33 élèves ont donné une réponse correcte pour tous les deux parties.

Le nombre élevé d'élèves n'ayant pas répondu montre que les élèves ont une difficulté de mettre en place leur connaissance de la notion de multiple et diviseur avec la décomposition en facteurs premiers, malgré qu'un tel exercice soit vivant dans le cours d'arithmétique du point du vue des enseignants.

Réponses	5b	5c
Réponse correcte	57	65
Réponse fausse	53	27
Non répondu	76	94
Total	186	186

Nous constatons de ce tableau que les réponses correctes pour 5b sont moins nombreuses que celles pour 5c, et les réponses fausses pour 5b sont plus nombreuses que celles pour 5c. Ceci peut tenir au fait que la question 5b nécessite de monter que B n'est pas un diviseur de M. Nous pensons que certains élèves ont répondu spontanément à la question sans vérifier si B est un diviseur ou pas de M. Ce qui laisse penser que cet exercice leur pose un problème. Ceci peut–être le cas pour les élèves ayant donnée une réponse correcte sans justifier leur réponse.

Dans le tableau ci-dessous nous présentons les méthodes suivis par les élèves pour b et c. nous rappelons les techniques distinguées sont :

- **T1 :** Utiliser la forme décomposée de B en facteurs premiers.
- **T2 :** Calculer les valeurs de M et B et faire la division euclidienne ou décimale.

B	T1	T2	T
Effectif pour 5b	41	2	57
Effectif pour 5c	39	4	43

Contrairement à ce que certains enseignants ont prévu, les élèves ont choisi la technique T1 pour répondre à cette question.

Nous rappelons que nous avons distingué dans l'analyse a priori les sous- techniques pour T1 :

T1-1 : On utilise la règle suivante : Pour qu'un nombre M soit un diviseur de B, il faut que la décomposition de M en facteurs premiers ne contienne que des facteurs premiers qui figurent dans la décomposition de B avec un exposant au plus égal.

T1-2 : On utilise la définition de diviseur : dire que le naturel b est diviseur du naturel a signifie qu'il existe un naturel q tel que : a = b q

T1-3 On utilise le critère de l'ordre naturel : Pour tout entiers naturels a et $b \mid a \rightarrow b \leq a$ (ordre de divisibilité). or B > M.

T1-4 : Ecrire le quotient sous forme de fraction et simplifier:

Le tableau suivant nous présente les techniques utilisées par les élèves pour b et c :

Technique	T1-1	T1-2	T1-3	T1-4	Total
Effectif pour 5b	4	3	29	5	41
Effectif pour 5c	5	23	7	33	39

Ce tableau montre qu'il y a une différence assez significative entre les techniques utilisées pour 5b et 5c. En particulier les techniques T1-2 ; T1-3 ; T1-4.

Il est remarquable que la question 5b qui demande si B est un diviseur de M, a donné lieu chez la plupart des élèves d'utiliser la technique relative à utiliser l'ordre de divisibilité. Dans la question 5c, il s'agit de savoir si F est un multiple de M, les élèves ont changé leur technique en se basant soit sur la définition de multiple, soit sur l'écriture d'une fraction. Mais, la règle qui permet de déterminer si un nombre décomposé est un multiple ou diviseur d'un autre n'est utilisée que par très peu des élèves. Nous pensons que cette règle n'est pas disponible chez les élèves, du fait que les manuels ne la présente pas dans la partie Cours.

Il ressort de l'analyse de cette question que peu des élèves ont une certaine compréhension de lien entre la divisibilité et la décomposition en facteurs premiers. On peut faire l'hypothèse que ceci vient de ce que les exercices sur la divisibilité et la décomposition en facteurs premiers sont très peu présents dans les manuels et dans la pratique des enseignants. Rappelons que le rôle de la décomposition en facteurs premiers dans les programmes n'est associé qu'à la simplification des fractions.

Question 6

Soit A = Soit A = $2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ et C = $3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$

Donner un multiple commun de ces deux nombres

Nous présentons l'ensemble des données des réponses des élèves

Réponses	Réponse correcte	Réponse fausse	Non répondu	Total
Effectif	11	96	79	186
Pourcentage	6 %	52 %	42 %	100 %

A la lecture du tableau ci –dessus, on voit qu'un taux élevé d'élèves non pas répondu à cette question (42%) ou on donné des réponses fausses (52 %), ce qui laisse penser que cet exercice était difficile pour les élèves et que la notion de ppcm n'est pas maîtrisée surtout avec la décomposition en facteurs premiers. Ceci confirme la première hypothèse HP1 : que nous avons reformulé dans l'analyse à priori.

Seuls 11 élèves (6 %) arrivent à donner une réponse correcte à cette question, nous regroupons leur réponse en trois catégories suivant les méthodes qu'ils ont suivies :

- T2 : Rechercher de ppcm à partir de la décomposition en facteurs premiers (7 réponses).

- T1 : Effectuer le produit A × C à partir de la décomposition en facteurs premiers (2 réponses).

- T1 : Trouver la valeur de A et C et le produit A × C (2 réponses).

Nous trouvons que 4 élèves seulement ont trouvé un multiple commun en effectuant le produit de A et C, contre 7 élèves ayant trouvé le ppcm. Ceci est contradictoire avec la deuxième hypothèse HP2 faite dans l'analyse a priori, selon la quelle les élèves utilisent T1 conformément à la réponse des enseignants.

Pour tester la troisième hypothèse HP3 que nous avons déjà formulée, selon laquelle les élèves ont une confusion entre la recherche de PGCD et PPCM à l'aide de la décomposition en facteurs premiers, nous avons examiné les réponses erreurs chez les élèves. Nous avons regroupé les élèves ayant donné les réponses fausses les plus fréquentes en 5 catégories :

- 29 élèves ont donné la réponse 7 comme un multiple commun, il s'agit de plus grand facteur commun de deux nombres. ceci montre que les élèves ont pensé à la définition ensembliste de PGCD (le plus grand diviseur commun).
- 24 élève avaient une confusion entre le ppcm et le pgcd, parmi eux, 12 élèves ont trouvé la valeur de pgcd (pgcd = 525), 6 élèves autres ont donné le pgcd sous la forme décomposé (pgcd = $3 \times 5^2 \times 7$) et 6 élèves ont donné le pgcd avec les facteurs communs 3, 5^2, 7.
- 10 élèves ont donné la réponse 3 comme un multiple commun, le plus petit facteur commun de deux nombre. Ceci montre que les élèves tentent de mettre en place la définition ensembliste de PPCM.
- 4 élèves ont fait A/C pour donner un multiple commun.

Ainsi, 53 élèves ont donné le pgcd, ceci met en évidence la confusion chez les élèves entre le pgcd et le ppcm. Ceci confirme la troisième hypothèse faite.

Les élèves ne peuvent pas s'approprier la décomposition en facteurs premiers, lorsqu'ils ont tenté de mettre en place la définition opératoire de PPCM avec les nombres décomposés en facteurs premiers.

Il ressort de l'analyse de cette question, que les élèves n'arrivent pas à déterminer un multiple commun ou même le ppcm des deux nombres décomposés en facteurs premiers. Ceci peut être justifié du fait que le ppcm n'est privilégié ni comme un objet d'étude ni comme outil par les programmes. Par contre, cette question a mis en évidence que la recherche d'un multiple commun induit certains élèves à identifier le PPCM, c'est le cas chez les manuels et certains enseignants. En fait, les deux notions : un multiple commun et PPCM sont liés, cependant le PPCM est un cas particulier des multiples communs. Nous pensons que la distinction entre la notion de multiple commun et le PPCM n'est pas assurée chez les élèves.

Question 7

Les nombres suivants sont-ils premiers ? Justifier votre réponse.

a) 98 :

b) 89

c) 599

31 élèves n’ont pas répondu à la totalité de cette question.

Le tableau suivant synthétise les réponses correctes, les réponses fausses et les réponses non répondus pour les trois parties de cette question.

Réponses	7a)	7b)	7c)
Réponse correcte	144	125	100
Réponse fausse	10	18	19
Non répondu	32	43	67
Total	186	186	186

Comme on le constate à la lecture de ce tableau, on a un taux élevé des réponses correctes pour la question 7a, ce taux a diminué pour 7b et 7c, mais il est reste cependant assez élevé.

La diminution des réponses correctes pour 7b et 7c peut être justifié par le fait que les critères de divisibilité utilisés pour 7a, n’est plus suffisants pour déterminer la primalité les deux nombres 89 et 599, ce qui implique de faire appel à d’autres méthodes, celle –ci doivent être maitrisées par les élèves pour donner une réponse correcte.

Nous allons dans ce qui suit présenter les méthodes suivies par les élèves pour chaque partie de cette question.

Pour 7a, parmi les 144 élèves ayant donné une réponse correcte, 135 élèves ont donné les raisons suivantes :

- le nombre 98 est divisible par 2. (93 réponses).
- le nombre 98 est pair (17 réponses).
- Il y a plus de deux diviseurs (14 réponses).
- 98 peut s’écrire comme un produit de facteurs premiers $98 = 2 \times 7^2$ (10 réponses).

Nous constatons que 110 élèves ont utilisé les critères de divisibilité pour justifier leur réponse, et un nombre non négligeable 14 élèves se sont appuis sur la définition des nombres premiers, 10 autres élèves ont utilisé la décomposition en facteurs premiers.

Pour les élèves ayant donné une réponse correcte pour 7b, 41 élèves n’ont pas avancé des raisons pour justifier leur réponse, 7 élèves ont donné une justification fausse à leur réponse. Nous pouvons faire l’hypothèse suivante : les élèves qui n’ont pas justifié leur réponse, pourraient avoir une conception erronée selon laquelle tous les nombres impairs sont premiers. Ou bien ils ont pris la décision que 89 est premier lorsqu’ils ont trouvé mentalement que 89 n’est pas divisible par les critères de divisibilité connus. Nous pensons que ces élèves soit ne savent pas mettre en œuvre les autres techniques, soit ils n’ont appris que la définition de nombres premiers et critères de divisibilité pour déterminer la primalité des nombres. Ceci est en accord avec ce que l'on trouve dans le manuel Hyperbole qui ne propose aucune technique pour reconnaitre les nombres premiers sauf la définition de nombres premiers. Ceci peut être le cas pour les 56 élèves qui ont justifié leur réponse en s'appuyant sur la définition de nombres premiers.

Quelques élèves ont justifié leur réponse en utilisant les méthodes suivantes:

- Diviser successivement par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11 (12 fois).

- Utiliser les critères de divisibilité (3 fois).

- Diviser par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ (3 fois).

- Diviser par tous les nombres successifs jusqu'à ce que le quotient « soit » plus petit que le diviseur (2 fois).

- Crible d'Eratosthène (1 fois).

Il est remarquable que les élèves aient testé la division successive par les nombres premiers sans suivre une méthode précise. Très peu des élèves ont réussi à mettre en œuvre une démarche algorithmique.

Pour les élèves ayant donné une réponse correcte à la troisième partie de cette question, 54 élèves sur 100 élèves ont justifié leur réponse dont 42 ont indiqué la définition des nombres premiers et les critères de divisibilité.

Notons que 15 élèves seulement ont justifié leur réponse en utilisant les techniques suivantes :

- Diviser successivement par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11 (9 fois).

- Utiliser les critères de divisibilité (3 fois).

- Diviser par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ (2 fois).

- Diviser par tous les nombres successifs jusqu'à ce que le quotient « soit » plus petit que le diviseur (1 fois).

Nous résumons dans le tableau suivant l'ensemble des données pour cette question en notant que :

M0 : Diviser par tous les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11.

M1 : Diviser par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

M2 : Diviser par tous les nombres successifs jusqu'à ce que le quotient « soit » plus petit que le diviseur

Réponse correcte	7a	7b	7c
Critères de divisibilité	110	3	3
Définition de nombres premiers	24	56	39
M0	0	12	9
M1	0	3	2
M2	0	2	1
Crible d'Eratosthène	0	1	0
Aucune	10	41	38
Justification fausse	0	7	8
Total	146	125	100

Il ressort de l'analyse de cette question que la démarche algorithmique n'est pas viable avec les nombres premiers chez la majorité des élèves. Les élèves s'appuient largement sur la définition de nombres premiers pour reconnaître la primalité des entiers en utilisant les critères de divisibilité. Lorsque les critères de divisibilité ne sont plus suffisants pour prendre une décision sur la primalité des entiers, ils rencontrent une difficulté.

Comme nous avons vu les enseignants font vivre la niche algorithmique dans leur pratique, 42% des enseignants ont utilisé M1, et 10% des enseignants ont utilisé M2. Ceci met en évidence qu'il y a un écart entre ce que les enseignants mettent en place dans le cours d'arithmétique et les techniques que les élèves mettent en œuvre pour accomplir les exercices d'arithmétique.

CONCLUSION

Nous avons conduit cette recherche sur le rapport personnel des élèves avec les objets de savoirs en jeu dans ce travail pour voir comment ils se positionnent par rapport aux contraintes institutionnelles que nous avons dégagées dans nos analyses précédentes. Dans nos analyses, nous avons testé des situations qui nécessitent de l'élève une mobilisation des connaissances arithmétiques étudiés au collège avec les notions fixées par les programmes de Seconde. Les résultats montrent que les élèves ont de nombreuses difficultés dans l'accomplissement de ces tâches.

Nous avons tout d'abord constaté que le sens de l'arithmétique n'est pas évident chez la plupart des élèves, certains élèves ont une mauvaise compréhension de l'arithmétique, et d'autres élèves ont une confusion entre l'arithmétique et l'algèbre. Ainsi la spécificité de l'arithmétique aux entiers est difficile à saisir chez les élèves.

Les résultats ont mis en évidence que les élèves ont des difficultés linguistiques pour exprimer les notions d'arithmétique. Il y a une tendance forte chez les élèves à définir en termes de propriété au détriment de montrer la relation entre les entiers, et donner des définitions opératoires.

L'analyse du questionnaire relève un réinvestissement inadéquat des connaissances acquises en arithmétique ; en particulier la relation de divisibilité et un multiple commun avec des situations nouvelles. Ainsi, les élèves ne peuvent construire une vision appropriée des liens entre ce qui est étudié au collège et ce qui fait l'objet d'étude en classe de Seconde. Ceci peut être expliqué par le fait que les programmes de seconde ne donnent pas de place pour des applications et des reprises des notions d'arithmétique étudiées au collège telles le PGCD et le PPCM et la divisibilité et les nombres premiers entre eux. Une conséquence est que le contenu d'arithmétique semble séparé de l'arithmétique au collège.

Nous avons par ailleurs observé certains décalages entre ce que les professeurs avaient prévu et ce qui se dégage des copies des élèves. Nous en donnons els principaux éléments dans le paragraphe suivant.

III. Mise en perspective des réponses aux questionnaires professeurs et élèves

Nous allons dans cette partie confronter la réponse des élèves avec la réponse de leurs enseignants. 10 enseignants ont répondu au questionnaire des enseignants, et ont accepté de faire passer le questionnaire des élèves à leurs élèves. Nous les notons P1, P2, …P10.

Comme nous l'avons déjà dit, le nombre d'élèves est différent d'une classe à l'autre. Ainsi, les enseignants sont numérotés suivants l'ordre décroissant du nombre des élèves. L'enseignant P1 a dans sa classe 30 élèves; la classe de P2 compte aussi 30 élèves la classe de P3 comporte 29 élèves. P4 a 21 élèves dans sa classe. La classe de P5 comporte 17 élèves, celle pour P6 a 16 élèves. 8 élèves de la classe de P7, 7 élèves de la classe de P8, 6 élèves de la classe de P9 et 4 élèves de la classe de P10 ont rempli le questionnaire.

Notons enfin que la classe constituée de Etablissement St Etienne n'est pas prise en comporte dans cette étude, car leur enseignant n'a pas répondu à son questionnaire, il est contenté de faire passer le questionnaire à ses élèves.

Nous allons présenter le croisement des réponses des élèves avec la réponse de leur enseignant aux questions suivantes :

I. Question concernant la définition de l'arithmétique.

II. Question concernant la définition du PGCD et les méthodes utilisées.

III. Question concernant la définition des nombres premiers et les méthodes utilisées.

IV. Question relative à déterminer la divisibilité des nombres à partir de la décomposition en facteurs premiers.

V. Question relative à la recherche de multiple commun de deux nombre décomposés en facteurs premiers.

Notons enfin que, pour faire le croisement des réponses professeur/ élève, nous procédons de la manière suivante : nous regroupons les enseignants suivant à leurs réponses (non répondu – répondu en disposant une technique) ensuite pour chaque catégorie nous confrontons la réponse de chaque enseignant avec celle de leurs élèves.

3. I : Question concernant la définition de l'arithmétique.

Nous regroupons les 10 enseignants en trois catégories :

- Enseignant n'a pas répondu à cette question P3.
- Enseignants n'ont pas défini l'arithmétique P1, P6, P8, P10.
- Enseignants ont donné une définition de l'arithmétique P2, P4, P5, P7, P9.

Nous présentons dans ce qui suit le croisement des réponses des élèves avec la réponse de leur enseignant suivant les trois catégories :

- Pour l'enseignant **P3**, presque la moitié de leurs élèves (16 sur 29 élèves) n'ont pas répondu, le reste (13 élèves) a donné des réponses variées, le tableau ci –contre nous présente l'ensemble des donnés des élèves à cette question :

P	T	Réponses des élèves							
		NR	Calcul numérique	Théorie des nombres	Algèbre et calcul numérique	Algèbre	Raisonnement	Ensemble des nombres	Contraire de la géométrie
P3	29	16	5	---	1	5	1	---	---

Le nombre élevé des réponses non répondu pour les élèves de P3, montre que les élèves ne sont pas capables d'expliquer le sens d'arithmétique. 10 élèves ont donné deux réponses équitables pour expliquer le sens d'arithmétique, l'une de côté du calcul numérique et l'autre de côté de la partie « l'algèbre ». Un élève a signalé qu'elle concerne à la fois le calcul numérique et le calcul algébrique, et un autre élève a interprété l'arithmétique par le fait qu'elle concerne le raisonnement.

Nous trouvons que ces élèves ont la tendance d'expliquer le sens de l'arithmétique par sa niche. Pour eux, c'est le calcul numérique, et le raisonnement, alors que la niche algorithmique n'apparaît pas.

Si les élèves ayant donné la réponse « contraire de la géométrie » voulaient dire la partie concernant algèbre, auxquels nous ajoutons les 5 élèves ayant donné la réponse du coté algèbre, ceci montre une mauvaise compréhension de sens de l'arithmétique.

- Pour P1, P6, P8, P10 ayant signalé qu'ils ne définissent pas l'arithmétique à leurs élèves, le tableau ci –dessous nous synthèse la réponse de leurs élèves ayant donné une définition de l'arithmétique :

P	T	Réponses des élèves							
		NR	Calcul numérique	Théorie des nombres	Algèbre et calcul numérique	Algèbre	Raisonnement	Ensemble des nombres	géométrie
P1	30	11	9	---	9	1	---	----	---
P6	16	8	6	--	-----	1	1	----	----
P8	7	3	1	3	----	---	---	---	---
P10	4	2		1	1				

- P1 : le tiers de ses élèves n'a pas répondu. Les deux tiers ont échoué d'interpréter l'arithmétique au sens de la théorie des nombres.

Les élèves ayant répondu à cette question, ont donné une réponse équitable de deux explications : l'une pour le calcul numérique et l'autre pour le calcul numérique et l'algèbre. Ceci montre, pour ces derniers, qu'il y une confusion entre l'arithmétique et l'algèbre chez les élèves.

Notons que les réponses apportées au calcul numérique : [Calcul (5rép) ; calcul numérique (1rép) ; numération (2rép) ; contraire à l'algèbre (1rép)].

- P6 : la moitié de ses élèves n'ont pas répondu. L'arithmétique pour ceux qui ont répondu se rapporte au calcul numérique : [calcul (5 rép) ; science des nombres (1 rép)] et au calcul algébrique.

- P8 : 4 élèves sur 7 ont expliqué que l'arithmétique concerne le calcul numérique (1 rép) et la théorie des nombres (3 rép) :

- théorie des nombres avancés (propriété des entiers et rationnels) (1rép).
- théorie des nombres élémentaire (propriété des entiers) (1rép).
- propriété des nombres (1rép).

- **P10 :** un élève sur 4 a signalé qu'elle concerne les entiers et un autre a expliqué l'arithmétique par le fait qu'elle concerne le calcul numérique ou algébrique.

Les résultats des réponses des élèves pour les 4 enseignants ne sont pas surprenants car leur enseignant a annoncé qu'il ne définit pas l'arithmétique dans son cours. Pour ceux qui sont arrivés à interpréter l'arithmétique du coté de la théorie des nombres, nous faisons l'hypothèse qu'ils ont demandé l'aide de leur famille car ils ont rempli le questionnaire chez eux.

- En ce qui concerne les cinq enseignants ayant signalé qu'ils définissent l'arithmétique à leurs élèves P2, P4, P5, P7, P9, nous présentons l'ensemble de leur réponse avec la réponse de leurs élèves dans le tableau suivant :

P	P	T	Réponses des élèves							
			NR	Calcul numérique	Théorie des nombres	Algèbre et calcul numérique	Algèbre	Raisonnement	Ensemble des nombres	géométrie
P2	Etude des nombres	30	13	15	-------	1	1	--------	----	-------
P4	Science des nombres	21	11	3	5	----	1	-----	------	1
P5	Opération et calcul numérique	17	9	5	---------	---------	---------	3	-------	----
P7	Etude des entiers	8	1	4	1	-----------	1	--------	1	---
P9	Théorie des nombres	6	4	1	1	---------	------	-------	------	---

- P2 : La plupart des élèves de P2 ayant répondu s'accordent avec leur enseignant sur l'idée que l'arithmétique concerne le calcul numérique (15 rép) en particulier l'étude / science des nombres (9 rép), calcul (5rép), numération (2 rép). Un seul élève l'a expliqué de côté de l'algèbre.

Par contre, la moitié des élèves de P2 ne donnent aucune réponse.

- P4 : Contrairement à la réponse de l'enseignant P4 qui a expliqué l'arithmétique par la science des nombres, 5 élèves sur 10 ayant répondu ont interprété l'arithmétique en terme de la théorie des nombres avancé (4 rép) et des éléments de la théorie des nombres élémentaire et calcul numérique (1rép) :

> *« L'arithmétique est une branche des mathématiques qui comprend la partie de la théorie des nombres qui utilise des méthodes de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes. »*

> *« L'arithmétique est tout l'enseignement des mathématiques dans l'ordre : apprendre à compter, les additions, soustractions, multiplication, division, décomposition des nombres, PGCD…L'arithmétique est ce que vous faites ! ».*

3 élèves autres ont donné une réponse en accord avec la réponse de leur enseignant : Etude / science des nombres (2 rép) et calcul (1rép). Un autre élève a expliqué que l'arithmétique c'est le calcul l'algébrique et pour un autre c'est l'étude de nombres et elle appartient à la géométrie.

- P5 : un nombre assez élevé d'élèves n'ont pas répondu (9 élèves sur 17). Pour ceux qui ont donné une définition de l'arithmétique, ils s'accordent avec leur enseignant que l'arithmétique concerne le calcul numérique. Pour P5, l'arithmétique c'est le calcul numérique et l'opération sur les nombres, pour leurs élèves, c'est le calcul (3 rép) et l'étude des nombres (2 rép), alors que pour les 3 autres élèves, il s'agit d'un raisonnement.

- P7 : L'enseignant P7 a expliqué l'arithmétique par le fait qu'elle étudie les entiers, alors que leurs élèves ne sont pas arrivés à donner la même réponse sauf un élève. Ils l'ont expliqué de côté de calcul numérique (4 rép), l'algèbre (1 rép) et l'ensemble des nombres (1 rép)

- P9 : L'enseignant P9 ayant défini l'arithmétique en termes de la théorie des nombres, 2 élèves sur 6 ont répondu en donnant la théorie des nombres pour un et le calcul pour l'autre élève.

Ce qu'il ressort de cette question, est que la majorité des élèves n'ont pas la conscience au sens de l'arithmétique du côté de la théorie des nombres, en line avec le fait que leur enseignant soit ne le propose pas dans le cours, soit l'explique du côté du calcul numérique ou se contente de dire qu'elle étudie des entiers. Cela peut être justifié par le fait que les manuels en correspondant aux programmes ne proposent pas une définition de l'arithmétique, ceci a induit chez certains élèves une mauvaise conception de l'arithmétique et une confusion entre l'arithmétique et algèbre.

Notons enfin que aucun enseignant n'a signalé que l'arithmétique comporte des objets tel la division euclidienne et la divisibilité et pgcd…. , alors que un seul élève est arrivé à cette réponse, nous faisons l'hypothèse suivante :

Les élèves étudient les objets de l'arithmétique tout au long du collège sans avoir la conscience que ses objets sont les objets de l'arithmétique.

3.2. Question concernant la définition du pgcd et les méthodes utilisées.

Le croisement de cette question est subdivisé en deux parties, la première est le croisement de la réponse des enseignants et leurs élèves pour la définition de pgcd, et la deuxième est les méthodes utilisées pour calculer le pgcd.

3.2.1 La définition du PGCD

Le tableau ci-dessous synthèse la réponse des élèves par rapport à la réponse de leur enseignant. Nous rappelons que la réponse des élèves a été regroupée dans l'analyse à posteriori des élèves en 4 catégories :

- Réponse correcte C.
- Réponse fausse F.
- Réponse de reformulation RM.
- Non répondu.

Nous rappelons aussi que les réponses correctes sont divisées en C1 (réponse correcte complète qui associe le PGCD aux entiers) et C2 (réponse correcte non complète, elle n'associe pas le PGCD aux entiers), et les types des définitions que nous avons déjà distingué dans l'analyse à priori : D1, D2 et D3.

D1 : elle permet de montrer l'aspect existence du pgcd.

D2 : elle définit le pgcd comme le plus grand entier des diviseurs communs de deux entiers.

D3 : elle est proposée sous deux conditions : *i) d| a et d| b ; ii) si c| a et c | b, alors c* $\leq$ *d*

P	**P**	Nombre E	**E**			
			C	F	RM	NR
P1	RM	30	5	7	12	6
P2	RM	30	2	5	14	9
P3	C1-D3	29	6	8	12	3
P4	RM	21	2	4	7	8
P5	RM	17	1	9	3	4
P6	C2- D3	16	--	2	11	3
P7	RM	8	2	3	3	--
P8	C2 –D2	7	--	--	4	3
P9	-------	6	2	---	2	2
P10	C2- D3	4	1	2	1	--
T		168	21	40	69	38

Nous remarquons dans ce tableau que l'enseignant P9 n'a pas répondu à cette question, 4 enseignants (P3 ; P6 ; P8 ; P10) ont défini le pgcd en donnant la réponse C1/ C2 et 5 autres enseignants (P1 ; P2 ; P4 ; P5 ; P7) se sont contenté de reformuler le pgcd sous la forme suivante : « *le PGCD (a, b) est le plus grand diviseur commun de a et de b* » pour répondre à cette question.

Notons que presque plus de tiers des élèves pour chaque enseignant a donné la réponse RM, et très peu des élèves ont réussi à définir le pgcd, ceci peut être expliqué par le fait que certains enseignants ont aussi donné la réponse RM : PGCD : Plus Grand Diviseur Commun.

Les élèves ont la tendance à donner la réponse RM même si leur enseignant donne la bonne réponse. Nous remarquons qu'un nombre élevé des élèves (11 élève sur 16 pour P6, et 4élèves sur 7 pour P8) donne la réponse RM dans le cas où leur enseignant définit le pgcd. Ceci met une évidence qu'il y une différence entre le choix des enseignants qui tente de se conformer aux manuels et le choix des élèves qui expriment dans leur propre langage.

Quant aux types des définitions proposées par les élèves ayant donné une réponse correcte par rapport à leur enseignant sont :

- Pour l'enseignant qui n'a pas répondu à cette question **P9**, 2 sur 6 de leurs élèves ont défini le pgcd en utilisant la définition D2. Un de ces deux élèves a donné la réponse C1 dans un langage mathématique et l'autre a donné la réponse C2 dans un langage courant.

- Pour les 4 enseignants (P3 ; P6 ; P8 ; P10) ayant donné une définition du pgcd, ils ont donné une réponse C1 (1rép) et C2 (3 rép).

- P3 : L'enseignant a donné D3 de la manière suivante: « *C'est le plus grand nombre entier qui appartient à Div (a) ∩ Div (b).* ».

La définition de l'enseignant P3 associe le PGCD aux entiers au sens de l'ordre naturel. Cette définition proposée par P3 est différente de celle proposée par leurs élèves ayant réussi à définir le PGCD (6 élèves sur 29) sauf un seul élèves qui a donné D3.

Les cinq élèves ont donné D2 sans associer le PGCD aux entiers.

- P6 : cet enseignant a donné la définition D3 dans sa réponse C2 :

« PGCD : plus grand commun diviseur

a = {d1, d2, ….dm} b= {p1, p2, ….pn} diviseur commun (a, b) = {e1, , ….el} »

Aucun de ses élèves (16 E) n'est pas arrivé à définir le pgcd.

- **P8 :** il a donné la réponse C2 avec le type de définition D2 comme le « *Plus grand nombre qui divise les deux à la fois.* ». Leurs élèves (7 élèves) n'sont pas arrivés à donner une définition du pgcd.

- **P10 :** L'enseignant qui a donné la réponse C2, a fait référence dans sa définition opératoire du pgcd au type D3 : « *On regarde tous les diviseurs des 2nb et on prend le plus gr commun.* »

Leurs élèves (4 E) n'ont pas réussi à définir le pgcd sauf un seul élève qui a donné la réponse C2 avec le type de définition D2 au sens de l'ordre de divisibilité sans associer le PGCD aux entiers.

Ainsi, P3 est le seul enseignant qui a précisé que cet objet mathématique concerne les entiers, mais ceci n' pas pris en compte de leurs élèves.

La définition D1 qui montre l'aspect existence et l'unicité du pgcd est absent dans la réponse des enseignants, et les enseignants ont la tendance à utiliser la définition D3 au sens de l'ordre naturel alors que leurs élèves privilégient la définition D2.

Les enseignants ont défini le pgcd dans un langage mathématique, alors que le langage courant était plus présent dans la réponse de leurs élèves.

- Pour les 5 enseignants (P1 ; P2 ; P4 ; P5 ; P7) ayant donné la réponse RM de la définition de pgcd, leurs élèves ayant réussi à définir le pgcd, ont donné la réponse suivante :

- **P1 :** 5 élèves sur 30 sont arrivés à définir le pgcd en donnant la définition D2 dans un langage courant. Parmi les 5 élèves, un élève a réussi à donner la réponse C1, et le reste a donné la réponse C2 de la manière suivante :

« C'est le plus grand nombre par lequel on peut diviser 2 nombres »

- **P2 :** 2 élèves sur 30 ont défini le pgcd dans un langage courant en donnant la réponse C2 et utilisant D2 (1rép) et D3 (1rép).

- **P4 :** 2 élèves sur 21 ont donné dans leur réponse C2, la définition D2 dans un langage mathématique (1rép) et dans un langage courant (1rép).

- **P5 :** Un seul élève sur 17 a défini le pgcd dans un langage courant en donnant la définition D2 dans sa réponse C2.

- **P7 :** 2 élèves sur 8 ont donné une définition du pgcd, un de deux élèves a défini le pgcd dans un langage courant en donnant la définition D2 dans sa réponse C1, et l'autre élève a utilisé la définition D3 dans sa réponse C2.

Ainsi, la plupart des élèves dont leur enseignant a donné la réponse de reformulation du pgcd, n'ont pas la familiarité avec les entiers, par contre ils ont donné la définition D2 et dans un langage courant.

3.2.2 Méthodes de la recherche de PGCD

Nous présentons dans le tableau ci-dessous la réponse des enseignants avec la réponse de leurs élèves à la question de la recherche de PGCD. Nous rappelons que l décomposition en facteurs premiers est noté par (D) ; l'algorithme d'Euclide (E) ; la soustraction successive (S) et la définition opératoire (O).

P	**Réponse P**	Nombre des élèves	**Réponse E**						
			2 méthodes			1 méthode		Aucune méthode	Autre
			CC	CF	FF	C	F		
P1	Deux méthodes : Euc +Déc	30	2	---	----	7	7	12	2
P2	Une méthode : Déc	30	2	---	----	5	3	19	1
P3	Deux méthodes : Euc +Déc	29	12	2	----	15	-----	---	--
P4	Deux méthodes : Ensemblistes +Déc	21	4	1	---	3	4	9	--
P5	Trois méthodes : Ensemblistes + Euc +Déc	17	1	---	1	2	4	9	--
P6	Une méthode: Déc	16	2	1	----	2	4	7	--
P7	Deux méthodes : Euc +Déc	8	2	3	----	1	1	1	--
P8	Une méthode : Ensemb	7	4	--	---	2	----	1	--
P9	Une méthode: Déc	6	1	---	----	1	1	3	--
P10	Deux méthodes: Euc +Déc	4	----	---	---	1	3	----	--
T			30	7	1	39	27	61	3

Le premier constat de ce tableau est que le nombre des élèves qui n'ont pas utilisé une méthode pour déterminer le pgcd s'élève lorsque leur enseignant ne propose que la décomposition en facteurs premiers. Il parvient à deux tiers des élèves pour P2, et à la moitié des élèves pour les deux enseignants P6 et P9, ce qui montre que la décomposition en facteurs premiers est une méthode difficile à mettre en place pour les élèves.

Pour confronter les méthodes suivies par les élèves et celles de leur enseignant, nous regroupons les enseignants en trois catégories :

- Enseignants (P2, P6, P8, P9) ont proposé une méthode.
- Enseignants (P1, P3, P4, P7, P10) ont choisi deux méthodes.

- Enseignant P5 a proposé trois méthodes.

Nous présentons la réponse de leurs élèves suivant à ces catégories.

- Enseignants (P2, P6, P8, P9) ayant proposé une méthode : P2, P6, P9 ont proposé (D), alors que P8 a utilisé (O).

Pour les 3 enseignants ayant proposé (D), la réponse de leurs élèves est la suivante :

- **Elèves de P2 :** deux tiers de leurs élèves n'ont pas donné une réponse, ceci montre que leurs élèves ont une difficulté à mettre en place cette technique.

7 sur 30 de ses élèves ont réussi à répondre correctement à cette question, dont 3 élèves seulement s'accordent avec leur enseignant dans l'utilisation (D) comme une seule méthode pour calculer le pgcd, et le reste utilisent au moins une des méthodes rencontrées en classe de troisième.

- **Elèves de P6 :** le choix de P6 de la technique (D) n'a pas donné lieu d'avoir des réponses chez la moitié de leurs élèves. 5 sur 16 de leurs élèves ont donné une réponse correcte. Un seul élève a donné une réponse identique à son enseignant. Les 4 élèves restants, leur choix est différent de celui de leur enseignant, ils ont privilégié : S (2rép) et S+ E (2rép).

- **Elèves de P9** : la moitié de leurs élèves n'ont pas répondu. 2 sur 6 de leurs élèves ont donné une réponse correcte. Contrairement au choix de leur enseignant pour (D), ils ont utilisé (O) (1rép) et E + O (1 rép).

- **Elèves de P8 :** Le choix de P8 de mettre en place (O) ne se trouve pas dans la réponse de leurs élèves sauf un seul élève qui a proposé (O).

Le reste de leurs élèves 5 sur 7 ont proposé E (2 rép) et E + S (3 rép)

Ainsi, nous trouvons que le choix des enseignants de proposer (D) n'a pas donné lieu d'avoir des réponses, et que ce choix est différent de celui chez leurs élèves qui tentent de mettre en place les techniques déjà étudié en Troisième.

- Enseignants (P1, P3, P4, P7, P10) ont choisi deux méthodes.

Les enseignants P1, P3, P7, P10 ont proposé deux méthodes (E) + (D), tandis que P4 a mis en place la technique (O). Voici la réponse des élèves :

- **Elèves de P1 :** 9 sur 30 élèves ont réussi à utiliser correctement au moins une méthode. Le choix de P1 pour proposer E et D ne s'est fait que par 2 élèves. Le reste des élèves ont proposé uniquement une seule technique : S (6rép) et D (1rép).

- **Elèves de P3** Tous les élèves (29 élèves) ont réussi à donner une réponse correcte à cette question. 11 élèves ont donné une réponse identique à leur enseignant en utilisant E et D.

Un seul élève a donné E et O.

Pour ceux qui ont donné une seule technique, 8 élèves ont utilisé E et 7 autres élèves ont proposé D. Notons enfin qu'un élève a donné une réponse correcte pour E avec une réponse fausse de S, un autre élève a correctement proposé O pour une réponse fausse de D.

- **Elèves de P7 :** 6 sur 8 élèves ont donné une réponse correcte dont 1 élève a utilisé E et deux autres ont proposé les deux techniques : E et D. Trois autres élèves ont utilisé correctement E pour une réponse fausse de D (1 rép) et de S (2 rép).

- **Elèves de P10 :**1 élève sur 4, a utilisé correctement E pour répondre à cette question.

- En ce qui concerne l'enseignant **P5** qui a proposé trois méthodes : E+ D+ O, presque la moitié de leurs élèves n'ont répondu. 3 élèves seulement sur 17ont correctement répondu. un élève a choisi E et S, les deux autres élèves ont donné E (1rép) et S (1rép).

Ainsi, le choix des enseignants de proposer la technique de D est différent de celui de leurs élèves.

Ce qui ressort de la confrontation des réponses des élèves avec les réponses de leurs enseignants pour cette question, c'est qu'il y une différence significative entre ce que les enseignants définissent et mettent en place comme des techniques pour résoudre ce type de tâche, et ce que les élèves mobilisent dans leurs propre langage et proposent comme techniques. Notons que la méthode qui utilise la définition du pgcd est très peu utilisée par les enseignants et leurs élèves.

3.3. Question concernant la définition des nombres premiers et les méthodes utilisées.

Le croisement de cette question est aussi subdivisé en deux parties, la première est le croisement de la réponse des enseignants et leurs élèves pour la définition de nombres premiers, la deuxième est les méthodes utilisées pour déterminer la primalité des entiers.

3.3.1 Définition de nombres premiers

Nous présentons dans le tableau ci–dessous le croisement des donnés des élèves et de leur enseignant, en rappelant que la réponse correcte est divisée en C1 (réponse correcte complète associés aux entiers) et C2 (réponse correcte non complète n'est pas associée aux entiers).

P	**P** /définition		**E**			
	Réponse	Quel concept renvoi	C	F	NR	T
P1	C1	Diviseur	19	10	1	30
P2	C1	Diviseur	18	11	1	30
P3	C1	Diviseur	18	11	---	29
P4	C1	Diviseur	13	3	5	21
P5	Non répondu	Non répondu	5	7	5	17
P6	C1	Divisibilité	5	8	3	16
P7	C1	Diviseur	5	2	1	8
P8	C2	Diviseur	5	----	2	7
P9	C2	Diviseur	2	3	1	6
P10	C1	Divisibilité	4	---	---	4
T			94	55	19	186

Nous remarquons que presque les deux tiers des élèves pour chaque enseignant ont donné une définition correcte des nombres premiers, sauf les élèves des enseignants P5 et P6, qui n'ont pas dépassés le tiers pour la réponse correcte.

En générale, la réussite des élèves à définir les nombres premiers est plus élevée que leur réussite à définir le pgcd ; comme nous l'avons déjà dit, ceci laisse penser que les élèves peuvent définir un objet lorsque il s'agit d'une propriété et ils leur pose une difficulté lorsque il s'agit d'une relation entre deux objets.

Pour présenter le croisement des réponses des enseignants avec leurs élèves, nous regroupons les enseignants en trois catégories, afin de présenter ensuite la réponse de leurs élèves suivant à ces catégories :

Enseignant P5 n'a pas donné une définition des nombres premiers.

Enseignants P1, P2, P3, P4, P6, P7, P10 ont donné la réponse C1.

Enseignants P8, P9 ont donné la réponse C2.

- L'enseignant P5 qui n a pas défini les nombres premiers, presque le tiers de leurs élèves ont donné une réponse correcte C2. Parmi les 5 élèves ayant correctement défini les nombres premiers, 4 élèves ont donné une réponse C2-1 et un autre a donné la réponse C2-2. Pour la syntaxe, 3 élèves ont utilisé « divisible » et un autre a utilisé « Pouvoir être divisé ».

Pour les deux enseignants **P8 et P9** ayant donné la réponse C2, ils ont proposé la définition en référence au diviseur de la manière suivante :

P9 : *nombre qui n'a que deux diviseurs 1 et lui –même.*

- **Elèves de P9 :** conformément à la réponse de leur enseignant, ils ont donné la réponse C2, en faisant référence au diviseur (3 rép) et à la divisibilité (1 rép) et à la pouvoir être divisé (1 rép).

- **Elèves de P8 :** 2 élèves sur 6 ont donné une réponse correcte. Un élève s'accorda avec son enseignant dans la réponse C2 et un autre élève donne la réponse C1, en faisant référence au diviseur et à la divisibilité.

Pour les trois enseignants P1 et P2 et P3, presque deux tiers de leurs élèves ont donné une réponse correcte. Les enseignants P4 et P7, plus de la moitié de leurs élèves ont définit correctement les nombres premiers. Pour P10, tous ses élèves ont réussi à donner une définition correcte. Concernant P6, moins de la moitié ont donné une réponse correcte.

Notons que les enseignants ont définition les nombres premiers en renvoyant le défini au concept de diviseur, alors que la plupart des élèves ont exprimé la définition en terme de divisibilité, et sans préciser qu'elle concerne les entiers.

Ce qu'il ressort de la confrontation les réponses des enseignants avec celles de leurs élèves, que les enseignants précisent que les nombres premiers sont des entiers naturels alors que leurs élèves ne le font pas, ceci montre que les élèves n'ont pas la conscience que les nombres premiers sont structurés autour des entiers naturels, comme conséquence, ils ne peuvent pas expliquer que les objets d'arithmétique concernant seulement les entiers.

3.3.2 Méthodes utilisées pour déterminer la primalité des nombres

Nous présentons dans le tableau ci-dessous la réponse des enseignants et la fréquence des élèves ayant utilisé une méthode pour justifier leur réponse pour a, b, c.

Nous rappelons que M1 : Diviser par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$.

M2 : Diviser par tous les nombres successifs jusqu'à ce que le quotient « soit » plus petit que le diviseur.

M0 : Diviser par tous les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11

P	Réponse P	Nombre des élèves	Réponse correcte E					
			a		b		c	
			RC	Méthode	RC	Méthode	RC	Méthode
P1	Deux méthodes : Crible et M1	30	25	24	23	10	24	10
P2	M1	30	26	24	19	12	13	6
P3	M1	29	28	27	21	12	18	9
P4	Deux méthodes : Critères de divisibilité et M1	21	14	12	13	10	10	9
P5	Critères de divisibilité	17	12	10	7	2	6	2
P6	M1	16	7	6	9	4	4	0
P7	--------------------	8	8	6	6	5	4	4
P8	M1	7	4	4	4	3	4	3
P9	M2	6	4	3	4	2	4	2
P10	M1	4	4	4	4	4	4	4
T		168	132	120	110	59	91	49

Comme nous l'avons déjà vu, la réussite des élèves pour a est plus élevé que celle pour b et c. Certains élèves ayant réussi à donner une réponse correcte pour b et c n'arrivent pas à justifier leur réponse, ceci montre certainement une difficulté face à déterminer la primalité des grands nombres impairs.

Pour montrer les méthodes correctement utilisés par les élèves par rapport à leur enseignant, nous regroupons d'abord les enseignants en trois catégories :

- Enseignant P7 n'a pas répondu à cette question.

- Enseignants P2 ; P3 ; P5 ; P6 ; P8 ; P9 ; P10 ayant donné une méthode.

- Enseignants P1 et P4 ayant donné deux méthodes.

Nous présentons les méthodes suivies par les élèves suivant les trois catégories :

- **Enseignant P7 :** il n'a pas répondu à cette question. Tous ses élèves (8 élèves) ont donné une réponse correcte pour (a) avec les critères de divisibilité. Les réponses correctes sont diminuées pour (b) et (c). Les élèves ont utilisé M0 (3rép) et M2 (2 rép) pour b, et pour c ils ont utilisé M2 (1rép).

- **Enseignant P1 :** il s'appuie dans sa réponse sur le Crible d' Eratosthène et M1. Mais ses élèves ont utilisé pour a : les critères de divisibilité (21 rép), décomposer 98 en deux facteurs (2 rép) et définition de nombres premiers (1 rép). Pour b et c : 10 élèves seulement sont réussi à déterminer la primalité des nombre 89 et 599 en utilisant la définition des nombres premiers (8 rép) et M0 (2 rép).

- **Enseignant P4 :** il a donné les techniques : Critères de divisibilité et M1. Leurs élèves ont utilisé pour a : les critères de divisibilité (8 rép), la définition de nombres premiers (3 rép) et la décomposition en facteurs premiers (1 rép), pour b et c : 10 élèves seulement ont réussi à déterminer la primalité des nombre 89 et 599 en utilisant la définition des nombres premiers (8 rép) et M0 (2 rép).

Concernant les enseignants P2 ; P3 ; P5 ; P6 ; P8 ; P9 ; P10 ayant proposé M1 comme une méthode pour déterminer la primalité des nombres, nous présentons leurs réponse avec celles des élèves pour chaque enseignant

- **Enseignant P2 :** la plupart de leurs élèves ont donné une réponse correcte pour (a) en utilisant les critères de divisibilité (21 rép), la décomposition en facteurs premiers (2 rép) et la définition de nombres premiers (1 rép). La technique M1 proposée par P2 n'est utilisée que par un seul élève pour c. Le reste des élèves ont utilisé la définition des nombres premiers (11 rép) et M0 (1 rép) et seulement 6 sur 13 élèves ont justifié leur réponse en s'appuyant sur la définition de nombres premiers.

- **Enseignant P3 :** La technique M1 proposée par P3 est absente chez leurs élèves (29 élèves) sauf un élève qui a mis en place M1 pour c.

Ceux qui ont justifié leur réponse pour a, ont utilisé les critères de divisibilité (22 rép), la décomposition en facteurs premiers (4 rép) et la définition de nombres premiers (1 rép).

Ceux qui ont justifié leur réponse pour b et c, ont utilisé la définition des nombres premiers (9 rép), les critères de divisibilité (rép) et M0 (rép) et la table de Crible d'Eratosthène (1rép), et pour la partie c, 8 élèves ont proposé la définition de nombres premiers et 1 élève a utilisé M1.

- **Enseignant P6 :** 6 sur 7 élèves ayant donné une réponse correcte à la partie a, ont utilisé les critères de divisibilité, et 4 sur 9 élèves ont réussi à justifier leur réponse en s'appuyant sur la définition des nombres premiers pour la partie c, et aucun élève n'a proposé une méthode pour justifier sa réponse à la partie c.

- Les 4 élèves ayant répondu correctement à la première partie de cette question ont proposé les critères de divisibilité (3 rép) et la définition des nombres premiers (1 rép), ils ont proposé M0 (2rép) et la définition des nombres premiers (1rép) pour la partie b et c.

- Les 4 élèves ayant répondu correctement à la partie a, ont proposé les critères de divisibilité, ils ont proposé la définition des nombres premiers (3rép) et M0 (2rép) pour la partie b et c.

Les élèves dont l'enseignant a proposé M2 comme une méthode pour déterminer la primalité des nombres, ont justifié leur réponse pour la partie a en s'appuyant sur les critères de divisibilité (2 rép) et sur le la définition de nombres premiers (1 rép), et 2 sur 4 élèves ont utilisé la définition de nombres premiers pour les deux partie b et c.

Ainsi, nous trouvons que la plupart des enseignants proposent M1 à leurs élèves pour déterminer la primalité des nombres, alors que la plupart de leurs élèves s'appuient sur la définition de nombres premiers pour justifier leur réponse. Or, la définition de nombres premiers ne les amène pas à déterminer la primalité des nombres surtout de grande taille.

Ils ont tenté de proposer M1 et M2 mais ils n'arrivent pas à finir jusqu'à bout, ce qui justifie qu'ils ont M0 pour justifier leur réponse, ceci peut être expliqué par la fait que les deux méthodes leur posent des difficultés.

3.4 Question relative à déterminer la divisibilité des nombres à partir de la décomposition en facteurs premiers.

Soit $M = 3^2 \times 5^2 \times 7$

a) *M est-il divisible par : 7, 9, 2, 11,63 ? Justifiez votre réponse.*

b) $B = 3^2 \times 5^3 \times 7$, *B est- il diviseur de M. et pourquoi ?*

c) $F= 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$, *est- il multiple de M. et pourquoi ?*

Un enseignant n'a pas répondu à la totalité de cette question.

Parmi les 9 enseignants ayant répondu, 2 enseignants (P1 et P8) ont donné la réponse de leur élèves et les 7 autres enseignants ont donné leur propre réponse.

Le tableau ci-dessous présente l'ensemble de données des réponses des élèves par rapport à la réponse de leur enseignant à cette question. Pour faciliter la lecture de ce tableau, nous signalons que le colonne 2 présente la réponse des enseignants à la question quelles solutions, selon les enseignants, pourraient être proposées par les élèves et les corrections qu'ils leur donnent, et la colonne 3 présente la réponse des enseignants s'ils proposent cet exercice à leurs élèves, la colonne 4 présente le nombre total des élèves pour chaque enseignant, et nous présentons la réponse des élèves par rapport à leur enseignant à la question a dans la colonne E(a), à la question (b) dans la colonne E(b) et à la question (c) dans la colonne E(c). Nous rappelons enfin que les méthodes qui peuvent être mis en ouvre selon l'analyse à priori :

- T1 : c'est l'utilisation de la décomposition en facteurs premiers.
- T2 : calculer la valeur de M et effectuer la division de M par les nombres donnés.

P	P : Q1	P : Q2	Nombre Total E	E (a)			E (b)			E (c)		
				C	F	NR	C	F	NR	C	F	NR
P1	**E** : T1 et T2 → **P** : T1	Oui	30	25	1	4	12	8	10	13	4	13
P2	T1	Oui	30	16	2	12	8	6	16	6	7	17
P3	T1 (a) et NR (b et c)	Oui	29	27	0	2	18	3	8	15	2	12
P4	T1(a) et Déf (b et c)	Oui	21	13	1	7	3	7	11	6	2	13
P5	Déf (a) et T1(b et c)	Oui	17	11	0	6	1	8	8	5	3	9
P6	T1	Non	16	2	4	10	2	4	10	2	3	11
P7	Déf	Non	8	6	1	1	1	4	3	1	2	5
P8	**E** : M1 → **P** : M2	Oui	7	4	0	3	0	3	4	2	0	5
P9	T1	Oui	6	3	2	1	2	1	3	3	1	2
P10	NR	NR	4	3	0	1	3	0	1	2	1	1
--	---	--	18	12	5	1	7	9	2	10	2	6
		T	186									

Pour croiser les méthodes mises en œuvre par les élèves ayant correctement répondu à cette question avec celles proposées par leur enseignant, nous présentons la réponse des élèves suivant à la catégorie que nous allons faire sur la réponse des enseignants :

- Pour l'enseignant **P10** qui n a pas répondu à cette question : ses élèves pour a (4 élèves) ont utilisé T2(1rép) et T1 (2 rép), et ont utilisé exclusivement T1 pour les deux parties b (3rép) et c (2rép).

- **P8 :** Il a supposé que ses élèves (7 élèves) vont proposer T2, et il leur propose comme une solution T1, alors que leurs élèves ayant proposé correctement une méthode, ont utilisé les deux méthodes T2 (1rép) et T1 (2rép) seulement pour la partie (a), car ils ne sont pas arrivés à donner une réponse correcte pour (b), et les élèves ayant correctement répondu à la partie c (2 élèves) n'ont pas justifié leur réponse.

  - L'autre enseignant **P1** qui a donné la réponse de leurs élèves (30 élèves), a supposé que ses élèves vont utiliser deux méthodes T1 et T2 : ils effectuent la division de M par les nombres donnés après calculer la valeur de M et ils utilisent la décomposition en facteurs premiers pour les nombres figurant explicitement dans M, mais ils n'arrivent pas à l'utiliser pour les nombres qui figurent implicitement dans M , alors que leurs élèves ayant réussi à proposer correctement une méthode, ont utilisé les deux méthodes d'une façon équitables (9 fois pour chacune) pour (a) . Le nombre des élèves ayant donné une réponse correcte pour la partie (b) a diminué (9rép), la méthode exclusivement utilisé est T1 (9rép) et la plupart des élèves ayant justifié leur réponse correcte pour (c) ont utilisé T1 (6 rép) et peu des élèves ont utilisé T2 (1rép).

Ainsi, les enseignants pensent que leurs élèves vont recourir à utiliser T2 dans laquelle les élèves se trouvent dans une situation familière, car avec la méthode T1 ils sont face à une nouvelle situation qui n'est pas habituelle pour eux, un des problèmes qui leur rencontre, ils ne peuvent pas déterminer la divisibilité d'un nombre décomposé en facteurs premiers par des nombres qui ne figurent pas dans la forme décomposé de ce nombre. Néanmoins, un certain nombre d'élèves ont utilisé T1.

Pour les 7 enseignants ayant donné leur propre réponse, nous les regroupons en 4 catégories :

1. Enseignants P2 ; P6 et P9 ont répondu à la totalité de cette question en utilisant T1.
2. Enseignants P4 et P5 ont donné une réponse à cette question en utilisant la décomposition en facteurs premiers pour (a) ou (b et c) et en faisant référence à la définition de divisibilité pour (a) / la définition de multiple et de diviseur pour (b et c).
3. Enseignant P3 ayant seulement répondu à 5(a).
4. Enseignant P7 s'est contenté de signaler que la solution est basée sur la définition de divisibilité pour a et sur la définition de multiple et diviseur pour b et c sans proposerr une méthode.

Nous présentons la réponse des élèves par rapport à leur enseignant suivant à ces catégories :

1. Pour P2 ; P6 et P9 ayant utilisé T1 pour répondre à cette question, presque la moitié de leurs élèves ont donné une réponse correcte pour (a) et moins de tiers de leurs élèves ont correctement répondu pour b et c. Les élèves d'un enseignant ont exclusivement proposé T1, alors que pour les deux autres enseignants, leurs élèves ayant utilisé T1 sont peu nombreux, voici l'ensemble de leur réponse :

- **P2 :** le choix de P2 pour proposer T1 est identique à celui fait par leurs élèves ayant proposé correctement une technique. 12 élèves ont proposé T1 pour a. ce nombre a diminué pour b et c, 7 élèves ont donné T1 pour b, et 4 élèves ont utilisé T1 pour la partie c.
- **P6 :** Il a signalé qu'il ne propose pas cet exercice dans son cours ; de fait, aucun de ses élèves (16 élèves) n'a réussi à proposer correctement une technique pour répondre à cette question
- **P9 :** l'enseignant P9 a indiqué qu'il fait vivre cet exercice dans son cours en donnant T1. Cependant, aucune technique n'est proposée par ses élèves (6 élèves) pour a et c. Pour b, un élève ayant correctement répondu, a proposé T1.

2. Pour les enseignants P4 et P5 qui ont fait référence à la définition de divisibilité / diviseur dans leurs réponse avec T1, leurs élèves ont donné les réponses suivantes :

- **P4 :** Pour (a), l'enseignant P4 a indiqué qu'il propose cet exercice dans son cours ; peu de leurs élèves ont pu accomplir cet exercice. 6 élèves sur 21ont utilisé T1 et 2 autres élèves ont utilisé T2. Pour (b), 2 élèves ont proposé uniquement T1. Parmi les 6 élèves ayant donné une réponse correcte pour c, T1 (4rép) et T2 (1ré).

- **P5 :** cet exercice est vivant dans la pratique de l'enseignant P5 qui a proposé une définition pour la partie a, et il donné T1 comme une solution pour b et c. Concernant ses élèves (17 élèves) ont trouvé cet exercice difficile. Seulement 2 élèves ont correctement proposé T1 pour a ; un seul élève a donné T1 pour b. Pour la partie c, 3 élèves ont proposé une technique : T2 (1rép) et T1(2rép)

3. L'enseignant **P3** qui n'a répondu qu'à la partie (a), son choix pour proposer T1 est identique à celui fait par ses élèves ayant correctement proposé une technique. Ceci peut être expliqué par le fait que cet exercice est vivant dans le cours d'arithmétique, comme P3 l'a signalé.

Pour a, 17 élèves ont proposé T1 et 2 autres élèves ont utilisé T2. Et pour la partie (b), 12 élèves ont proposé T1 et 2 autres élèves ont utilisé T2, alors que pour la partie(c) les élèves ayant justifié leur réponse correcte ont utilisé uniquement T1 (12 rép).

4. Pour l'enseignant **P7** qui a signalé qu'il ne propose cet exercice dans son cours. Pour accomplir cet exercice, il s'appuie sur la définition de divisibilité/ diviseur. Un nombre non négligeable de ses élèves a donné une réponse correcte à cet exercice. 3 élève ont utilisé T1 et 2 autres élèves ont utilisé T2 pour a. un seul élève a donné pour b et c T1.

Le tableau suivant nous montre que les élèves ont une difficulté à répondre à cette question en utilisant la décomposition en facteurs premiers avec les premiers qui ne figurent pas dans M.

Nombres	7	9	63	2	11
M1	10	15	12	10	8
M2	53	52	39	6	8

Notons que la plupart des enseignants (7 sur 9 enseignants) ayant accepté à répondre à cette question ont signalé qu'ils proposent cet exercice dans leur pratique.

Ce qu'il ressort de l'analyse de cet exercice, est que les élèves ont trouvé une difficulté à résoudre cet exercice malgré qu'il soit vivant dans leurs cours. Les deux parties b et c sont les plus difficiles surtout la partie b, ceci peut être justifié par le fait la résolution de b demande de montrer le contraire.

3.5. Question relative à la recherche d'un multiple commun de A et C

$$\mathbf{A} = 2^2 \times \mathbf{3} \times \mathbf{5^2} \times \mathbf{7} \ \textbf{et} \ \mathbf{C} = 3^3 \times 5^4 \times \mathbf{7} \times 11$$

Deux enseignants P9 et P10 n'ont pas répondu à cette question, leurs élèves n'ont pas réussi à donner une réponse correcte à cette question, ceci montre que leurs élèves ont une difficulté à traiter cette question.

Parmi les 8 enseignants ayant accepté de répondre à cette question, deux enseignants ont donné la réponse de leurs élèves qui font le produit AC. Les deux enseignants proposent à leurs élèves le plus petit multiple commun comme correction à cet exercice.

> *P4 : Ils vont prendre le produit A ×C (sans penser à chercher un plus petit) ou 2 × A ×C etc. Il faudra insister : comment déterminer le plus petit ?*
>
> *En revanche, on pourrait peut être là-énonce donner A et S sous forme d'entiers naturels, laisser chercher les élèves : trouver des multiples puis considérer toutes la décomposition en facteurs premiers pour leur faire trouver la propriété. Néanmoins, il faudrait peut être pour cela des A et C plus simples.*

Cet exercice n'est pas vivant dans la pratique de P4. De fait, ses élèves (21 élèves) n'ont pas pu donner une réponse correcte : 12 réponses fausses et 9 non répondu.

L'enseignant P2 propose cet exercice à ses élèves dans son cours dans le calcul avec des fractions, cependant, aucun de ses élèves (30 élèves) n'a pas réussi à donner une réponse correcte, la moitié des élèves ont donné une réponse fausse et l'autre moitié n'a pas répondu.

Pour les 6 enseignants ayant donné leur propre réponse à cette question, nous les regroupons en quatre catégories :

- Enseignants (P3, P8) ont donné le produit AC comme un multiple commun de A et C.
- Enseignants (P1, P6) ont donné le plus petit multiple commun.
- Enseignant P7 a donné le produit AC et PPCM.
- Enseignant P5 a donné un diviseur commun.

Nous présentons la réponse des élèves correspondantes à leur enseignant suivant à ces catégories :

- Elèves des P3 : P3 ne propose pas ce type d'exercice dans son cours. Un grand nombre de leurs élèves ont donné une réponse erronée (18 rép). 5 sur 29 élèves ont réussi à donner une réponse correcte dont 3 élèves ont trouvé le produit AC et 2 autres élèves ont trouvé le PPCM.

- Elèves des P8 : l'enseignant P8 a indiqué qu'il propose cet exercice dans son cours. Cependant, 1 sur 7 élèves ont trouvé le ppcm. Le reste des élèves soit il n'a pas donné une réponse (4rép), soit il a donné une réponse erronée (2rép).

- Elèves des P1 : cet exercice est vivant dans la pratique de P1. Cependant, la majorité de ses élèves ont des difficultés pour résoudre cet exercice : réponse erronée (16 rép) et non-répondu (13rép). Un seul élève a correctement donné AC à partir de la forme décomposée de deux nombres.

- Elèves des P6 : Aucun des 16 élèves interrogés dans le questionnaire n'a donné une réponse correcte, la plupart 12/ 16 n'ont pas répondu et le reste ont donné une réponse fausse.

Ceci peut être expliqué par la réponse de leur enseignant qui a annoncé qu'il ne propose pas cet exercice dans son cours arithmétique.

- Elèves des P7 : l'enseignant P7 a donné le PPCM et le produit AC, et il a indiqué qu'il propose cet exercice dans son cours. Cependant, tous ses élèves (8élèves) ont donné une réponse erronée.

- Elèves des P5 : il est surprenant que l'enseignant P5 donne le diviseur commun comme une réponse à un multiple commun. Il a annoncé qu'il propose cet exercice dans son cours pour faire une révision sur les fractions irréductibles. Aucune réponse correcte ne se trouve chez ses élèves (17 élèves) : pas de réponse (13 rép) et réponse erronée (4rép).

Conclusion

La mise en perspective des réponses des élèves et des enseignants confirme le décalage entre les attentes des enseignants et ce que proposent les élèves, ceci n'étant pas toujours dans le même sens : parfois certains élèves utilisent des techniques que les enseignants ne s'attendent pas à trouver ; d'autre fois, bien que certains choix ont été faits explicitement dans la classe, on ne les retrouve pas chez un nombre significatifs d'élèves. Enfin, de manière peu surprenante, lorsqu'un type d'exercice n'est pas du tout abordé en classe, les élèves en général ne proposent pas de réponse.

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Dans ce travail de recherche, nous nous sommes intéressée à une étude didactique de l'arithmétique au sens de théorie des nombres dans l'objectif d'étudier certains choix de l'enseignement de l'arithmétique en France, en partant de l'hypothèse que la place de l'arithmétique reste minorée dans le curriculum français. Ce point de départ nous a amenée à conduire une étude permettant de comprendre plus en profondeur ce phénomène dans les programmes français du secondaire et à identifier certaines contraintes institutionnelles après la réintroduction de l'arithmétique dans l'enseignement secondaire et les effets de ces contraintes sur la pratique des enseignants et les acquis des élèves par rapport à un objet de savoir.

Pour atteindre cet objectif, nous avons tout d'abord mené une étude de l'organisation mathématique dans le savoir savant. Cette étude a montré, d'une part, la diversité des différents choix possibles pour proposer les objets de l'arithmétique, et d'autre part a permis d'identifier les types de définitions rencontrées dans plusieurs manuels universitaires qui nous ont servi de référence. Cette étude a montré que l'approche du PGCD par la décomposition en facteurs premiers fait appel à une approche théorique, reposant sur le théorème fondamental de l'arithmétique ; tandis que la mise en avant de l'algorithme d'Euclide autorise une approche moins théorique et plus opératoire.

Nous avons mené ensuite une analyse institutionnelle de l'arithmétique dans une perspective écologique pour dégager les différents systèmes de contraintes et de conditions qui pèsent sur les évolutions de ce savoir au cours du processus de transposition didactique.

Pour faire cette étude, nous avons étudié les programmes de l'arithmétique à partir de1902 en dégageant les différents habitats et niches que l'arithmétique occupe dans l'évolution des programmes. Cette étude nous a permis de voir les variations dans les différentes façons possibles de présenter l'arithmétique dans l'enseignement secondaire en France, dont témoignent les programmes successifs. Dans la période classique (1902-1968), l'arithmétique, qui comportait les objets de la théorie des nombres et les objets tels que la numération décimale, les fractions ordinaires et décimales, reste relativement stable au collège. Les notions relatives aux entiers sont étudiées en classe de cinquième (division euclidienne et critères de divisibilité) et de quatrième (PGCD ; PPCM ; nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers). Deux niches sont associées à l'arithmétique dans cette période : « Théorie des nombres » ; « Calcul numérique ». La période des mathématiques modernes (1969-1985) va lui accorder une troisième niche « Ensembliste » et une quatrième niche que l'on trouve seulement dans les manuels : la niche « Structurelle ». L'arithmétique se limite à l'étude des notions relatives aux entiers en classe de cinquième. Mais la période de la contre-réforme (1986-1996) va voir la quasi disparition de l'arithmétique des programmes de mathématiques, cependant la niche calcul reste timide dans les manuels.

A partir de la rentrée 2000, qui correspond au début de ce que nous avons appelé la période contemporaine, les programmes réintroduisent l'arithmétique dans l'enseignement secondaire au collège et au lycée dans l'esprit d'enseigner une arithmétique expérimentale par le bais d'un travail sur la démarche algorithmique avec l'outil informatique, en particulier en seconde. Or, cette volonté n'est pas reprise dans les manuels de cette classe. En fait, l'aspect algorithmique trouve une vie riche dans les manuels de troisième par le travail sur l'algorithme d'Euclide et celui des soustractions successives. Mais cet aspect est peu mis en œuvre avec l'outil informatique. Par contre, la niche algorithmique est très peu présente dans les manuels de Seconde, qui pour la plupart, ne font pas vivre la niche algorithmique par le bais de l'outil informatique et de la programmation.

Pour se conformer aux nouveaux programmes mis en place à la rentrée 2000, qui mettent de plus en plus l'accent sur l'intégration de l'outil informatique avec la démarche algorithmique, de nouveaux manuels comportant des modifications importantes sur ce sujet sont publiés en 2004 (ces manuels sont écrits par les mêmes auteurs que ceux des manuels de 2000 pour ceux que nous avons analysés). Cependant, les propositions de mise en œuvre d'une démarche algorithmique avec l'outil informatique restent minorées dans les manuels de seconde. De la même manière, il ressort de l'étude du rapport personnel des enseignants que l'usage de l'outil informatique en lien avec une démarche algorithmique en arithmétique a du mal à vivre dans leur pratique. Au vu de certains de nos résultats, nous avons fait l'hypothèse que le fait que la volonté des programmes de développer la niche algorithmique de l'arithmétique en lien avec l'informatique n'ait été que peu prise en compte dans les manuels, et soit difficilement viable dans pratique des enseignants, pourrait avoir été un argument pour la décision a priori paradoxale, de supprimer l'arithmétique en seconde au moment même où l'algorithmique apparaît comme objet d'étude dans cette classe à la rentrée 2009. Pour aller plus loin sur cette question, il faudrait à minima se rapprocher des concepteurs de programmes.

D'autre part, l'étude de la question de la reprise des notions d'arithmétique entre le collège et le lycée nous a montré qu'elle n'est pas un enjeu important dans les programmes et qu'elle est peu prise en compte dans les manuels modifiés en 2004. En fait, les programmes de Seconde ne rendent pas visibles les applications des notions étudiées au collège. La décomposition en facteurs premiers n'est pas utilisée pour la recherche du PGCD et du PPCM et n'est pas utilisée avec la notion de divisibilité. Ainsi, les notions d'arithmétique en seconde semblent isolées des connaissances arithmétiques étudiées au collège. Ceci est un deuxième facteur qui pourrait avoir contribué à la disparition de l'arithmétique en seconde. Cependant, les résultats du questionnaire proposé aux enseignants montrent que, face aux difficultés rencontrées par leurs élèves, ceux-ci prennent en compte dans leur pratique la question de la reprise des notions d'arithmétique étudiées au collège, à la fois pour les renforcer et pour s'appuyer sur ces connaissances pour les nouvelles notions au programme, en particulier en ce qui concerne la décomposition en facteur premier.

Les enseignants que nous avons interrogés via notre questionnaire sur les effets de la disparition de l'arithmétique des programmes de seconde sont partagés. Selon certains, cette disparition de l'arithmétique des programmes n'aura que peu d'effet compte tenu de ce qui se passe dans les classes, tandis que pour d'autres, elle risque d'entraîner un certain déséquilibre entre le collège et le lycée d'une part, et pour l'actuelle option de spécialité d'autre part.

Notons que cette modification des programmes déséquilibre le collège lui-même ; en effet, comme nous l'avons vu, la décomposition en facteurs premiers est réapparue dans les derniers programmes de troisième avec une absence institutionnelle notable des nombres premiers. Une des caractéristiques de l'enseignement de l'arithmétique qui se dégage de notre étude, c'est la très grande variété des choix possibles d'enseignement, que l'on trouve d'une part dans l'analyse de l'évolution des programmes que nous avons conduite, d'autre part dans la diversité des organisations mathématiques mises en place tant dans les manuels universitaires que dans les manuels de collège et de seconde. Parmi les conséquences de cet état de fait, nous retiendrons l'instabilité des notions d'arithmétique dans les programmes, en particulier en ce qui concerne les nombres premiers, l'instabilité des habitats et des niches pour l'ensemble de ces notions, particulièrement mise en lumière lors de la dernière réforme des programmes de seconde qui, de manière paradoxale, voit disparaître l'arithmétique au profit de l'algorithmique.

Nous avons mis en évidence dans nos différentes analyses que la distance entre le savoir savant, pris ici au sens du savoir académique enseigné à l'université, et ce que nous avons pu cerner du savoir enseigné à partir des réponses des enseignants était loin d'être négligeable. Les relations et les propriétés associées à l'arithmétique ne sont pas explicitées chez la plupart des enseignants, plus particulièrement dans leur définition de l'arithmétique ; la définition du PGCD proposée dans les manuels et, par un certain nombre d'enseignants ayant répondu à notre questionnaire, ne met pas en lumière ce qui relève de l'ordre divisibilité, se limitant à ce qui relève de l'ordre naturel, voire à une simple reformulation. En ce qui concerne la décomposition en facteurs premiers, son lien avec le théorème fondamental de l'arithmétique et l'importance de ce résultat d'existence et d'unicité ne sont pas mis en valeur dans les manuels et l'on peut faire l'hypothèse qu'il en est de même en classe. La dernière partie de notre travail portant sur le rapport personnel des élèves révèle un réinvestissement insuffisant des connaissances acquises en arithmétique dans des situations nouvelles. En effet, nous avons testé des situations qui nécessitent de l'élève une mobilisation des notions de divisibilité et de multiple commun avec la décomposition en facteurs premiers. Les résultats montrent que les élèves ont de nombreuses difficultés dans l'accomplissement de ces tâches et montrent un réinvestissement inadéquat des connaissances relatives à la relation de divisibilité et à la notion de multiple commun. Les élèves avaient des difficultés relatives à la décomposition en facteurs premiers,

Les résultats ont montré aussi que les élèves avaient des difficultés linguistiques. Ils ont une tendance forte à exprimer en termes de propriété au détriment de montrer les relations entre les entiers.

La mise en perspective des réponses des enseignants et des élèves a mis en évidence qu'il y a une différence significative entre ce que les enseignants expliquent des définitions et ce que les élèves expriment, ainsi que entre ce que les enseignants mettent en place des techniques et ce que les élèves développent pour résoudre les exercices.

Nous avons considéré ce travail comme un premier travail exploratoire, que nous souhaitons réinvestir lorsque nous serons de retour en Syrie, dans la suite du travail que nous avions initié dans notre master. L'étude conduite sur les organisations mathématiques, les définitions, les habitats et les niches possibles pour l'arithmétique fournissent une base de travail pour aborder d'autres systèmes éducatifs que le système français. Un résultat de ce travail que nous n'avions pas complètement anticipé est la question des difficultés langagières auxquelles sont confrontés les élèves dans la mesure où l'arithmétique met en jeu de nombreuses relations, et pas seulement des propriétés, et qu'une même relation donne lieu à des formulations variées selon le point de vue adopté. Ceci avait bien été mis en évidence dans les travaux anglo-saxons, nous l'avons retrouvé de manière importante dans les réponses des élèves français. La prise en compte des spécificités de la langue arabe, langue d'enseignement des mathématiques en Syrie, est une direction de recherche qui s'ouvre et qui s'inscrit dans un mouvement général de prise en compte de la diversité linguistique dans l'enseignement des mathématiques au niveau international (voir à ce sujet l'étude ICMI 21).

Un approfondissement de ce travail concerne l'étude des pratiques effectives de l'enseignement de l'arithmétique au collège en France, mais aussi à la transition école collège ; la fragilité des connaissances sur la division euclidienne qui apparaît dans notre étude alors qu'elle est travaillée depuis l'école primaire invite à un retour sur la transition école/collège. Nous avons souligné à plusieurs reprises les apports de l'arithmétique pour assurer la familiarité pour les nombres entiers, pour développer les compétences liées au raisonnement, et à l'algorithmique ; nous avons rappelé également que le travail sur les fractions mobilise de manière importante les apports de l'arithmétique, mais nous faisons l'hypothèse que d'autres domaines des mathématiques sont concernés. Une étude sur les fonctions que remplit l'arithmétique dans les autres domaines mathématiques, au-delà des exemples emblématiques des fractions, mériteraient selon nous d'être conduite, ceci afin de mieux cerner la perte que constitue la disparition de l'arithmétique pour l'ensemble des apprentissages mathématiques, au lycée mais aussi dans l'enseignement supérieur.

BIBLIOGRAPHIE

ANDREWS, E. G. (1971) *Number theory*, New York

ANSELMO, B. BONNET, M. et al (2004) *De l'arithmétique au collège*, IREM de Lyon.

APOSTOL, T, M. (1976) *Introduction to analytic number theory*, third printing (1986), New York.

ARSAC, G. DEVELAY, M. et TIBERGHIEN, A. (1989) La transposition didactique en mathématiques, In IREM et LIRDIS de Lyon (eds.), *La transposition didactique en mathématiques, en physique et biologie*, pp. 3-36. Lyon

ARSAC, G. (1992) L'évolution d'une théorie en didactique : l'exemple de la transposition didactique in *Recherche en didactique des mathématiques*, vol 12, n°1, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble (pp. 7 – 32)

ARTAUD, M. (1997) Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In C. Comiti et al. (eds) *Actes de la IX° école d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate, pp. 101-139.

ASSUDE, T, (1998) Evolution de l'enseignement de l'arithmétique et formation des maîtres, *Actes du XXVème Colloque COPIRELEM*, Loctudy, pp.103-118.

ASSUDE, T. & Gelis J-M. (2002) La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics, 2002, 50.3, 259-287.*

ASSUDE, T. GELIS, T-M. (2002) La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics, 2002, 50.3, 259-287.*

BATTIE, V. (2003) Spécificités et potentialités de l'Arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique, thèse, Paris7.

BATTIE, V. (2008) Cours à l'université de Claude Bernard Lyon 1, non publié

BROWN, A. THOMAS, K. TOLIAS, G. (2002) Conception of Divisibility: Success and Understanding, in *Learning and teaching number theory*, London.

CAMPBELL,S-R.(2002)Coming to Terms with Division: Preservice Teacher's Understanding, in *Learning and teaching number theory*, London.

CHEVALLARD, Y. (1991) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La Pensée Sauvage éd. (1ère édition : 1985).

CHEVALLARD Y. (1992) Concept fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique in *Recherche en didactique des mathématiques*, N° 12/1, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble pp. 75 – 111

CHEVALLARD, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, pp.222-265.

CHEVALLARD Y. (2003) Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques », in Communication aux *3es Journées d'étude franco-québécoises* (Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002) Paru dans S. Maury S. & M. Caillot (éds), *Rapport au savoir et didactiques*, Éditions Fabert, Paris, 2003, pp. 81-104.

DESTAINVILLE,.B et DUPUY.S et al…., (2005) *Pour un suivi en Arithmétique de la Troisième à la Terminale,* édition IREM de Toulouse, N° 172.

DONEDDU, A. (1962) *Arithmétique générale*, Dunod, Paris

DOUADY, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet in *Recherches en Didactique des mathématiques*, 7(2) ; La Pensée Sauvage, Grenoble.

DURAND-GUERRIER, V. & HERAUD, J.L. , 2006, Définitions et règles en mathématiques. Le mythe de la transparence, Presses Universitaires de Franche Comté dans *les actes des journées d'études Interactions Verbales, Didactiques et Apprentissage, IUFM de Lyon, 19-20 mai 2005.*

DURAND-GUERRIER, V. (2005) Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique, Note de synthèse pour l'habilitation à Diriger les Recherches, Université Lyon 1, IREM de Lyon.

GUEUDET, G., & TROUCHE L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. Education et didactique, 2(3) Vol 2, n°3, pp.7-33.

HARDY, G.H.& WRIGHT, E.M. (2007) tarduit par Sauvageot, F, « Introduction à la théorie des nombres » traduit « An Introduction to the Theory of Numbers ».

LAVAURS, P. (2002) Cours à Université Lyon I -'DEUG MIAS - Unit´e d'enseignement 11.

LEVEQUE, W, J. (1962) *Elementary theory of number*, United States of America.

MAJAJ, M. (2007), L'enseignement de l'arithmétique au collège en France et en Syrie, mémoire de DEA, Université Claude Bernard, Lyon 1.

MAJAJ, M. (2010) L'enseignement de l'Arithmétique au collège : éléments de comparaison entre la France et la Syrie, *Repères - IREM* n° 79, 73-88

MERCIER, A & De Koninck, J-M, (1994) *Introduction à la théorie des nombre,* Modulo, Canda.

NAGELI, H-H. (1998) *Mathématiques discrètes1, Fondements et arithmétique entière,* première édition. France.

NGUYỄN Chí Thành, (2005) *Etude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice,* thèse au sein de Laboratoire Leibniz – IMAG, Grenoble.

OUVRIER – BUFFET, C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques »,* Université Joseph Fourier- Grenoble 1.

OUVRIER – BUFFET, C. (2006) *Des définitions pour quoi faire ? Analyse épistémologique et utilisation didactique*, Education et sciences, édition Fabert.

PERRIN, D. (2005) *Mathématiques d'école, nombres, mesureurs et géométrie*, Cassini, Paris

PICHON, J. (1992) *Arithmétique Systèmes linéaires structures,* Edition marketing, Paris.

RAVEL, L. (2003) *Des problèmes à la classe: étude de la transposition didactique interne,*

SHOUP, V. (2005) *A computational Introduction to Number Theory And Algebra*, Cambridge university press.

VERGNAUD, G (2001) *Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance,* Actes du Colloque GDM, MONTREAL, mai 2001

WARUSFEL, A. ATTALI, P. et al, (2002) *Mathématiques : Arithmétique Cours & Exercices*, Vuibert, Paris.

ZAZKIS, R, (2000), *Factors, Divisors, and Multiples: Exploring the Web of Student's Connections,* Research in Collegiate Mathematics Education. Vol. 4 . 210-238.

ZAZKIS (2002) Langage of Number Theory : Metaphor and Rigor, in *Learning and teaching number theory,* London.

ZAZKIS, R. (1998). Divisors and quotients: Acknowledging polysemy. *For the Learning of Mathematics, 18*(3), 27-30.

ZAZKIS, R. (1999). Intuitive rules in number theory: Example of "the more of A, the more of B" rule implementation. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 197-209.

ZAZKIS, R. CAMPBELL. S. R. (1996). Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540-563

ZAZKIS, R. CAMPBELL. S. R. (1996). Prime decomposition: Understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 207-218.

ZAZKIS, R. LILJEDAHL, P. (2004). Understanding primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(3), 164-186

Programmes de collège et de Seconde

- Programmes de la période classique

- Programme de 1902 , *Plan d'études et programmes d'enseignement dans les lycées et collèges de garçons*, arrêtés du 31 mai 1902, Paris, imprimerie et librairie classiques DELALAIN FRERES , (1903).

- Programme de (1905), *Plan d'études et programmes d'enseignement secondaire des garçons*, douzième édition, Paris, librairie Vuibert, (1915),

- Programme de (1925), Enseignement secondaire, *Horaires Programmes Instructions 1925,* ouvrage honoré d'une souscription du Ministère de l'Instruction Publique. Librairie Armand Colin, Paris. (1925),

- Programme de (1938), *Enseignement du second degré*, Premier Cycle, édition Méthodique, Librairie Hachette, Paris. (1938),

- Programme de (1942), *Nouveaux Horaires et Programmes de l'enseignement secondaire classique et moderne,* cinquième édition, Paris, Librairie Vuibert, (1943),

- Programme de (1946), *Nouveau Horaires et Programmes de l'enseignement du second degré 1948- 1949*, Paris, Librairie Vuibert, - (1948),

- Programme de (1958), Le premier cycle Horaire, Programmes, instructions, Institut pédagogique national, 1966, brochure n° 144 FD.

  - Pour les classe de 6° et 5° : B.O. E.N n° 31 (5-9- 1957).

  - Pour les classe de 4° et 3° : B.O. E.N n° 32 (11 -9- 1958).

- Programmes de la période des mathématiques modernes

- Programme de (1973), *Le premier cycle, Horaires, Programmes, Instructions*, Ministère de l'éducation nationale, 1973, Brochure n° 77 Pg. (1973),

- Mathématiques classes du seconde cycle, Horaires, Programmes, Instructions, Ministère de l'éducation nationale, 1971, Institut national de recherche et documentation pédagogiques, Paris, Brochure n° 61 Pg

- Programme de (1979), Ministère de l'éducation, *Mathématiques*, *Classes des collèges 6°, 5°, 4°, 3°*, collection Horaires, objectifs, programmes, instructions, 1979, centre national de documentation pédagogique.

- Ministère de l'éducation, Mathématiques classes du seconde cycle, horaires, objectifs, programmes, instructions, 1978, centre national de documentation pédagogique

- Programmes de la période de la contre -réforme

Mathématiques, Classes de collèges, 6°, 5°, 4°, 3°, Centre national de documentation pédagogique, 1989.

Mathématiques Classes de seconde première et terminale programmes règlementaires, 1987. Centre national de documentation pédagogique.

- Programmes de la période contemporaine

Programmes du collège en 1996 : Mathématiques Programmes et accompagnement, Centre national de documentation pédagogique, 1999.

Programme de Seconde : B.O hors série n° 6 du 12 auôt 1999

Programme de Sixième : BO Hors série n°4, 9 sept. 2004

Programme de Cinquième : B.O Hors série n° 25 août 2005

Programme de Quatrième : B.O Hors série n° 5, 25 août 2005

Programme de Troisième : B.O. Hors série n° 6 du 19 avril 2007

Programme de collège (2008) : B.O spécial n° 6 du 28 aout 2008.

Programme de 2d (2009) : B.O n° 30 du 23 juillet 2009

Manuels scolaires

- Manuels de la période des Mathématiques modernes

Cossart, E. Théron, P, Gaparros, G(1969).*Mathématique, 6ème*, Collection Cossart et Théron, Edition Bordas

Cossart, E. Théron, P, Gaparros, G(1970).*Mathématique, 5ème*, Collection Cossart et Théron, Edition Bordas

Cossart, E. Théron, P, Boursin, J-I. Jourdan, J-I. (1971).*Mathématique, 4ème*, Collection Cossart et Théron, Edition Bordas

Cossart, E. Théron, P, Boursin, J-I. Jourdan, J-I. (1972).*Mathématique, 3ème*, Collection Cossart et Théron, Edition Bordas

Camara, A. Diouf, M. Toly, O. (1974).*Mathématique classe de sixième*' collection IREM Dakar, Nathan Afrique.

Diouf, M.Toly, O. (1975).*Mathématique classe de cinquième*, collection IREM Dakar, Nathan Afrique.

Branton, M. Ranc, O. Toly, O. (1976).*Mathématique classe de quatrième*, collection IREM Dakar, Nathan Afrique

Marie, M. Toly, O. Pelissou, E. Mendy – Pereira, A. (1977).*Mathématique classe de troisième,* collection IREM Dakar, Nathan Afrique

Wattiaux, R. Wattiaux, L. Mas, A. Legrain, G. (1969).*Mathématiques, 6ème*, Brédif livre, Classiques Hachette.

Wattiaux, R. Wattiaux, L. Mas, A. Legrain, G, (1970).*Mathématiques, 5ème*, Brédif livre, Classiques Hachette.

Wattiaux, R. Wattiaux, L. Mas, A. Legrain, G, (1971).*Mathématiques, 4ème*, Brédif livre, Classiques Hachette.

Wattiaux, R. Wattiaux, L. Mas, A. Legrain, G, (1972).*Mathématiques, 3ème*, Brédif livre, Classiques Hachette.

Ferret, J.C. Sebah, P. (1969). *Mathématiques, classe de Seconde*, Les éditions Foucher. Paris.

Courtial, CH. Guelfi, F. Riche, E.(1969). *Mathématiques, nouveau programme 2d, collection E.Riche.* Hatier.

Boursin, I.L. Devismes, A. Gitton, R. (1973). *Mathématiques Seconde A, C, T. Bordas.*

- Manuels de la période de la contre -réforme

Delord, R. Vinrich, G. Terracher, P. Fougère, D.1990, *Mathématiques, 6e*, édition Hachette collège. Paris.

Delord, R. Vinrich, G. Fougère, D.1987, *Mathématiques, 5e*, édition Hachette collège .Paris.

Delord, R. Vinrich, G .Terracher, P. Privat, B. 1988, *Mathématiques, 4e*, édition Hachette collège. Paris.

Terracher, P. Vinrich, G. Delord, R. 1989. *Mathématiques, 3e*, édition Hachette collège. Paris.

Terracher, P-H. Artigues, C. Bellecave, Y. 1990, *Mathématiques 2e*, collection Terracher, édition Hachette Lycées.

Bonnefond, G. Daviaud, D.Revranche, B. 1990, Mathématiques, 6ème, collection Pythagore, édition Hatier.

Bonnefond, G. Daviaud, D.Revranche, B, 1987, Mathématiques, 5ème, collection Pythagore, édition Hatier.

Bonnefond, G. Daviaud, D.Revranche, B, 1988, Mathématiques, 4ème, collection Pythagore, édition Hatier.

Bonnefond, G. Daviaud, D.Revranche, B, 1989, Mathématiques, 3ème, collection Pythagore, édition Hatier.

Bonnefond, G. Daviaud, D.Revranche, B, 1994, *Pythagore Seconde*, collection Pythagore, édition Hatier.

Borel, J- C. Such, S, (1986).*Mathématiques, 6^{e}*, Collection Durrande, Edition Bordas, Paris.

Borel, J. Such, S, (1987).*Mathématiques, 5^{e}*, Collection Durrande, Edition Bordas, Paris.

Borel, J. Such, S, (1988).*Mathématiques, 4^{e}*, Collection Durrande, Edition Bordas, Paris.

Borel, J. Such, S, (1989).*Mathématiques, 3^{e}*, Collection Durrande, Edition Bordas, Paris.

Brabant, P.Carnec, H. Nouet, M. Seroux, R ,(1990).*Mathématiques 2de* , Collection Fractale, Edition Bordas

- Manuels de la période contemporaine

Bonnefond, G. Daviaud, D. Revranche, B, 1 996, *Le nouveau Pythagore 6^{e}*, édition Hatier.

Bonnefond, G. Daviaud, D. Revranche, B, 1997, *Le nouveau Pythagore 5^{e}*, édition Hatier.

Bonnefond, G. Daviaud, D. Revranche, B, 1998, *Le nouveau Pythagore 4^{e}*, édition Hatier.

Bonnefond, G. Daviaud, D. Revranche, B, 1999, *Le nouveau Pythagore 3^{e}*, édition Hatier.

Bonnefond, G. Daviaud, D. Revranche, B, 2000, Mathématiques, 2d, collection Pythagore, édition Hatier

Delord. R, Vinrich, G. Bourdais, M. Fougère, D. Belair, F. 1996, *Math 6^{e}*, collection cinq sur cinq, édition Hachette éducation.

Delord. R, Vinrich, G. Bourdais, M. Fougère, D.1997, *Math 5ᵉ*, collection cinq sur cinq, édition Hachette éducation.

Delord. R, Vinrich, G. Bourdais, M. Fougère, D. 1998, *Math 4ᵉ*, collection cinq sur cinq, édition Hachette éducation.

Delord. R, Vinrich, G. 1999, *Math 3ᵉ*, collection cinq sur cinq, édition Hachette éducation.

Terracher, P. Ferachoglou, R. ..,…, 2000, Mathématiques, 2d, collection Pyramide, édition Hachette éducation.

Serra, E. Filiot, B. Germoni, M. Puoin-Wirth, C. Verrier, C, 1996, *Math 6ᵉ*, édition Bordas.

Serra, E. Escalier, E. Filiot, B. Germoni, M. Heller, M- C. Puoin-Wirth, C. Verrier, C.1997, *Math 5ᵉ*, édition Bordas.

Serra, E. Barberi, D. Concas, C. Escalier, E. Germoni, L. Germoni, M. Puoin-Wirth, C.1998, *Math 4ᵉ*, édition Bordas.

Serra, E. Barberi, D. Concas, C. Escalier, E. Germoni, L. Germoni, M. Pupin, C. Verrier, C.1999, *Math 3ᵉ*, édition Bordas.

Bontemps, G. Bernard, R. Trouche, L.2000, Mathématiques, 2d, édition Bordas.

- Manuels de collège des deux derniers Programmes

BRAULT, R.DARO, I. et al (2009) *Mathématiques 6ᵉ* collection Phare, Hachette éducation.

BRAULT, R.DARO, I. et al (2010) *Mathématiques 5ᵉ* collection Phare, Hachette éducation.

BRAULT, R.DARO, I. et al (2007) *Mathématiques 4ᵉ* collection Phare, Hachette éducation.

BRAULT, R.DARO, I. et al (2008) *Mathématiques 3ᵉ* collection Phare, Hachette éducation.

VANROYEN, J-P. ARSICAUD, L. al (2009) *Le Manuel Sésamath, 6ᵉ*, collection Mathenpoche.

VANROYEN, J-P. (2010) *Le Manuel Sésamath et ses compléments numériques 5ᵉ*, collection Mathenpoche.

VANROYEN, J-P. ARSICAUD, L.et al. (2008) *Le Manuel Sésamath, 4ᵉ*, collection Mathenpoche.

VANROYEN, J-P. ARSICAUD, L. et al (2008) *Le Manuel Sésamath, 3ᵉ*, collection Mathenpoche.

MULET – MARQUIS, R. MANTE, M. CHAPIRON, et al (2009) *Mathématiques Triangle 6^e^*, Hatier

MULET – MARQUIS, R. MANTE, M. CHAPIRON, et al (2010) *Mathématiques Triangle 5^e^*, Hatier

MULET – MARQUIS, R. MANTE, M. CHAPIRON, et al (2007) *Mathématiques 4^e^ collection Triangle*, Hatier

MULET – MARQUIS, R. MANTE, M. CHAPIRON, et al (2008) *Mathématiques 3^e^ collection Triangle 6^e^*, Hatier

Manuels de seconde correspondants aux programmes de 2000 et 2004

Malaval.J, Courbon,D, Bilgot,J-F et al…. (2000).*Math 2^e^*, collection Hyperbole, Edition Nathan.

Misset.L, Coste.R, Guerlou.C, Lotz.E et Turner.J. (2000) . *Math seconde*, collection Déclic, Edition Hachette Education.

Deledicq.A, Gauthier, R-L, Hennequin,P et al….(2000) . *X Maths 2d*, collection Indice, Edition Bordas.

Malaval.J, Courbon,D, Bilgot,J-F et al (2004). *Mathématiques 2de*, collection Hyperbole, Edition Nathan.

Misset.L, Turner.J. Lotz, E. (2004) ., Mathématiques, 2d, collection Déclic, Edition Hachette Education.

Gauthier, R. Mison, G. et al (2004) .*Maths Seconde*, collection Indice, Edition Bordas.

ANNEXES

Plan des annexes

Annexe 1

1 : Les définitions dans la période de mathématiques modernes

<u>Nathan :</u>

Définition : Dire que le naturel a est un **multiple** du naturel b signifie qu'il existe un naturel q tel que : a = b q (p.72)

Définition : Dire que le naturel b est **diviseur** du naturel a signifie qu'il existe un naturel q et un seul tel que : a = b q (p.79)

Lorsque $b \neq 0$ « b est diviseur de a » veut dire « a est multiple de b »

- Division euclidienne : (p.84)

D'après ce qui précède, on peut dire que :

Quel que soit le naturel a, il existe un couple unique de naturels (q, r) tel que :

$$a = b\,q + r \qquad \text{avec} \quad r \in \{0, 1, 2, 3\}$$

C'est-à-dire $a = b\,q + r$ et $r < 4$

q est le quotient euclidien de a par 4

r est le reste de la division euclidienne de a par 4.

Effectuer la division euclidienne de a par 4 ; c'est trouver les naturels q et r tels que

$a = b\,q + r$ et $r < 4$.

Définition : Le quotient euclidien de a par b est le plus grand naturel dont le produit par b est inférieur ou égale à a.

- Définition d'un naturel premier

On appelle naturel premier un naturel qui admet deux diviseurs et deux seulement. (p.93)

- Décomposition en facteur premier :

Un naturel peut s'écrire de plusieurs façons sous forme de produit, mais il n'a qu'une seule décomposition en facteurs premiers.

- Diviseurs communs à deux naturels : P.G.C.D de deux naturels

Deux naturels quelconques a et b admettent pour diviseur 1, $D_a \cap D_b$ n'est jamais vide.

Lorsque a et b n'ont qu'un diviseur commun $D_a \cap D_b = \{1\}$.

Les naturels a et b sont alors dits premiers entre eux.

Parmi les diviseurs communs à deux naturels a et b, il en existe un plus grand que tous les autres, c'est le p. g. c. d de a et b. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de leur p. g.c.d. p(101)

- Multiple commun

Parmi les multiples communs à deux naturels, il en existe un différent de 0 et plus petit que tous les autres, c'est le p. p. c. m de a et de b.

L'ensemble des multiples communs à a et b est l'ensemble des multiples de leur p. p.c.m. p(104)

<u>Bordas :</u>

- Multiples et diviseurs d'un nombre :

Définition : Le nombre A est appelé multiple du nombre a s'il est égal au produit de a par un nombre entier :

$$A = a \times b \quad \text{(p.97)}$$

Définition. Si y est un multiple de x on dit que x est un diviseur de y. (p.99)

- La division euclidienne :

a et b étant deux nombres entiers, on appelle quotient euclidienne de a par b, $b \neq 0$, le plus grand nombre entier q tel que : $b\,q \leq a$.

Quel que soient les entiers donnés a et b, ce nombre q existe et est unique.

L'entier qui suit q étant $q + 1$, on voit que le quotient euclidien de a par b est le nombre q satisfaisant à :

$$\boxed{bq \leq a < b\,(q + 1).}$$

La différence $a - bq$ s'appelle reste r de la division de a par b : $a - bq = r$ donc $a = bq + r$.

Le reste est inférieur au diviseur car la différence $a - bq$ est inférieure à la différence

$b\,(q + 1) - bq$, c'est – à- dire à b.(p.103)

Donc, a et b étant donnés, le quotient q et le reste r satisfaisant à :

$$\boxed{bq \leq a < b\,(q + 1).}$$

Lorsque a est un multiple de b, alors a = bq et le reste r est nul ; on dit que b divise a ou que a est divisible par b.

Trouver le couple (q,r) connaissant le couple (a,b) c'est effectuer la division euclidienne de a par b ou diviser a par b.

A et b sont respectivement appelés dividende et diviseur de la division.

- Nombres premiers et nombre non premiers :

Définition : Un nombre a est premier s'il admet deux diviseurs différents et deux seulement : 1 et a.

Il revient de même de dire :

Un nombre a est premier si l'ensemble D_a de ses diviseurs a deux éléments :

$$D_a = \{1, a\}. \text{ p(106)}$$

- Décomposition en facteurs premiers :

La décomposition d'un nombre non premier et différent de 1 en produit de facteurs premiers est unique. p(110)

On l'appelle « plus petit multiple commun à 140 et 150 » ; en abrégé PPCM à 140 et 150.

D'une façon générale :

Soit M un multiple commun à deux nombres A et B tous deux différents de 1.

a) Dans la décomposition de M on retrouve chacun des facteurs élémentaires des décompositions de A et de B.

b) L'exposant d'un facteur élémentaire dans la décomposition de A ou dans celle de B est inférieur ou égale à l'exposant de ce même facteur élémentaire dans la décomposition de M.

On l'appelle « plus petit multiple commun à 540 et 252 » ; en abrégé PGCD à 540 et 252 .

D'une façon générale :

Soit d un multiple commun à deux nombres A et B ($d \neq 1$).

c) Chacun des facteurs élémentaires des décompositions de d est commun aux décompositions de A et de B.

d) L'exposant d'un facteur élémentaire dans la décomposition de d est inférieur ou égale au plus petit de deux exposants de ce même facteur élémentaire dans les décompositions de A et B.

<u>Hachette :</u>

Dans l'ensemble N, on dit qu'un nombre a est un multiple d'un nombre b si a est le produit de b par un nombre quelconque n.

Déterminer q, c'est effectuer la division euclidienne de a par b

Pour cette division, on dit :

A est le dividende ;

B est le diviseur ;

Q est le quotient.

On appelle reste de la division euclidienne de a par b la différence de a et du plus grand élément de E.

Dans l'ensemble N, si un nombre a est le produit d'un nombre b par un nombre quelconque q, on dit :

a) b est un diviseur de a ;
b) q est un diviseur de a ;
c) q est un quotient exact de la division de a par b.

- Nombres premiers :

Définition : Dans l'ensemble N, un nombre différent de 1 est dit premier lorsqu' il n'admet pour diviseurs que lui-même et 1.

- Décomposition en facteur premier

Tout nombre supérieur à 1 non premier peut être décomposé en un produit de facteurs premiers.

La décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers est unique, à l'ordre près de ces facteurs.

Dans l'ensemble N, pour qu'un nombre b soit un **multiple** d'un nombre b, a et b supérieurs à1, il faut et il suffit que la décomposition de b en facteurs premiers contienne au moins tous les facteurs premiers qui figurent dans la décomposition de a avec, pour chacun, un exposant égal ou supérieur.

Dans l'ensemble N, pour qu'un nombre b soit un **diviseur** d'un nombre a, a et b supérieurs à1, il faut et il suffit que la décomposition de b en facteurs premiers ne contienne que au des facteurs premiers figurant dans celle de a avec, pour chacun, un exposant au plus égal.

- Ppcm :

Pour trouver des multiples communs à plusieurs nombres a, b et c supérieurs à 1, on écrit les premiers termes des ensembles M(a), M(b) et M(c), puis les premiers éléments de l'ensemble :

$$M(a) \cap M(b) \cap M(c)$$

Le plus petit terme de cet ensemble intersection s'appelle le plus petit multiple commun aux nombres a, b et c, en abrégé PPCM.

- Pgcd :

Pour déterminer l'ensemble de tous les diviseurs communs à plusieurs nombres a, b et c supérieurs à 1, on écrit les ensembles D(a), D(b) et D(c), puis les éléments de l'ensemble :

$$D(a) \cap D(b) \cap D(c)$$

Le plus grand terme de cet ensemble intersection s'appelle le plus grand diviseur commun aux nombres a, b et c, en abrégé PGCD.

2 : Les définitions dans la période de contre- réforme :

Bordas :

6ème : Soit b un entier. On appelle multiple de b le produit de b par un entier quelconque.

Un entier non nul b est un diviseur d'un entier a si a est un multiple de b. On dit alors que a est divisible par b.

Définition : un entier non nul b est un diviseur d'un entier a s'il existe un nombre entier q tel que $a = b \times q$.

Cet entier q est unique, c'est le quotient de a par b. On le note a : b ou $\frac{a}{b}$.

L'opération qui aux nombres a et b associe leur quotient est la division.

Définition : Quel que soit l'entier non nul b et quel que soit l'entier a, il existe un entier q unique tel que : $b\,q \leq a < b\,(q+1)$ cet entier q est le quotient entier, ou quotient à une unité près par défaut (ou quotient euclidienne) de a par b.

L'opération qui, aux nombres entiers a et b, associe le quotient q et le reste r est la division euclidienne.

Hatier : Pas de définitions

Hachette collège :

4ème : Un point de méthode : Pour obtenir le multiple commun le plus petit possible, on peut procéder ainsi : « on prend le plus grand des deux nombres et l'on écrit (ou l'on imagine…) ses multiples successifs en s'arrêtant dès que l'on trouve un multiple du plus petit. »

3: Les définitions dans la période contemporaine :

<u>Bordas :</u>

<u>En 6ème</u> : division euclidienne.

Définition : Effectuer la division euclidienne d'un nombre entier a par nombre entier b, c'est trouver le quotient entier q et le reste

Q est le nombre de paquets de b unités contenus dans le nombre

R est le reste d'unités qui restent.

Le reste doit être inférieur au diviseur.

Quand le reste est nul, on dit que :

« Le nombre entier a est un multiple du nombre entier b » ou

« Le nombre entier a est divisible par le nombre entier b ».

<u>En 3ème</u> : (pgcd et nombre premiers entre eux)

L'ensemble des diviseurs communs à deux entiers a et b admet un plus grand élément noté PGCD (a ; b).

PGCD signifie Plus Grand Commun diviseur.

On dit que deux entiers (non nuls) a et b sont premiers entre eux si leur PGCD est égale à 1.

<u>En 2d</u> : (nombre premiers et décomposition en facteurs premiers).

Définition : Soit a et b deux entiers naturels.

On dit que b est un diviseur de a (ou que a est un multiple de b) s'il existe un entier naturel k tel que a = k b.

On dit qu'un entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Théorème : Soit n un entier (n   ). Alors :

n admet un diviseur premier p tel que p^2 2 , alors il est lui-même premier.

Théorème 3 :

Tout entier n 2, se décompose en un produit de facteurs premiers.

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

2 : Hachette :

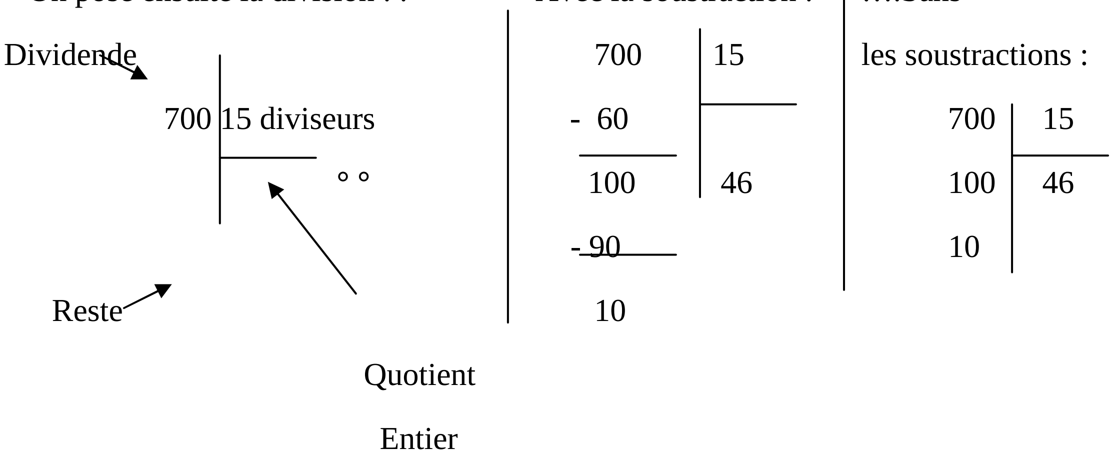
En 6ème : (définir la division euclidienne se fait par exemple de la manière suivante :)

Chercher le quotient entier de 700 divisé par 15 revient à chercher le nombre entier qui, multiplié par 15, donne 700 ou s'en rapproche le plus possible (en restant plus petit que 700).

- A la main :

On peut chercher d'abord le nombre de chiffre au quotient entier.

On pose ensuite la division : . Avec la soustraction : ….Sans les soustractions :



15× 46 < 700 < 15× 47

700 = 15 × 46 + 10

Dividende = diviseur × quotient entier + reste (reste < diviseur)

(Définition de notions de divisibilité se fait par un exemple de la meunière suivante):

690 = 15 46 + 0 (le quotient entier est 46 et le reste 0).

On dit alors que :

- 690 est divisible par 15 ;
- 15 est un diviseur de 690 ;
- 690 est un multiple de 15.

En 3^{ème} : Diviseurs communs à deux entiers –PGCD

L'ensemble des diviseurs communs à deux entiers a et b admet un plus grand élément noté PGCD (a ; b).

PGCD signifie Plus Grand Commun Diviseur.

Nombres premiers entre eux –Fraction irréductible

On dit que deux entiers (non nuls) a et b sont premiers entre eux si leur PGCD est égale à 1.

En 2d : Diviseur d'un entier

Définition : Soit a et b deux entiers naturels.

On dit que b est un diviseur de a (ou que a est un multiple de b) s'il existe un entier naturel k tel que a = kb.

Nombres premiers :

Définition : On dit qu'un entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Théorème: Soit n un entier ($n \geq 2$). Alors :

N admet un diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$, alors il est lui-même premier.

Théorème : Tout entier $n \geq 2$, se décompose en un produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Ce résultat est le théorème fondamental de l'arithmétique.

<u>Hatier :</u>

En 3ème : La définition de PGCD se fait par un exemple :

Voici la liste des diviseurs de 24 : {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24}

Et la liste de ceux de 36 : {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36}

Les **diviseurs communs** à 24 et à 36 sont donc {**1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6; 12}.**

Le plus grand de ces diviseurs communs est 12 : c'est le PGCD de 24 et de 36 (**P**lus **G**rand **C**ommun **D**iviseur).

- Nombres premiers entre eux :

Définition : Deux entiers naturels sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1.

Autrement dit : Deux entiers naturels sont premiers entre eux si leur PGCD est égale à 1.

En 2d : Définition : Un entier naturel est dit premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs 1 et lui-même.

Propriété : Tout entier naturel se décompose de façon unique en produit de nombres premiers.

Annexe 2 : Annexe des manuels de Seconde

1. Indice 2000

3. Nombres décimaux et valeurs approchées

▶ Vocabulaire
Le fait qu'un nombre soit « décimal » ne dépend que de son écriture en base dix. C'est l'origine de cette dénomination.
Par exemple :
$148{,}75 = 1 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$.
148 est la **partie entière** de 148,75.
0,75 est la **partie décimale** de 148,75.

Les nombres qui sont le quotient d'un entier par une puissance de dix, sont appelés les **nombres décimaux.** Leur ensemble est noté $\mathbb{D}$.

Exemples :
$\dfrac{14\,875}{100} = 148{,}75$; $-0{,}014 = -\dfrac{14}{1\,000}$; $421 = \dfrac{421}{1}$; $\dfrac{3}{4} = \dfrac{75}{100}$.

• Tout nombre décimal peut s'écrire $a \times 10^p$ où a est un décimal ayant un seul chiffre autre que 0 avant la virgule et p un entier relatif.
$a \times 10^p$ est l'**écriture scientifique** du nombre.

▶ Vocabulaire
E est la première lettre de « exposant ».

Exemples : $2\,328\,423 = 2{,}328\,423 \times 10^6$; ce nombre se note aussi, sur l'écran d'une calculatrice : 2.328423E6.
Et $0{,}000\,32 = 3{,}2 \times 10^{-4}$: 3.2E-4

▶ Vocabulaire
Tout nombre réel peut être « approché » par un nombre décimal. On dit :
Le décimal 3,14 est une **valeur approchée** de π (au centième près).
Le décimal 1,414 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ (au millième près).

• Tous les décimaux sont des quotients d'entiers particuliers et sont donc des rationnels. Mais les nombres rationnels ne sont pas tous décimaux (par exemple $\dfrac{1}{3}$ ne l'est pas).
Il y a même des nombres réels qui ne sont pas rationnels ; par exemple le nombre $\sqrt{2}$ qui mesure la diagonale d'un carré de côté 1 ou le nombre π qui mesure la longueur d'un cercle de diamètre unité.

4. Nombres premiers

DÉFINITION

Un **nombre premier** est un nombre naturel qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 sont des nombres premiers.
Le nombre 1 qui n'a qu'un diviseur n'est pas un nombre premier.
91 n'est pas un nombre premier : en effet $91 = 13 \times 7$. Il a effectivement plus de deux diviseurs, ce sont : 1 ; 91 ; 13 et 7.

Tout nombre naturel non premier peut s'écrire d'une manière unique comme produit de nombres premiers.

▶ Vocabulaire
Au lieu de **décomposition en produit de facteurs premiers**, on peut dire **décomposition primaire.**

Exemple : $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$.
On dit que l'on a « décomposé » 72 en produit de facteurs premiers.

10

D. Donner une valeur approchée décimale

Quelle est la longueur d'une roue de vélo de 70 cm de diamètre ?

■ Cette longueur en cm est obtenue en calculant le produit $70\ \pi$.
Sous forme décimale, le résultat approché donné par une calculatrice est 219,911 485 8.
Dans les cas où on ne peut donner qu'une valeur décimale approchée du résultat (comme ici), il n'est pas raisonnable de garder toutes les décimales. En général, on garde 2, 3, 4 ou 5 chiffres qui sont alors dits « significatifs » ; et lorsqu'une unité est « bien choisie », on garde 1 ou 2 chiffres après la virgule.
Ici, 219,9 cm paraît un résultat raisonnable.
On pourrait aussi choisir le mètre comme unité et donner pour résultat 2,199 m, ou bien simplement 2,2 m.

E. Trouver les diviseurs d'un nombre

Énoncé Trouver tous les diviseurs de 150.

▶ Technique
Si m est un diviseur de 150 **alors** $m \times p = 150$, p étant un autre diviseur.
L'un des deux nombres m ou p est inférieur ou égal à $\sqrt{150}$; sinon mp serait supérieur à 150.
Il suffit donc de chercher les diviseurs de 150 jusqu'à 12 pour les trouver tous (en effet, $\sqrt{150} \approx 12{,}2$).

■ Écrire le nombre sous la forme d'un produit de deux facteurs de toutes les manières possibles, en essayant les naturels successifs.
$150 = 1 \times 150 = 2 \times 75 = 3 \times 50 = 5 \times 30 = 6 \times 25 = 10 \times 15$.
Il faut remarquer que les diviseurs d'un naturel vont par 2, sauf si le nombre est un carré.
On écrit alors l'ensemble de ces diviseurs dans l'ordre croissant :
$D_{150} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 25 ; 30 ; 50 ; 75 ; 150\}$.

F. Décomposer en produit de facteurs premiers

Énoncé Décomposer 150, puis 36×150 en produit de facteurs premiers.

▶ Technique
Pour décomposer 150 en produit de facteurs premiers, on peut utiliser l'une des dispositions suivantes.

$$\begin{array}{l|l} 150 & \mathbf{2} \\ \hline \end{array}\ \ \begin{array}{r|l} 75 & \mathbf{3} \\ 25 & \mathbf{5} \\ 5 & \mathbf{5} \\ 1 & \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

■ Pratiquement, chaque fois qu'on a trouvé un diviseur d'un nombre, on calcule le quotient et on décompose alors ce diviseur et ce quotient.
On remarque que $150 = 6 \times 25$.
Donc $150 = 2 \times 3 \times 5^2$.
Les nombres 2, 3 et 5 sont des nombres premiers. L'écriture $2 \times 3 \times 5^2$ est la décomposition de 150 en produit de facteurs premiers.
■ $36 = 6 \times 6 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^2$.
Donc $36 \times 150 = 2^2 \times 3^2 \times 2 \times 3 \times 5^2$
soit $36 \times 150 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$.
L'écriture $2^3 \times 3^3 \times 5^2$ est la décomposition de 36×150 en produit de facteurs premiers.

1. Nombres et calculs 11

Exercices et problèmes

Les acquis du collège

Ensembles de nombres

1 Voici une liste de nombres :

$\frac{2}{3}$; 0,666 ; $\sqrt{2}$; 1,4142 ; –12,2 ; $\frac{91}{13}$;

10^6 ; π ; $\sqrt{49}$; 10^{-6} ; $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}$.

a. Recopier les nombres qui sont des entiers.

b. Recopier les nombres qui sont des décimaux non entiers.

c. Recopier les nombres qui sont des rationnels non décimaux.

d. Recopier les nombres qui ne sont pas des rationnels.

2 Cinq des six écritures de chacune des listes ci-dessous désignent le même rationnel. Trouver l'intrus.

a. $\frac{12}{15}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{10}{12,5}$; 0,8 ; $\frac{40\,000}{50\,001}$; $\frac{2\,000}{2\,500}$.

b. 0,002 ; $\frac{0,2}{100}$; $\frac{10}{5\,000}$; $\frac{3}{1\,000} - 0,001$; $\frac{0,4}{80}$; $\frac{80}{40\,000}$.

3 Parmi les rationnels suivants, lesquels sont des décimaux ?

$\frac{8}{25}$; $\frac{8}{24}$; $\frac{7}{21}$; $\frac{12}{75}$; $\frac{13}{75}$; $\frac{102}{75}$.

4 **a.** Donner l'arrondi au centième des nombres suivants :

0,666 ; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{2}$; $\frac{13}{8}$; $\frac{156}{100}$; π ; $\frac{22}{7}$; $\frac{1}{\pi}$.

b. L'arrondi au centième d'un nombre est-il toujours une valeur approchée par excès de ce nombre ?

Nombres premiers entre eux

5 Dans quels cas les nombres n et p sont-ils premiers entre eux ?

a. $n = 14$ et $p = 2$. **b.** $n = 25$ et $p = 49$.
c. $n = 51$ et $p = 102$. **d.** $n = 2\,535$ et $p = 1\,350$.

6 Dans quels cas les nombres n et p sont-ils premiers entre eux ?

a. $n = 85$ et $p = 132$. **b.** $n = 11$ et $p = 15$.
c. $n = 11$ et $p = 66$. **d.** $n = 52$ et $p = 39$.

Diviseurs et multiples

7 **a.** 54 est-il un diviseur de 6 ?
b. 54 est-il un multiple de 9 ?
c. 9 est-il un diviseur de 81 ?
d. 81 est-il un multiple de 81 ?
e. 57 a-t-il pour diviseur 57 ?
f. 1 est-il un multiple de 57 ?
g. 1 est-il multiple de tous les naturels ?
h. 1 est-il diviseur de tous les naturels ?
i. 0 est-il multiple de tous les naturels ?

8 **a.** Trouver tous les diviseurs de 72.
b. Trouver tous les diviseurs de 54.
c. Donner l'écriture irréductible de $\frac{72}{54}$.

Fractions irréductibles

9 Donner l'écriture fractionnaire irréductible de chacun des décimaux suivants :

2,5 ; 2,25 ; 2,75 ; 3,125 ; 3,05.

10 Donner l'écriture irréductible, puis l'arrondi au dixième de chacun des rationnels suivants :

$\frac{40}{15}$; $-\frac{49}{84}$; $\frac{180}{108}$; $\frac{143}{52}$.

X **11** Reprendre l'exercice 10 avec les rationnels :

$\frac{-5\times7}{28\times(-5)}$; $\frac{-5+7}{-5+28}$; $\frac{3\times28\times5}{35\times3\times24}$; $\frac{27+5}{35+5}$.

$\frac{1}{4} \approx 0,3$ $\frac{2}{23} \approx 0,1$ $\frac{1}{6}$ $\frac{4}{5}$

Racines carrées

X **12** Sans utiliser les valeurs approchées, montrer que quatre de ces nombres sont égaux :

$A = \sqrt{3} + \sqrt{3}$; $B = \sqrt{3+3}$;
$C = 2\sqrt{3}\sqrt{3}$; 6 $D = \sqrt{12}$;
$E = \frac{\sqrt{300}}{5}$; $F = \frac{6}{\sqrt{3}}$.

X **13** On considère les nombres :

$G = 3\sqrt{18} - 2\sqrt{2} + \sqrt{50}$ et $H = \sqrt{32} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{8}$.

Montrer, en détaillant le calcul, que $\frac{G}{H}$ est un nombre entier. = 4

Exercices et problèmes

Séries d'entraînement

Les ensembles de nombres

14 $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{24}{5}$ est-il :

a. un nombre entier ?
b. un nombre décimal ?
c. un nombre rationnel ?

15 **a.** Calculer et donner le résultat sous la forme la plus simple possible :

$A = \left(\frac{20}{25} - \frac{30}{45}\right) \times \frac{3}{4}$; $B = \frac{\frac{7}{15} - \frac{5}{12}}{\frac{7}{4} \times \frac{3}{5}}$;

$C = 6 - 6 : \frac{6}{7}$; $D = \frac{\sqrt{98} - \sqrt{50}}{\sqrt{50}}$.

b. Préciser pour chaque résultat s'il s'agit d'un nombre entier, d'un nombre décimal non entier, d'un nombre rationnel non décimal, d'un nombre non rationnel.

Écritures de rationnels

*Pour les exercices **16** à **19**, trouver trois autres écritures fractionnaires du rationnel Q puis écrire Q sous forme de fraction irréductible.*

16 $Q = \frac{51}{136}$.

***Aide :** penser aux multiples de 17.*

17 $Q = \frac{115}{245}$. **18** $Q = \frac{1\,150}{245}$.

19 $Q = \frac{1\,015}{2\,450}$.

*Pour les exercices **20** à **22**, donner les valeurs possibles du naturel a ($a < 20$) pour que F soit irréductible.*

20 $F = \frac{a}{1\,386}$.

***Aide :** chercher d'abord les diviseurs de 1 386 inférieurs à 20.*

21 $F = \frac{a}{1\,444}$. **22** $F = \frac{a}{1\,024}$.

23 Donner l'écriture irréductible des rationnels suivants : $\frac{98}{21}$; $\frac{108}{21}$; $\frac{300}{575}$; $\frac{121}{132}$.

24 Donner l'écriture irréductible des rationnels suivants : $-\frac{66}{1\,111}$; $-\frac{236}{216}$; $-\frac{5\,000}{425}$; $-\frac{420}{700}$.

***Aide :** les signes « – » n'ont, ici, pas vraiment d'importance !*

25 Quelles sont les dix premières décimales de l'écriture décimale de $\frac{22}{7}$? De $\frac{355}{113}$?

26 Quelle est la vingtième décimale de l'écriture décimale de $\frac{17}{11}$? De $\frac{17}{7}$?

***Aide :** au bout de combien de décimales les chiffres du quotient se répètent-ils ?*

Calculs avec des fractions

27 Parmi ces écritures, lesquelles désignent un nombre entier ? Lesquelles ne désignent rien ?

a. $\frac{6\times6-6}{6+6+6}$; **b.** $6 - \frac{6-6}{6}$; **c.** $\frac{6\times6\times6\times6}{(6-6)\times6}$.

28 Parmi ces écritures, lesquelles désignent un nombre entier ? Lesquelles ne désignent rien ?

a. $\frac{6\times(6-6)}{6\times6-6}$; **b.** $\frac{6\times6\times6}{36-4\times9}$; **c.** $\frac{(6-6)\times(6+6)}{6+6+6}$.

***Aide :** un zéro au numérateur simplifie les calculs mais pas au dénominateur.*

*Pour les exercices **29** à **33**, effectuer chacun des calculs et donner la réponse sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.*

X **29** $a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \times 4$; $b = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$. $\frac{11}{18}$

$\frac{7}{2}$

30 $c = \frac{4}{18} - \frac{1}{2} + \frac{91}{36}$; $d = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{5}$.

31 $e = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{5}$; $f = \left(0,25 + \frac{1}{3}\right) \times 12$.

X **32** $g = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) : 4$; $h = 4 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$.

$\frac{1}{16}$

Exercices et problèmes

33 $i=\left(\frac{1}{4}-0{,}75\right):0{,}5$; $j=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{24}$.

34 On sait que $A=\frac{10}{3}$. Calculer $A+\frac{5}{3}$; $A+\frac{7}{9}$; $A-\frac{7}{5}$; $A+0{,}3$.
Parmi les réponses suivantes, quelle est l'intruse ?

a. $\frac{17}{9}$; **b.** $\frac{37}{9}$; **c.** 5 ; **d.** $\frac{29}{15}$; **e.** $\frac{109}{30}$.

35 On sait que $B=\frac{10}{3}$. Calculer $2B$; $\frac{5}{3}B$; $0{,}6B$; $\frac{9}{7}B$.
Parmi les réponses suivantes, quelle est l'intruse ?

a. 2 ; **b.** $\frac{90}{7}$; **c.** $\frac{50}{9}$; **d.** $\frac{20}{3}$; **e.** $\frac{30}{7}$.

Pour les exercices **36** *et* **37**, *calculer* $\frac{A}{\frac{3}{4}}$; $\frac{6}{A}$; $\frac{A}{6}$; $\frac{A}{0{,}2}$; $\frac{A}{4}$.

36 $A=\frac{4}{3}$.
Aide : diviser, c'est multiplier par l'inverse.

37 $A=\frac{3}{4}$.

38 **a.** Écrire plus simplement :

$$A=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}} \quad \text{et} \quad B=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}.$$

b. Calculer $A\times B$ et $A+B$.
Aide : commencer par le dénominateur le plus « bas ». Ne pas hésiter à donner un nom au dénominateur pour bien vous organiser.

39 Reprendre l'exercice 38 en remplaçant $\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{4}$.

Calculs avec des puissances

40 Voici cinq calculs avec des puissances, les simplifier :

$a=(0{,}1)^3\times10^5$. $b=10^3\times0{,}000\,1\times5$.

$c=2a^3\times8a^4$. $d=0{,}001\times10^4\times40$.

$e=(4\times10^6):(5\times10^2)$.

41 Voici cinq calculs avec des puissances, les simplifier :
$a=(5^2\times10^2):(5^3\times2^2)$.

$b=10^{-3}\times10^5\times0{,}01$. $c=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times4^{-2}$.

$d=\left(\frac{1}{2}\right)^4:\left(\frac{1}{4}\right)^2$. $e=(0{,}2)^2\times(0{,}4)^3\times10^4$.

42 Soit le nombre $B=2^4\times3^2$.
Sans calculatrice, montrer que le nombre B est le carré d'un nombre entier. Calculer $\sqrt{B}$.

43 Soit le nombre $B=14^6\times5^{16}$.
Sans calculatrice, montrer que le nombre B est le carré d'un nombre entier. Calculer $\sqrt{B}$.
Aide : voir le formulaire, page II. *Ici,* $\sqrt{a^n}=a^{\frac{n}{2}}$.

44 Soit le nombre $D=12\times64\times18$. Sans calculatrice, montrer que D est le cube d'un nombre entier.

45 On sait que $A=2$. Trouver les valeurs de A^3 ; A^5 ; A^{-2} ; $\frac{1}{A^3}$.
Parmi les réponses suivantes, quelle est l'intruse ?

a. 32 ; **b.** 0,25 ; **c.** 10 ; **d.** 8 ; **e.** $\frac{1}{8}$.

46 On sait que $A=-2$. Trouver les valeurs de $3A^2$; $-2A^2$; $5A^3$; $\frac{1}{4}A^{-4}$; A^{-10}.
Aide : attention aux signes « – » : $\frac{1}{A}=A^{-1}$.

47 Avec $X=0{,}25$, calculer X^2 ; X^0 ; X^{-3} ; X^{-1}.
Parmi les réponses suivantes, quelle est l'intruse ?

a. 64 ; **b.** 1 ; **c.** 4 ; **d.** $\frac{1}{16}$; **e.** -1.

48 Écrire sous la forme $2^n\times3^p$ chacun des nombres suivants : 144 ; 3 072 ; 2 304.

49 Écrire sous la forme $5^m\times7^q$ chacun des nombres suivants : 245 ; 6 125 ; 60 025.
Aide : il s'agit d'une décomposition en produit de facteurs premiers dont les facteurs sont connus.

50 Écrire sous la forme 2^n les nombres :
$(0{,}5)^2$; $(0{,}5)^3$; $(0{,}5)^{-2}$; $(0{,}5)^{-10}$.

51 Écrire sous la forme 2^n les nombres :
$(0{,}125)^2$; $(0{,}125)^3$; $(0{,}125)^{-2}$; $(0{,}125)^{-10}$.

Exercices et problèmes

Pour les exercices **52** *à* **54**, *écrire sous forme d'un produit de puissances, les nombres* $\frac{1}{A}$; AB ; ABC *et* $\frac{AC}{B}$.

52 $A=a^2b^4$; $B=a^5b^2$; $C=ab$.

53 $A=ab^{-2}$; $B=(a^{-1}b^2)^4$; $C=(ab^{-1})^3$.

54 $A=a^3b^{-2}$; $B=(a^3b)^{-2}$; $C=(a^2b^{-1})^3$.
Aide : étudier le formulaire, page II.

55 On sait que 1 micron vaut 10^{-6} mètre.
Combien valent, en microns, 1 mètre ? 1 millimètre ? 1 kilomètre ?

Écriture scientifique

56 Donner l'écriture scientifique de chacun des nombres :
251,3 ; 0,001 9 ; 150 ; 150×10^3 ; 150×10^{-2}.

57 Donner l'écriture scientifique de chacun des nombres :
1 024 ; 0,125 ; $1{,}91\times1\,000$; 18 000,35.
Aide : attention aux zéros intermédiaires !

58 On pose $A=12\times10^9$ et $B=15\times10^{-25}$.
Donner l'écriture scientifique de $A\times B$ et de $\frac{A}{B}$.

59 Calculer et donner le résultat en notation scientifique.

$$A=\frac{7\times10^{-5}\times0{,}21\times10^{12}}{42\times10^{23}};$$

$$B=\frac{7^3\times(10^{-4})^{-7}\times8\times10^{10}}{10^{23}\times2^4}.$$

Aide : en notation scientifique, l'exposant donne l'ordre de grandeur du nombre.

Calculs avec des racines carrées

60 Trouver une écriture simplifiée de chacun des nombres suivants :
$\sqrt{16}+\sqrt{4}$; $\sqrt{20}+\sqrt{45}$; $\sqrt{8}+\sqrt{50}$; $\sqrt{2^6}$.
Aide : dès qu'un facteur est répété sous une racine, il peut s'en échapper.

61 Trouver une écriture simplifiée de chacun des nombres suivants :
$\sqrt{10^6}$; $\sqrt{(0{,}1)^4}\times\sqrt{500}$; $\sqrt{(-10)^4}$.

62 Simplifier $A=\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})$
et $B=(\sqrt{5}+\sqrt{10})\sqrt{5}$.

63 Simplifier $A=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$
et $B=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.
Aide : penser aux identités remarquables.

Diviseurs et nombres premiers

64 Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de : 60 ; 585 ; 504 et 247.

65 Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de : 19 ; 101 et 1 111.

Pour les exercices **66** *à* **70**, *décomposer en facteurs premiers A et B puis donner leurs diviseurs communs.*

66 $A=54$ et $B=90$.

67 $A=108$ et $B=180$.
Aide : $108=54\times2$ et $180=90\times2$.

68 $A=108$ et $B=120$. **69** $A=125$ et $B=625$.

70 $A=191$ et $B=193$.
Aide : si un diviseur est commun à A et à B, il divise aussi leur différence.

71 **a.** Trouver tous les diviseurs de 60 puis écrire sa décomposition en facteurs premiers.
b. Quelles sont les fractions d'heure, inverses d'entiers, qui représentent un nombre entier de minutes ?
Par exemple, 1/3 d'heure, c'est 60/3 de minutes, soit 20 minutes.

72 **a.** Trouver tous les diviseurs de 360 puis écrire sa décomposition en facteurs premiers.
b. On coupe une tarte circulaire en parts égales. Quels sont les découpages pour lesquels la mesure en degrés de l'angle au centre d'une part est un nombre entier ?
Aide : bien lire et comprendre l'énoncé, c'est presque déjà résoudre l'exercice !

Pour les exercices **73** *et* **74**, *écrire la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres A, B et C donnés. En déduire celle de leur produit et montrer que ce produit est divisible par 60.*

73 $A=24$; $B=70$ et $C=74$.
Aide : être divisible par 60, c'est être divisible par 4, par 3 et par 5.

74 $A=56$; $B=90$ et $C=106$.

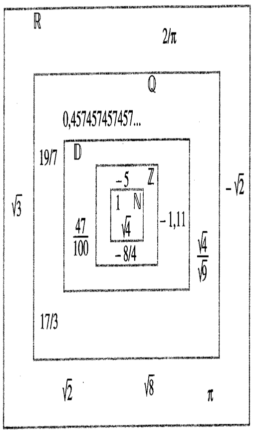
Exercices et problèmes

Les notions et les méthodes

Les ensembles de nombres

75 Indiquer pour chaque nombre de la figure pourquoi il est bien à sa place.

Par exemple le nombre $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$ est bien rationnel ; en effet c'est bien le quotient de deux entiers ; et il n'est pas décimal puisqu'il ne peut pas s'écrire comme le quotient d'un entier par une puissance de dix.



76 **1.** Voici le début d'un tableau. Le reproduire et le compléter.
Par exemple, 3,141 592 92 appartient aux ensembles 𝔻, ℚ et ℝ.

	ℕ	ℤ	𝔻	ℚ	ℝ
3,141 592 92			X	X	X
$\frac{355}{113}$				x	x
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Voici les nombres à inscrire en première colonne :

a. $\frac{339}{113}$; **b.** 10^3 ;

c. 2^{-1} ; DQR **d.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$;

e. $\sqrt{12}$; R **f.** $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}$; DQR

g. $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$; QR **h.** π. R

2. Pour le nombre $\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, un élève a mis une croix dans la dernière case seulement.
A-t-il raison ? DQR

Diviseurs et nombres premiers

77 Les nombres suivants sont-ils premiers :
1914 ; 1 515 ; 43 ; 91 ; 1 001 ; 271 ; $2^{17}+1$; 43×271 ?

78 Décomposer en produit de facteurs premiers :
11 ; 1 111 et 11 111.

79 Montrer que, si a^2-b^2 est premier, alors les entiers a et b sont consécutifs.

80 Deux nombres premiers dont la différence est 2 sont appelés jumeaux.
a. Pourquoi 2 n'a-t-il pas de jumeau ?
b. Trouver les couples de jumeaux inférieurs à 102.
c. Il a été remarqué que, sauf pour 3 et 5, tous les couples de jumeaux s'écrivent sous la forme $6n-1$ et $6n+1$.
Le vérifier pour les couples de jumeaux inférieurs à 102.
d. Tous les nombres qui s'écrivent $6n-1$ et $6n+1$ sont-ils des nombres premiers jumeaux ?

81 Soit le nombre $A=2^3\times 5^2\times 7$.
a. Vérifier que A possède 24 diviseurs.
b. Trouver le plus petit naturel k tel que kA soit le carré d'un entier.
c. Trouver le plus petit naturel m tel que mA soit le cube d'un entier.

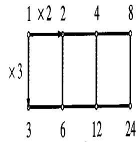
82 **Crible d'Ératosthène**
a. Faire un tableau de 10 cases sur 10 cases contenant les nombres de 1 à 100.
b. Faire une croix sur les multiples de 2 supérieurs à 2, puis sur les multiples de 3 supérieurs à 3 qui ne sont pas déjà barrés, puis sur les multiples de 5 ...
c. À partir de quel nombre est-on sûr qu'il n'y a plus que des nombres premiers non barrés ?
d. Mêmes questions pour les nombres allant de 1 à 400 et avec un tableau de 20 cases sur 20 cases.

83 **Nombres de Mersenne**
Il est démontré que si 2^n-1 est premier, alors n est premier. Par exemple, on sait montrer depuis 1979 que $2^{44\,497}-1$ est premier.
Démontrer que la réciproque est fausse.

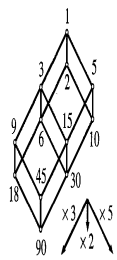
84 Fermat et Euler ont cru tout d'abord que tout nombre de la forme $2^{2^n}+1$ était premier. C'est vrai pour $n=4$, mais faux pour $n=5$. En effet, Euler a montré que $2^{32}+1=4\,294\,967\,297$ est divisible par 641.
La propriété est-elle vraie pour $n=1$? pour $n=2$? Pour $n=3$?

Exercices et problèmes

85 **Des treillis de diviseurs**
Voici une façon esthétique de visualiser les diviseurs d'un nombre : $24=2^3\times 3$; d'où le « treillis » de diviseurs de 24.



On introduit une nouvelle dimension avec : $90=2\times 3^2\times 5$, dont voici le « treillis » de diviseurs.



a. Représenter, de même, le treillis des diviseurs des nombres suivants : 80 ; 84 ; 100 et 720.
b. Imaginer comment représenter le treillis de 420.

Calculs

86 En moins d'une minute, il est facile de donner une fraction égale à la somme :

$$S=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}.$$

Calculer d'abord $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ puis $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$. Enfin, calculer S.

87 **Le système babylonien**
a. Dans notre système décimal, le nombre 3, 141 est égal à $3+\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{1}{10^3}$. Les Babyloniens utilisaient la base soixante et le nombre qu'ils écrivaient en mettant à la suite 3, 8, 29, 44 était la somme $3+\frac{8}{60}+\frac{29}{60^2}+\frac{44}{60^3}$.
Vérifier qu'il s'agit d'une approximation du nombre π. Avec quelle précision ?
b. De quel nombre connu le nombre babylonien 1, 24, 51, 10 est-il une valeur approchée ?

88 **a.** Donner avec la précision de votre calculatrice une valeur approchée de $A=\frac{14\,616}{36\,036}$ et de $B=\frac{6\,902}{17\,017}$.
b. Peut-on en déduire que $A=B$?
c. A est-il effectivement égal à B ?

89 **a.** Donner avec la précision de votre calculatrice une valeur approchée de $C=\frac{941\,664}{665\,857}$ et de $D=\sqrt{2}$.
b. Peut-on en déduire que $C=D$?
c. Calculer $2\times 665\,857^2$ et $941\,664^2$. Que peut-on en conclure ?
d. Quel est le chiffre des unités de $2\times 665\,857^2$? Et celui de $941\,664^2$? Que peut-on en conclure ?

90 **Les planètes du système solaire**
Voici les distances moyennes des neuf planètes principales du système solaire au Soleil.
Soleil-Jupiter : $77{,}8\times 10^7$ km ;
Soleil-Mars : 228×10^6 km ;
Soleil-Mercure : 58 000 000 km ;
Soleil-Neptune : 4,5 milliards de km ;
Soleil-Pluton : 59×10^8 km ;
Soleil-Saturne : mille quatre cents millions de km ;
Soleil-Terre : 149 597 870 km ;
Soleil-Uranus : $0{,}3\times 10^{10}$ km ;
Soleil-Vénus : 108 millions de km.
a. Écrire une valeur approchée de ces distances en km en notation scientifique, puis classer ces planètes de la plus proche à la plus éloignée du Soleil.
b. De combien de fois la distance entre le Soleil et la Terre est-elle plus petite que la distance entre le Soleil et Pluton ?

91 Une bande de papier mesure 64 cm de long. On la coupe par le milieu, puis on prend une des deux parties et on la recoupe par le milieu ... et ainsi de suite.
a. Après trois coupes, quelle est la longueur d'un des morceaux de la bande de papier ?
b. Comment écrire la mesure de la longueur d'un morceau après neuf coupes ? Calculer cette longueur. Peut-on continuer ?

92 **a.** Calculer 2^{10}. On utilisera pour la question suivante l'approximation $2^{10}\approx 10^3$.
b. Sans utiliser de calculatrice donner une valeur approchée de 2^{100}.

93 Lundi, Jean décide de confier un secret à trois personnes. Chaque jour de la semaine, chaque détenteur du secret le confie à trois autres personnes qui ne le connaissaient pas. Dimanche soir, combien de personnes connaîtront le secret ?

94 Donner une écriture simplifiée des nombres suivants :
a. $(-\sqrt{2})^2$; **b.** $\frac{3}{\sqrt{3}}$; **c.** $(-\sqrt{2})\sqrt{(-\sqrt{2})^2}$; **d.** $\frac{\sqrt{2^2}}{2}$;
e. $0{,}5\sqrt{0{,}5}$; **f.** $(1+\sqrt{2})^2-3$; **g.** $(1+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})$;
h. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; **i.** $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{28}}$; **j.** $\sqrt{50}-\sqrt{18}-\sqrt{8}$.

Exercices et problèmes

Pièges et astuces

95 Être égaux ou ne pas l'être ?

Au moyen de sa calculatrice, Lola calcule les nombres

$$a=\frac{1}{\sqrt{6}-2} \quad \text{et} \quad b=1+\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$$

Au vu des résultats, elle affirme que ces deux nombres sont égaux !

Son frère Merlin affirme que ce calcul ne prouve rien : « ce n'est pas une preuve ! »

Comment les départager ?

96 Une belle multiplication

Calculer $a-b$ avec :

$a = 1234567891234567892^2$.

$b = 1234567891234567888 \times 1234567891234567896$.

97 **a.** Soit le nombre $M=\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}$.

Donner une approximation de M à la calculatrice.

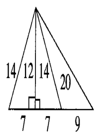
b. Soit $P=\sqrt{(7+2\sqrt{6})(7-2\sqrt{6})}$.

Calculer P sans calculatrice.

c. Calculer le carré de M et retrouver M en utilisant la valeur de P.

Calcul sur des figures

98 Le croquis ci-contre représente une coupe d'un détail d'une construction babylonienne, avec les dimensions en « coudées ».

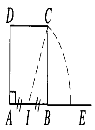


Mathématiquement parlant il y a une légère erreur dans les données : où et pourquoi ?

Comment la corriger ?

99 Le nombre d'or

$ABCD$ est un carré de côté 1 et I est le milieu de $[AB]$. Le cercle de centre I, de rayon $[IC]$ coupe $[AB]$ en E.



a. Calculer IC puis montrer que :

$$AE=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

b. Ce nombre est le Nombre d'Or. Notons-le x.

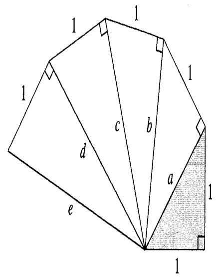
Vérifier que $x^2=x+1$.

100 La spirale de Pythagore

Au départ, le triangle colorié est rectangle et isocèle.

On construit ensuite de proche en proche des triangles rectangles : pour tous ces triangles, l'un des côtés de l'angle droit a pour mesure 1.

a. Calculer exactement les longueurs a, b, c, d et e.



b. Combien faut-il tracer de triangles rectangles pour parvenir à la construction d'un segment de longueur $\sqrt{13}$? Et $\sqrt{37}$?

c. Comment pourriez-vous construire de manière plus économique chacune de ces longueurs avec un seul triangle rectangle ?

Pour aller plus loin

101 Un certain Fibonacci

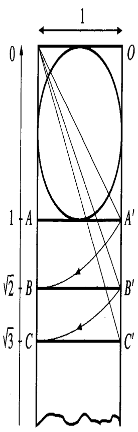
Soit le nombre $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, où n représente un entier.

a. Utiliser une calculatrice pour donner des valeurs approchées de ce nombre pour n variant successivement de 1 à 10.

b. Quelle conjecture peut-on faire à propos de la nature des nombres obtenus ?

c. Quelle conjecture peut-on faire à propos de la manière dont l'un de ces nombres peut se déduire des précédents ?

102 Aux archives municipales d'Arles, on trouve le dessin ci-contre qui date du IVe siècle (Bas Empire Romain).



a. Expliquer la construction des points A, A', B, B', C, C'.

b. Reproduire ce dessin puis placer les points suivants :

D, D', E, E' etc.

c. Expliquer pourquoi on a :

$OB=\sqrt{2}$; $OC=\sqrt{3}$; $OD=\sqrt{4}$; etc.

d. Construire un segment de longueur $\sqrt{7}$ de la même façon.

e. Calculer les distances AB, BC et CD puis en donner une valeur décimale approchée à 0,001 près par défaut.

TD et activités de MODULE

Un peu d'économie

103 Consommation

D'après un traité d'arithmétique de 1854, l'Asie ayant 596 millions d'habitants, l'Afrique 150, l'Europe 180, l'Amérique 60 et l'Océanie 10, on suppose que le pain nécessaire pendant un an pour la population totale est de 1 817 700 000 000 hg, que l'on paie 0,025 F l'hg et que la dépense générale est de 318 097 500 000 F. Quelle est la consommation quotidienne de chaque individu en pain ? Quel est le montant de sa dépense quotidienne pour les autres besoins de sa vie.

104 Les truies de Vauban

Monsieur de Vauban (1633-1707), ingénieur de Louis XIV a écrit un petit livre joliment intitulé :

De la cochonnerie ou calcul estimatif pour connaître jusqu'où peut aller la production d'une truie pendant dix années de temps

Voici le début du texte :

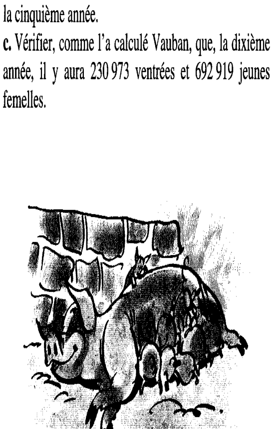
« On suppose qu'une truie, la seconde année de son âge porte une ventrée de six cochons mâles et femelles dont nous ne compterons que les femelles, attendu que pour parvenir à la connaissance que nous cherchons, nous n'avons pas besoin de mâles, et partant....... 3 femelles.
La 3e année que nous compterons pour la 2e génération, la même truie porte deux ventrées, ci..........2 ventrées.
Les 3 filles de la 1re génération, chacune une, font ensemble .... 3 ventrées.
Total des ventrées .... 5 ventrées, qui, à 3 femelles chacune, font pour la 2e génération 15 femelles. »

Chaque truie porte ainsi une ventrée de trois femelles la seconde année de son âge, puis deux ventrées de trois jeunes femelles tous les ans jusqu'à sa sixième année comprise, après laquelle elle ne porte plus.

a. Vauban a calculé qu'il y aurait 23 ventrées donc 69 jeunes femelles la quatrième année. Le vérifier.

b. Calculer le nombre de ventrées et de jeunes femelles la cinquième année.

c. Vérifier, comme l'a calculé Vauban, que, la dixième année, il y aura 230 973 ventrées et 692 919 jeunes femelles.



En astronomie

105 La Terre est sensiblement une sphère de 6 400 km de rayon environ.

a. La masse de la Terre est évaluée à $5{,}88 \times 10^{21}$ tonnes. En déduire la masse en tonnes de 1 m^3 de Terre.

b. Le rayon du Soleil est environ 109 fois celui de la Terre. La masse du Soleil est 330 000 fois celle de la Terre. Si le Soleil est assimilé à une sphère, en déduire la masse en tonnes de 1 m^3 de Soleil.

c. La Lune est sensiblement une sphère de 1 700 km de rayon dont la masse est $7{,}2 \times 10^{22}$ tonnes : quelle est la masse en tonnes de 1 m^3 de Lune ?

106 L'année lumière (a.l.) est la distance parcourue par la lumière pendant une année. On utilise cette unité pour écrire des distances d'étoiles, ces distances nécessitant avec les unités courantes des puissances de dix trop élevées pour être « parlantes ».

a. Chaque seconde, la lumière parcourt environ 300 000 km. Quelle distance la lumière parcourt-elle en un an ? En donner une valeur approchée en écriture scientifique.

b. Combien de temps met la lumière pour nous parvenir du Soleil ? (La distance Terre-Soleil est d'environ 150 millions de km). Donner une valeur approchée de la réponse dans l'unité la plus « parlante ».

c. La lumière provenant de l'étoile Proxima du Centaure met 4,5 années pour nous parvenir : quelle est la distance de la Terre à cette étoile ?

d. L'Étoile Polaire est à environ 350 a.l. de la Terre. Exprimer cette distance en km.

107 Voici les diamètres des neuf planètes principales du système solaire :

Jupiter : 142 800 km ;	Mars : 6 800 km ;
Mercure : 4 880 km ;	Neptune : 49 000 km ;
Pluton : 2 500 km ;	Saturne : 120 000 km ;
Terre : 12 800 km ;	Uranus : 52 300 km ;
Vénus : 12 000 km.	

Écrire une valeur approchée en écriture scientifique de ces diamètres et classer ces planètes en trois groupes : les « grosses », les « moyennes », les « petites ».

108 Voici les masses, par référence à la Terre, des neuf planètes principales du système solaire :

Jupiter : 317,9 ;	Mars : 0,17 ;
Mercure : 0,05 ;	Neptune : 17,2 ;
Pluton : 0,002 ;	Saturne : 95,15 ;
Terre : 1 ;	Uranus : 14,5 ;
Vénus : 0,8.	

La masse de la Terre est 6×10^{24} kg.

a. Écrire une valeur approchée en écriture scientifique de ces masses et classer ces planètes de la plus légère à la plus lourde.

b. Donner la masse de Jupiter en mg.

TD et activités de MODULE

En avant la musique

109 **A.** Calculer 2^{19} et 3^{12}.

En déduire que $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$ vaut environ 2^7. En musique on dit que 12 « quintes » valent à peu près 7 « octaves ».

B. Au XVIIIe siècle, les musiciens européens se fixèrent sur un ensemble de 12 notes de musique constituant une « gamme » dite « tempérée ».
C'est avec elle que J.-S. Bach écrivit pour le « clavecin bien tempéré ». En théorie, les notes de cette gamme sont engendrées par les puissances de $\frac{3}{2}$ (éventuellement divisées par des puissances de deux, pour rester sur l'intervalle $[1\,;2[$). Ainsi, avec $t=\frac{3}{2}$, on a ceci :

FA	est associée à	$t^0=1$
DO	est associée à	$t^1=t$
SOL	est associée à	$\frac{t^2}{2}$
RÉ	est associée à	$\frac{t^3}{2}$
LA	est associée à	$\frac{t^4}{4}$
MI	est associée à	$\frac{t^5}{4}$
SI	est associée à	$\frac{t^6}{8}$
FA#	est associée à	$\frac{t^7}{16}$
DO#	est associée à	$\frac{t^8}{16}$
SOL#	est associée à	$\frac{t^9}{32}$
RÉ#	est associée à	$\frac{t^{10}}{32}$
LA#	est associée à	$\frac{t^{11}}{64}$

Calculer les fractions de la dernière colonne et vérifier que $\left(\frac{t^{12}}{128}\right)$ est une valeur approchée de 1 à 0,015 près.

C. En réarrangeant les 12 nombres trouvés dans l'ordre naturel, retrouver l'ordre des notes de la gamme. Et, pour la gamme classique dite de « Do majeur », retrouver la succession bien connue des « tons » et des « demi-tons ».

Rationnels et décimaux

110 **Aucun rationnel n'est égal à $\sqrt{2}$**

S'il existait une fraction égale à $\sqrt{2}$, on pourrait l'écrire comme une fraction irréductible de la forme $\frac{a}{b}$.

Si $\frac{a}{b}$ était égal à $\sqrt{2}$, alors on aurait $a^2=2b^2$.
Comme cette fraction est irréductible, il n'y a que trois cas possibles car a et b ne peuvent pas être tous les deux pairs :
(1) a impair et b impair.
(2) a impair et b pair.
(3) a pair et b impair.
Étudier séparément chacun de ces trois cas et montrer que chaque fois il y a une impossibilité. Conclure.

111 **Écriture décimale approchée**

Pour un rationnel non décimal, on peut donner une écriture décimale approchée simplement en effectuant la division du numérateur par le dénominateur. Mais cette division ne se « termine » pas.
En divisant par exemple 22 par 7, les restes possibles sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. Comme la division ne se termine pas, on est assuré de retrouver l'un de ces restes après 7 divisions au plus.
Sur cet exemple, on trouve 3, **142 857** 142 857 … .
La partie périodique 142 857 se répète indéfiniment.
a. Trouver la partie périodique de l'écriture décimale approchée de chacun des rationnels suivants :
$\frac{1}{7}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{45}{11}$; $\frac{45}{13}$.
b. Trouver la partie périodique de l'écriture décimale de $\frac{100}{27}$; puis celle de $\frac{100}{37}$. Que remarque-t-on ?
Vérifier que $27 \times 37 = 999$ et expliquer ce phénomène.

112 **Les décimales cachées**

A. Afficher le nombre π sur votre calculatrice.
Soustraire 3 et multiplier par 10.
Soustraire 1 et multiplier par 10.
Et ainsi de suite : soustraire la partie entière et multiplier par 10, plusieurs fois !
Finalement, combien votre calculatrice connaît-elle de décimales de π ? Combien en affiche-t-elle ?

B. a. Faire afficher $\sqrt{2}$ à votre calculatrice. Grâce au « truc » précédent, faire afficher les décimales cachées de votre calculatrice.

b. Faire afficher le quotient $\frac{941\,664}{665\,857}$ et ses décimales cachées. À combien près cette fraction est-elle une valeur approchée de $\sqrt{2}$?
Comment peut-on être sûr de l'exactitude d'une certaine décimale ?

TD et activités de MODULE

Une histoire des nombres

113 **Algorithme d'Euclide**

On trouve, dans les *Éléments* d'Euclide (Ve siècle avant J.-C.), d'une part la théorie des « grandeurs » (où les nombres sont représentés par des longueurs, des aires ou des volumes),
d'autre part les premiers résultats et les premières techniques de l'arithmétique.

Voici par exemple la proposition I du septième livre ; elle décrit une technique que l'on a plus tard décidé d'appeler *algorithme d'Euclide* :
« Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entre eux. »
Par exemple, à partir des nombres 25 et 16, « en retranchant toujours le plus petit au plus grand » on trouve successivement $25-16=9$, $16-9=7$, $9-7=2$, $7-2=5$, $5-2=3$, $5-3=2$ et $3-2=1$.
Que donne cet algorithme à partir des nombres 18 et 30 ?
Comment s'appelle le dernier reste trouvé ?

114 **Les grains de sable de l'Univers**

Un peu plus tard, vers 210 avant J.-C., Archimède (dans un livre intitulé *l'Arénaire*) tente d'écrire le nombre de grains de sable qu'il faudrait pour remplir l'Univers entier (supposé arrondi comme une sphère).
Or il ne disposait pas de notre numération de position en base dix mais seulement de quoi écrire les nombres jusqu'à une *« myriade »* (pour nous 10 000).
Il appela alors *« primes »*, les nombres égaux à un certain nombre de myriades ajouté à un nombre. Il comptait alors jusqu'à une myriade de myriades, soit 10^8. Ainsi $40\,200 = 4$ myriades $+ 200$ est un nombre prime ; puis il appela *« seconds »* les nombres égaux à un nombre prime de myriades de myriades ajoutés à un nombre prime. Il comptait alors jusqu'à une myriade de myriades de myriades de myriades, soit 10^{16}.
Ainsi $32\,172\,004\,532 = 321$ myriades de myriades $+ 7\,200$ myriades $+ 4\,532$ est un nombre second. Il appela nombre *« troisième »* un nombre second de myriades de myriades ajouté à un nombre prime.
a. Jusqu'à quel nombre un nombre troisième permet-il de compter ?
b. En tranches de combien de chiffres Archimède sépare-t-il les grands nombres ?
c. Donner un exemple de nombre troisième.

Archimède prétend alors que le nombre de grains de sable de l'Univers peut s'écrire avec un nombre *« septième »*.
Pour cela il suppose que :
« dix mille grains de sable remplissent une graine de pavot », que *« le diamètre d'une graine de pavot n'est pas inférieur à un quarantième de doigt »* que *« dix mille doigts sont plus qu'un stade »* et *« que le diamètre du monde est inférieur à cent myriades de myriades de stades »*.
d. Quel nombre dépasse, d'après Archimède, le nombre de grains de sable de l'Univers ? (utiliser évidemment les puissances de dix).

115 ***La disme* de Simon Stevin**

La numération décimale et son système d'écriture des décimaux avec une virgule fut introduite en Europe par les marchands arabes vers le XIIe siècle. Le premier traité qui en explique les avantages et les techniques fut écrit en flamand par Simon Stevin (ingénieur des indépendantes Provinces du Nord) en 1585 et immédiatement traduit en français sous le titre de « *La disme* ».
On y trouve écrit ceci : « le produit de
32 ⓪ 5 ① 7 ② par son multiplicateur
8 9 ⓪ 4 ① 6 ② est
2 9 1 3 ⓪ 7 ① 1 ② 2 ③ 2 ④ ».
Expliquer la notation alors utilisée par Simon Stevin.

116 **Les nombres réels**

Cependant, les mathématiciens mirent longtemps à dire ce qu'était vraiment un nombre. Lors d'une célèbre conférence prononcée le 26 avril 1872, Richard Dedekind, annonça le lien qu'il avait découvert (« après y avoir longtemps réfléchi en vain ») dans un article intitulé *« La continuité et les nombres irrationnels »*. Pour cela il remarque ceci :
« Si tous les points d'une droite sont répartis en deux classes telles que tout point de la première classe est situé à gauche de tout point de la deuxième classe, il existe un et un seul point qui opère cette partition de tous les points en deux classes ».
Et il affirme que l'ensemble de tous les nombres vérifie la « même » propriété à savoir :
« Si tous les nombres réels sont répartis en deux classes telles que tout nombre réel de la première classe est inférieur ou égal à tout nombre réel de la deuxième classe, il existe un et un seul nombre réel qui opère cette partition de tous les nombres réels en deux classes. »
Pour comprendre que cette propriété n'est pas vérifiée si on remplace le mot « réels » par le mot « rationnels », étudier la phrase : « si tous les nombres rationnels sont répartis en deux classes telles que tout nombre rationnel de la première classe est inférieur ou égal à tout nombre rationnel de la deuxième classe, *alors il n'existe pas forcément* un nombre rationnel qui opère cette partition de tous les nombres rationnels en deux classes. »
Montrer que la partition des rationnels entre ceux dont le carré dépasse 2 et ceux dont le carré ne dépasse pas 2, justifie la vérité de cette dernière phrase.

2. Déclic 2000

Le cours...

3-Arithmétique

Dire qu'un entier est multiple de k signifie que cet entier est divisible par k.
Tous les **multiples du nombre** k s'écrivent donc $k \times n$, où n est un entier naturel.

Tous les nombres pairs, multiples de 2, s'écrivent $2n$, et tous les nombres impairs s'écrivent $2n+1$.

Critères de divisibilité

- Par 2 : le dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Par 3 : la somme des chiffres est multiple de 3.
- Par 5 : le dernier chiffre est 0 ou 5.
- Par 9 : la somme des chiffres est multiple de 9.
- Par 10 : le dernier chiffre est 0.

exemple

5 490 est divisible par 2 et par 5 ; donc 5 490 est divisible par 10, car le dernier chiffre est 0.
La somme de ses chiffres est $5+4+9+0=18$, multiple de 9 ; donc 5 490 est divisible par 9.

Nombre premier

définition

Un nombre premier est un entier naturel n'ayant que **deux diviseurs distincts** :
1 et lui-même.

Les nombres 0 et 1 ne sont pas premiers. Il y a 15 nombres premiers inférieurs à 50 :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

exemple

Pour chercher si le nombre 347 est premier, on vérifie que les critères de divisibilité ne s'appliquent pas, puis on divise 347 successivement par les nombres premiers 7, 11, 13, ...

```
347/19
     18.26315789
347-19*18
               5
```

347	7	347	11	347	13	347	17	347	19
67	49	17	31	87	26	07	20	157	18
4		6		9		7		5	

Le quotient obtenu devient inférieur au diviseur, il est inutile d'aller plus loin. Donc 347 est un nombre premier.

Décomposition d'un entier

On admet qu'un entier naturel, sauf 0 et 1, peut toujours s'écrire sous la forme d'un produit où **chaque facteur est un nombre premier.**

exemple

Pour obtenir la décomposition en produit de facteurs premiers, on utilise au maximum les critères de divisibilité et les tables de multiplication.

$450 = 45 \times 10 = 5 \times 9 \quad \times \quad 2 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$.

$282 = 2 \times 141 = 2 \times \quad 3 \quad \times 47$. Or 47 est premier, donc $282 = 2 \times 3 \times 47$.

$28 \times 198 = 4 \times 7 \quad \times \quad 9 \times 22 = 2^2 \times 7 \times 3^2 \times 2 \times 11 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11$.

▶ *Voir T.D.*

Arithmétique

...sa mise en pratique

Exercice résolu : utiliser les critères de divisibilité

Écrire la fraction $\frac{4\,716}{35\,370}$ sous forme irréductible.

▶ *Voir Exercices* 68 *à* 71

rappel

Une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont **premiers entre eux**, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

4 716 se termine par 6, donc est divisible par 2.
$4+7+1+6=18$, donc 4 716 est divisible par 9 ;
d'où $4\,716 = 2 \times 9 \times 262 = 2 \times 9 \times 2 \times 131$.

35 370 se termine par 0 et $3+5+3+7=18$;
d'où $35\,370 = 10 \times 9 \times 393 = 10 \times 9 \times 3 \times 131$.

Ainsi $\frac{4\,716}{35\,370} = \frac{2 \times 9 \times 2 \times 131}{10 \times 9 \times 3 \times 131} = \frac{2}{15}$,
après simplification par $2 \times 9 \times 131$.

Or, 2 et 15 n'ont pas de diviseur en commun autre que 1 : ils sont premiers entre eux.
Donc $\frac{2}{15}$ est irréductible.

Exercice résolu : utiliser la décomposition

▶ *Voir Exercices* 80 *à* 84

Simplifier l'écriture exacte des nombres suivants : **a)** $\sqrt{56} \times \sqrt{105}$; **b)** $\frac{35}{82} \times \frac{123}{770}$; **c)** $\frac{3}{50} + \frac{8}{105} - \frac{5}{42}$.

méthode

On recherche la décomposition en **produit** pour simplifier des expressions avec radicaux ou avec fractions.

a) $\sqrt{56} \times \sqrt{105} = \sqrt{7 \times 8 \times 5 \times 21}$
$= \sqrt{7 \times 2^3 \times 5 \times 3 \times 7}$
$= 7 \times 2 \times \sqrt{2 \times 5 \times 3} = 14\sqrt{30}$.

b) $\frac{35}{82} \times \frac{123}{770} = \frac{5 \times 7 \times 3 \times 41}{2 \times 41 \times 7 \times 11 \times 2 \times 5} = \frac{3}{44}$.

On a simplifié par 5, 7 et 41.

c) $\frac{3}{50} + \frac{8}{105} - \frac{5}{42} = \frac{3}{2 \times 5^2} + \frac{8}{3 \times 5 \times 7} - \frac{5}{3 \times 2 \times 7}$.

Le plus petit multiple commun des dénominateurs est :
$DC = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$.

$= \frac{3 \times 3 \times 7 + 8 \times 2 \times 5 - 5 \times 5^2}{2 \times 3 \times 5^2 \times 7} = \frac{63 + 80 - 125}{2 \times 3 \times 5^2 \times 7}$

$= \frac{18}{2 \times 3 \times 5^2 \times 7} = \frac{2 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 5^2 \times 7} = \frac{3}{5^2 \times 7} = \frac{3}{175}$.

Calculatrice : recherche de nombres premiers

▶ *Voir Exercices* 78 *et* 79

Les nombres pairs, autres que 2, ne sont pas premiers. Le programme ci-dessous, sur TI (80 82 ou 83) teste si un nombre impair est premier.

On entre le nombre N et on va le diviser successivement par D,
qui prend les valeurs 3, 5, 7, ..., de 2 en 2 :

- si $D^2 \leqslant N$, alors :
  - si la partie décimale (fPart) du quotient N/D est nulle, alors le nombre N est divisible par D ;
  - sinon, on revient au label 1, et on rajoute 2 à D ;
- si $D^2 > N$, alors inutile de continuer, N est premier.

```
Input "NOMBRE", N
1→D
Lbl 1
D+2→D
If D*D≤N
Then
If fPart (N/D) = Ø
Then
Disp "DIVISIBLE PAR ", D
Else
Goto 1
End
Else
Disp "PREMIER"
End
```

```
prgmAPREMIER
NOMBRE 1259
PREMIER
            Done

prgmAPREMIER
NOMBRE 2021
DIVISIBLE PAR
              43
            Done
```

1 Travaux dirigés

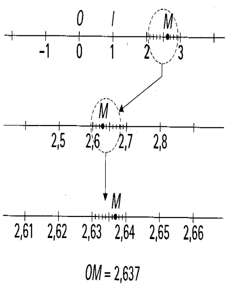
1 Droite et nombres

On considère la droite $\mathcal{D}$ ci-contre, munie du repère $(O\,;I)$, l'unité graphique étant le centimètre.

On place un point M sur cette droite.

Pour mesurer la longueur OM, on utilise des instruments de mesure de plus en plus précis (règle graduée, loupe, microscope ...). On peut imaginer que, sous réserve d'un agrandissement suffisant, on puisse faire coïncider exactement le point M avec une graduation de l'échelle de mesure.

La longueur OM serait alors un nombre décimal.



$OM = 2{,}637$

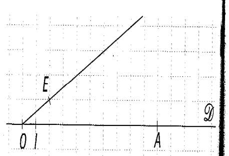
Tout point de la droite $\mathcal{D}$ aurait donc une abscisse décimale.

La suite de ce *T.D.* permet, à l'aide de contre-exemples, de justifier qu'il n'en est rien.

1 Construction géométrique du point d'abscisse $\frac{10}{7}$

Sur la droite $\mathcal{D}$, on place le point A d'abscisse 10.

Soit E un point non situé sur la droite $\mathcal{D}$ et F le point de la demi-droite $[OE)$ tel que $OF = 7\,OE$.



La parallèle à la droite (AF) passant par E coupe la droite $\mathcal{D}$ en B.

a) Faire la construction et démontrer que le point B a pour abscisse $\frac{10}{7}$.

b) Effectuer à la main la division de 10 par 7. Cette division « tombe-t-elle juste » ?

Le nombre $\frac{10}{7}$ est-il un décimal ? Pourquoi ce résultat contredit l'idée énoncée en début de ce *T.D.* ?

2 Construction géométrique du point d'abscisse $\sqrt{2}$

Sur la droite Δ, perpendiculaire en O à la droite $\mathcal{D}$, on place le point J tel que $OJ = OI$ et on construit le carré $OIKJ$.

Le cercle de centre O et de rayon OK coupe la demi-droite $[OI)$ en M.

Faire la construction puis démontrer que M a pour abscisse $\sqrt{2}$.

Or les Pythagoriciens, membres de l'école de Pythagore, ont démontré que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, encore moins un décimal !

▶ *Voir Problème 92*

■ Pour aller plus loin

1° Expliquer comment construire le point R de la droite $\mathcal{D}$, d'abscisse $\frac{a}{b}$ quotient d'un entier relatif a par un entier naturel b non nul.

Construire par exemple le point d'abscisse $-\frac{3}{5}$.

2° Expliquer comment construire sur $\mathcal{D}$ le point d'abscisse $\sqrt{a^2+b^2}$, où a et b sont des entiers. Construire par exemple le point d'abscisse $\sqrt{41}$.

▶ *Voir Exercices 25 à 27*

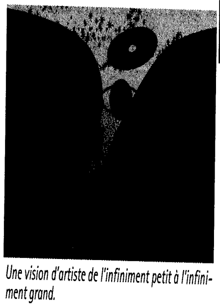
1 travaux dirigés

2 Notation scientifique et conversions

Les résultats seront donnés arrondis à 2 chiffres significatifs.

1 Quel est le volume d'une gouttelette sphérique de $3\ \mu m$ de rayon, exprimé en m^3 ?

(On rappelle qu'il y a un million de micromètres μm dans un mètre et que le volume d'une boule de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$.)



Une vision d'artiste de l'infiniment petit à l'infiniment grand.

2 Une année de lumière, notée al, est la distance parcourue par la lumière en une année : elle vaut environ 9,5 millions de millions de km.

Le Soleil est situé à une distance moyenne de la Terre de 150 millions de kilomètres. La vitesse de la lumière est de 300 millions de mètres par seconde.

a) Combien de temps faut-il aux rayons du Soleil pour parvenir jusqu'à nous ?

b) *Proxima du Centaure*, l'étoile la plus proche de notre système solaire, est située environ à 4,25 al de la Terre. Une fusée, partant de la Terre, avance à une vitesse moyenne de $9\,000\ m.s^{-1}$.

Combien de temps mettrait cette fusée pour parvenir à *Proxima du Centaure* ?

■ Pour aller plus loin

▶ *Voir Exercices 4 à 37*

On peut assimiler un proton à une boule de rayon $1{,}5 \times 10^{-9}\ \mu m$, pour une masse de $1{,}7 \times 10^{-27}$ kg.

Quelle est la masse volumique du proton, exprimée en $g.cm^{-3}$?

Quel serait le rayon de la Terre si elle était composée uniquement de protons ?

(Masse de la Terre : $5{,}98 \times 10^{24}$ kg.)

3 Diviseurs d'un nombre décomposé en facteurs premiers

On se propose d'utiliser un algorithme* pour obtenir tous les diviseurs d'un entier non premier.

1 Vérifier que $2^3 \times 3^2$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de 72.

2 On considère le produit $P = (1+2+2^2+2^3) \times (1+3+3^2)$.

a) Développer entièrement ce produit, en appliquant la distributivité, mais sans effectuer la somme.

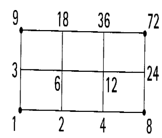
Que représentent les termes obtenus pour l'entier 72 ?

Retrouver ces termes dans le schéma ci-contre.

b) Donner le nombre de termes de la somme $(1+2+2^2+2^3)$, ...uis de la somme $(1+3+3^2)$?

...re le lien avec le nombre de termes du produit P.

...mbien 72 possède-t-il de diviseurs ?



...our aller plus loin

...dmet que la particularité repérée ci-dessus se généralise.

...même façon, déterminer tous les diviseurs de 135.

...ien le nombre $2^5 \times 5^4 = 20\,000$ possède-t-il de diviseurs ?

...thme : procédé de calcul, vient du nom latinisé du mathématicien arabe Al Kwarizmi.

1 exercices

Les exercices dont les numéros sont sur fond vert peuvent se faire oralement.

Les exercices dont les numéros sont sur fond rouge sont corrigés en fin d'ouvrage.

La page de calcul

1. Avec des fractions

Règles

① Règles des signes :

$$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

② Pour simplifier ou réduire au même dénominateur :

$$\frac{ka}{kb}=\frac{a}{b}.$$

③ Addition de fractions ayant même dénominateur :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}.$$

④ Multiplication :

$$k\times\frac{a}{b}=\frac{ka}{b}=\frac{a}{b}\times k \quad \text{et} \quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}.$$

⑤ Division :

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

1 Effectuer les opérations suivantes et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

a) $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}$; b) $4-\frac{1}{2}$; c) $5+\frac{3}{2}$;

d) $\frac{8}{3}-\frac{1}{5}$; e) $\frac{2}{35}-\frac{1}{7}+\frac{11}{4}$; f) $\frac{1}{3}-1+\frac{1}{4}$;

g) $3-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$; h) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$; i) $3-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}$.

2 Effectuer les produits suivants et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

a) $\frac{5}{4}\times\frac{12}{35}$; $27\times\frac{3}{4}$; $\frac{10}{3}\times\frac{28}{45}$.

b) $2\times\frac{3}{7}\times\frac{14}{9}$; $\frac{1}{8}\times72\times\frac{2}{27}$; $26\times\frac{49}{39}$.

3 Même exercice.

a) $4\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$; b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)$;

c) $\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)$; d) $27\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)$.

4 Effectuer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

$3\div\frac{5}{2}$; $\frac{2}{3}\div\frac{4}{15}$; $25\div\frac{40}{3}$; $\left(1+\frac{2}{5}\right)\div\left(3-\frac{1}{5}\right)$.

5 Même exercice.

a) $\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)\div\frac{3}{4}$; b) $3-\frac{2}{3}\times\frac{5-2}{8-2}$; c) $1-2\times\frac{3-4}{7-3}$.

2. Avec des radicaux

Racine carrée

Définition : a étant un nombre positif (ou nul), $\sqrt{a}$ est le nombre **positif** (ou nul), qui élevé au carré donne a.

$$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a, \text{ avec } a\geqslant 0.$$

Règles

① $\sqrt{a}$ n'est définie que si a est un nombre positif (ou nul).

② a étant un nombre positif, il existe deux nombres $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ qui **élevés au carré donnent** a.

③ a et b étant des nombres positifs :

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab} \ ; \ \sqrt{a^2b}=a\sqrt{b} \ ;$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ avec } b\neq 0.$$

④ Il faut **calculer** le nombre sous le radical $\sqrt{\ }$ **avant de** calculer la racine carrée !

$\sqrt{4+1}$ signifie « racine carrée de la somme $4+1$ ».

6 Écrire les nombres sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b étant le plus petit possible. (On dit que l'on « extrait » a du radical.)

Exemple :

$$\sqrt{540}=\sqrt{9\times6\times5\times2}=\sqrt{3^3\times2^3\times5}=6\sqrt{15}.$$

a) $\sqrt{27}$; $\sqrt{200}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{242}$; $\sqrt{252}$.

b) $\sqrt{98}$; $\sqrt{338}$; $\sqrt{150}$; $\sqrt{63}$; $\sqrt{845}$.

exercices 1

7 Simplifier à l'aide des propriétés :

a) $2\sqrt{3}\times6\sqrt{3}$; $\sqrt{5}\times3\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}\times4\sqrt{15}$.

b) $\sqrt{5}\times2\sqrt{45}$; $6\sqrt{12}\times\sqrt{3}$; $2\sqrt{6}\times\sqrt{42}$.

c) $2\sqrt{3}\times2\sqrt{12}$; $(2\sqrt{5})^2$; $(3\sqrt{2})^2$.

8 Même exercice.

a) $2\sqrt{3}-5\sqrt{3}+\sqrt{3}$; $\sqrt{45}+2\sqrt{5}-3\sqrt{20}$.

b) $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\times\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{25}}$; $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{12}}\times\frac{\sqrt{15}}{9}$; $\frac{3}{\sqrt{27}}\times\sqrt{75}$.

c) $(\sqrt{5})^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3$; $(2\sqrt{3})^2-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$.

9 ★ Développer :

a) $(3+\sqrt{2})^2$; $(\sqrt{5}-1)^2$; $(3-\sqrt{5})^2$.

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$; $(\sqrt{5}-2)^2$; $(2\sqrt{7}-\sqrt{11})^2$.

c) $1-(\sqrt{5}-1)^2$; $(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2}-1)^2$.

10 ★ Même exercice.

a) $(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})$; $(4\sqrt{5}-1)^2$.

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2$; $\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$; $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)^2$.

11 Simplifier au maximum.

a) $a\sqrt{2}-\frac{a\sqrt{2}}{2}+a\sqrt{8}$; $2\sqrt{5}-\frac{3}{4}\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{4}$.

b) $\frac{1}{2}a\times\frac{3a}{2\sqrt{3}}$; $\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{3}{16}a^2}\times a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

c) $(a\sqrt{3})^2-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$; $\frac{4}{3}\times\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

12 ★★ Écrire les nombres suivants sous la forme $a+b\sqrt{c}$, la plus simple possible :

1° a) $(2-\sqrt{3})\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)$; b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}\times(\sqrt{2}-1)^2$.

2° a) $\frac{2-3\sqrt{5}}{4}$; b) $\frac{5\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{121}}{2}$.

3° a) $\frac{8-3\sqrt{5}}{4}$; b) $\frac{-2+\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$; c) $\frac{15-\sqrt{48}}{6}$.

3. Avec des exposants

• Puissance

Soit a un nombre non nul et n un entier naturel non nul. Par définition, la puissance n de a est le produit :

$$a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ facteurs identiques à } a}, \text{ où } n \text{ est l'exposant.}$$

• Règles

① Par convention : $a^0=1$ et $a^1=a$; $a^{-1}=\frac{1}{a}$ et $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, avec n entier naturel.

② Produit de puissances d'un même nombre non nul :

$$a^n\times a^p=a^{n+p}, \text{ avec } n \text{ et } p \text{ entiers relatifs}$$

$$(a^n)^p=a^{n\times p} \quad \text{et} \quad \frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$$

③ Puissance d'un produit ou d'un quotient de nombres non nuls :

$$(a\times b)^n=a^n\times b^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},$$

avec n entier relatif.

④ Puissance de 10 :

exemple : $10^{-5}=\frac{1}{10^5}=\frac{1}{\underbrace{100\,000}_{5 \text{ zéros}}}=\underbrace{0{,}000\,01}_{5 \text{ chiffres}}$.

Attention ! Ne pas confondre :

2^{-3}, -2^3 et 2×10^{-3} ; $(-2)^4$ et -2^4

$2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}=0{,}125$ et $-2^3=-8$;

2^{-3} et $2\times10^{-3}=0{,}002$.

13 Calculer :

a) 2^5 ; 10^4 ; 10^{-3} ; $(-2)^4$; -2^4. b) 4^0 ; 10^1 ; $0{,}5^{-2}$.

14 Les calculs effectués sont-ils corrects ?

a) $3^2\times5^2=15^2$; b) $2^3\times5^2=10^5$;

c) $2^2+2^4=2^6$; d) $3^1\times3^0=3$;

e) $(4+1)^3=4^3+1$; f) $(2-1)^5=1$;

g) $200^3=8\times100^3=8\,000\,000$;

h) $\frac{4}{9}=\frac{2^2}{3}$; i) $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$; j) $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{10}$.

15 Simplifier les écritures, en indiquant la règle utilisée.

1° x^{-1} ; $3^6\times3^{-2}$; $(a^{-3})^{-4}$; $(5x)^2$; $(a\sqrt{3})^2$.

2° ★ $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; $\frac{3^4}{3^{-2}}$; $\frac{1}{9}\times3^n$; $\frac{2^n}{2^{n+1}}$; $5^{n+1}-5^n$.

16 ★★ Même exercice.

a) $\frac{(-5^2\times10^{-5})^3}{(5^2\times10^{-3})^5}$; b) $\frac{0{,}7\times10^5}{14\times10^3}$.

1 Ensembles de nombres

1. Nature d'un nombre

17 Pour vérifier si le cours est compris.

	0	3,5	4,0	- 7	$\frac{7}{3}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\in \mathbb{N}$							
$\in \mathbb{Z}$							
$\in \mathbb{D}$							
$\in \mathbb{Q}$							
$\in \mathbb{R}$							

	$-\frac{230}{5}$	3,14	$\frac{22}{7}$	π	$\sqrt{2}$	$\sqrt{100}$	$\sqrt{1000}$
$\in \mathbb{N}$							
$\in \mathbb{Z}$							
$\in \mathbb{D}$							
$\in \mathbb{Q}$							
$\in \mathbb{R}$							

1° Mettre une croix dans chaque case lorsque le nombre appartient à l'ensemble indiqué.

2° Comment interpréter ce que l'on a obtenu dans la dernière ligne ?

3° Comment appelle-t-on les nombres pour lesquels seule la dernière case de la colonne est cochée ?

4° Comment ce tableau permet-il de retrouver les inclusions successives des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$?

18 Pour chacun des nombres suivants, indiquer le plus petit ensemble de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ auquel il appartient, et sa nature (on indiquera les simplifications).

a) $-\frac{84}{14}$; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{-25}{\sqrt{100}}$; d) 3,333 ;

e) $\frac{-60\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$; f) $4,1 \times 10^3$; g) 1,3333...

19 ★ Donner la nature des nombres suivants :

a) 51022,66 ; $\frac{6}{6}$; $-\frac{18}{6}$; $-\frac{\sqrt{25}}{6}$;

b) $\frac{-16\pi}{-2\pi}$; $\frac{\pi+1}{\pi+3}$; $\frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{21}}$; $\frac{-4,05}{5}$;

c) $-3\sqrt{2}+1$; 10^{-6} ; -10^{-6} ; $(3\sqrt{2}-1)^2$.

20 ★ Même exercice.

a) -18 ; 1,25 ; $\sqrt{7}$; 2π ; 0 ; $-\frac{28}{5}$; $\frac{-0,45}{-0,05}$; $\frac{2\pi-4}{3\pi-6}$;

b) $\frac{\pi}{3,141592654}$; $\frac{\sqrt{75}}{2}$; $\frac{3}{\sqrt{2}}$; $\frac{-5\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$; $\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{5}$.

21 ★ Donner la nature des nombres suivants :

a) $4,24 \times 10^5$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $-\frac{5}{3}$; d) $\frac{56}{7000}$;

e) 3,141592654 ; f) $-1,666666667$; g) 8×10^{-3}.

Y a-t-il des nombres égaux dans cette liste ?

22 On donne la liste des réels :

1. $\sqrt{5}$; 2. $\sqrt{1,44}$; 3. $\sqrt{0,346921}$; 4. π

et la liste des décimaux :

a) 0,23606798 ; b) 1,2 ; c) 0,589 ; d) 3,14159.

Trouver les égalités entre les nombres de la première et ceux de la seconde liste.

23 Donner, si possible :

a) un entier qui ne soit pas naturel ;

b) un rationnel qui ne soit pas décimal ;

c) un décimal qui ne soit pas rationnel ;

d) un réel qui ne soit pas décimal ;

e) un irrationnel ;

f) un décimal compris entre $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{3}$;

g) un rationnel qui diffère de $\sqrt{3}$ de moins de 0,01 ;

h) un irrationnel compris entre -2 et -1 ;

i) un décimal strictement positif et inférieur à : 0,000 000 000 1 ;

j) un entier inférieur à l'inverse de $\pi - \sqrt{10}$.

24 ★ Vrai ou faux ? Justifier.

▶ *Voir Module* 10, *p. 167*

a) L'opposé d'un entier est un entier.

b) L'inverse d'un entier non nul est un décimal.

c) $a-b$ et $b-a$ sont deux nombres inverses.

d) L'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel.

e) L'inverse d'un irrationnel est un irrationnel.

f) Le carré d'un irrationnel peut être rationnel.

g) Tout nombre entier est un décimal.

h) La racine carrée d'un entier naturel est toujours un irrationnel.

i) La fraction $\frac{22}{7}$ est égale à 3,142857143.

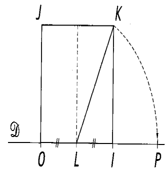
j) L'inverse de 3,375 est $\frac{8}{27}$.

k) L'inverse de $-\frac{16}{7}$ est un décimal.

2. La droite des réels

25 Sur une droite munie d'un repère $(O\,;I)$, d'unité graphique 2 cm, construire géométriquement les points A, B et C tels que $x_A = \frac{8}{3}$; $x_B = \sqrt{13}$ et $x_C = 3 - \sqrt{2}$.

26 ★ $OIKJ$ est un carré construit sur la droite $\mathcal{D}$, L est le milieu du segment $[OI]$ et $LP = LK$.



1° Démontrer que l'abscisse de P, dans le repère $(O\,;I)$, est le nombre $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (pour la lettre grecque ϕ, lire phi).

2° a) Calculer ϕ^2 et $\phi + 1$. Conclure.

b) Montrer que $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$. (Voir problème résolu, p. 20.)

Ce nombre ϕ est le « nombre d'or ».

27 ★ 1° Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2.

a) Déterminer la hauteur de ce triangle.

b) Sur une droite réelle, d'unité graphique 5 cm, construire le point d'abscisse $\sqrt{3}$.

2° a) En remarquant que $39 = 3 \times 13$, trouver deux entiers a et b tels que $39 = (a+b)(a-b)$.

b) En déduire une méthode pour construire un segment de longueur $\sqrt{39}$ cm.

2 Écriture des nombres

1. Nombre décimal

28 Puissances de 10

1° Écrire sous forme de puissance de 10 :

a) 10 000 ; b) un milliard ; c) 0,000 000 1 ;

d) un cent-milliardième ; e) $(10\,000)^5$;

f) $\frac{0,0001}{(1000)^4}$; g) $\frac{0,01}{100^2}$; h) $\frac{1\,000^3}{0,0001}$.

2° b) Ranger dans l'ordre croissant les trois nombres : $x = 1000^{10}$, $y = 10^{100}$ et z : le carré d'un milliard.

29 ★ Trouver les entiers relatifs x, y et z vérifiant les égalités suivantes :

a) $10^{x-2} = 10^3 \times 100$; b) $(10^{y-1})^{y-2} = 100$;

c) $1000^{-2z} \times 100\,000 = \frac{1}{10\,000\,000}$.

30 Traduire les nombres figurant dans les phrases suivantes en écriture scientifique, et donner l'ordre de grandeur (puissance de 10).

a) En France, l'impôt sur le revenu se monte à [illegible]730 000 euros et l'ensemble des recettes fiscales à [illegible]5 500 millions d'euros.

b) Un cheveu humain pousse à une vitesse d'environ [illegible]0 000 016 km.h^{-1}.

c) L'agriculture existe depuis plus de 300 000 000 000 secondes.

31 ★★ Reprendre les nombres de l'exercice 30.

a) Exprimer les recettes fiscales, autres que l'impôt sur le revenu, en kiloeuros.

b) Exprimer la vitesse de pousse d'un cheveu en centimètres par mois (on prendra 30 jours pour le mois).

c) Exprimer la durée d'existence de l'agriculture en siècles.

Calcul mental sur les décimaux

• **Règles**

On utilise les règles de calcul sur les entiers et les décimaux écrits sous forme d'un entier multiplié par une puissance de 10 et quelques règles de base :

$2 \times 5 = 10$; $4 \times 25 = 100$;

multiplier un entier par 100, c'est lui « ajouter » deux zéros ; diviser par 5, c'est multiplier par 2, puis diviser par 10...

Exemple : $A = 25\,000 \times 3\,600 \times 0,0007$

$= 25 \times 4 \times 9 \times 7 \times 10^3 \times 10^2 \times 10^{-4}$

$= 6\,300 \times 10^1 = 63\,000 = 6,3 \times 10^4$.

On peut faire ce calcul directement, en décomposant 36 par 4×9 pour regrouper $4 \times 25 = 100$, ce qui donne mentalement $A = 63000,0000 = 63\,000 = 6,3 \times 10^4$.

32 Effectuer et donner le résultat en écriture scientifique :

a) $0,05 \times 1\,200 \times 10^{-3}$;

b) $1,5.10^3 \times 2,2.10^{-4}$; c) $0,0024.10^4 \times 1,25.10^{-3}$;

d) $3.10^5 \times 5.10^7 \times 2.10^{-3}$; e) $4.10^3 \times (5.10^2)^2$.

1 exercices

33 ★ Même exercice.

a) $0{,}0004 \times 500\,000 \times 0{,}007 = \ldots$;
b) $2{,}5.10^3 \times 6.10^{-5} \times 8.10^{-1} = \ldots$;
c) $6.10^4 \times 75.10^7 \times (2.10^{-3})^2 = \ldots$

34 Combien faudrait-il de litres d'eau pour remplir un cube d'arête 2 km ?

35 Une année compte 365 jours.
a) À combien de jours correspond un million de secondes ?
b) Une femme meurt exactement le jour de son anniversaire, à 85 ans. Combien d'heures sa vie a-t-elle duré ? Combien de secondes (arrondir à 3 chiffres significatifs) ?
c) S'il faut une seconde pour faire une encoche (pour compter des moutons !), combien faut-il de temps (en jours) pour faire un milliard d'encoches ?

36 ★ Les ordinateurs permettent de travailler avec un grand nombre d'informations.
Un caractère (lettre, symbole, ...) est codé par 2 octets.
Un CD-Rom a une mémoire de 600 méga-octets.
Un DVD (Digital-Versatif-Disc) a 10 giga-octets.
(« *mega* » signifie million, « *giga* » signifie milliard.)
1° En France, le numéro INSEE comporte 15 caractères (13 + 2) □ □□ □□ □□ □□□ □□□ □□.
Combien faut-il de CD-Rom pour mémoriser les numéros d'INSEE des 58 millions d'habitants, en laissant un espace entre deux numéros, soit un octet.
2° Un livre comporte 2 000 caractères par page (40 lignes de 50 caractères).
a) Combien de pages faut-il pour un texte d'un million de caractères ?
b) Si un livre comporte en moyenne 200 pages, combien de caractères en comporte-t-il ?
Une bibliothèque de 400 000 volumes ?
La grande Bibliothèque de 10 millions de volumes ?
c) Combien faut-il de DVD pour mémoriser une bibliothèque de 400 000 volumes ?

37 Un billet de banque a une épaisseur de 0,1 mm.
a) Vous gagnez un million d'euros au Loto, et on vous paye en billets de 100 €. Quelle est la hauteur de la pile de billets ?
b) Une personne mesure 1,75 m de haut ; elle gagne sa taille en billets de 100 €. Combien a-t-elle gagné ?
c) Un euro correspond à environ 6,5 F. Le budget pour l'Éducation est de 500 milliards de francs.
L'exprimer en euros, et calculer la hauteur de la pile de billets de 100 euros que ce budget représente.

2. Valeurs approchées

38 Soit $x = 1{,}723982$. Quelle est sa nature ?
1° Donner :
a) ses troncatures d'ordre 0, d'ordre 3 ;
b) ses arrondis d'ordre 0, d'ordre 3 ;
c) les valeurs approchées de x à 10^{-4} près par défaut, par excès.
2° Quel est l'arrondi d'ordre 6 de x ? Que peut-on remarquer ? Expliquer cette particularité.

39 Soit $y = \sqrt{17}$. Donner sa troncature et son arrondi d'ordre 5, à partir du calcul à la calculatrice.
Que représente, pour y, la valeur qu'en affiche la calculatrice ?
Cette valeur est-elle égale à y ? Pourquoi ?

40 On donne $-3{,}2791 < z < -3{,}2782$.
Donner la troncature et l'arrondi de z à l'ordre 2.

41 1° a) Que peut-on dire d'un nombre égal à son arrondi d'ordre 0 ?
b) D'un nombre égal à sa troncature d'ordre 5 ?
2° a) Que peut-on dire d'un nombre égal à l'un de ses arrondis ?
b) Au contraire, les nombres non décimaux (c'est-à-dire rationnels non décimaux, ou irrationnels) peuvent-ils être égaux à l'un de leurs arrondi ?
3° Une calculatrice affiche, pour $\sqrt{7}$, le nombre 2,645751311.
Doit-on en déduire que $\sqrt{7} = 2{,}645751311$?
Que peut-on en déduire exactement ?
4° Existe-t-il un ordinateur assez puissant pour écrire exactement le nombre π sous forme décimale ?

42 À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 4 chiffres significatifs des nombres suivants :
1° a) $\frac{250}{11}$; b) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$; c) $\frac{547}{1{,}43}$; d) $\frac{700}{3\sqrt{2}}$
2° a) $\frac{5\sqrt{3}-4}{30}$; b) $\frac{41}{12} - \sqrt{2}$; c) $\frac{105}{104} - \frac{\sqrt{26}}{5}$.

43 ★ Même exercice.
a) $3\sqrt{5} - \frac{1}{3}$; b) $3\left(\sqrt{5} - \frac{1}{3}\right)$; c) $43{,}57 \times 0{,}009$
d) $3 - \sqrt{5 - \frac{1}{3}}$; e) $\frac{3\sqrt{5}-1}{3}$; f) $3\left(\frac{\sqrt{5}-1}{3}\right)$.

44 ★ Même exercice.
a) $\pi(\sqrt{3} - 1)^2$; b) $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$;
c) $\frac{4}{3}\pi \times 2{,}36^3$; d) $2\sqrt{\pi + 4} \times (\sqrt{6} - 1)^2$.
(Utiliser la touche de la calculatrice.)

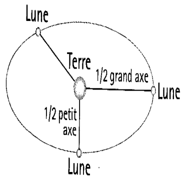
45 ★ Calculer les nombres suivants à la calculatrice, et donner le résultat avec 3 chiffres significatifs (on indiquera l'écriture en ligne utilisée).
a) $\frac{352 \times \sqrt{12 - 4}}{0{,}003}$; b) $5{,}43 - \sqrt{\frac{23}{5} \times \frac{150}{59}}$;
c) $3 - 5\sqrt{400 - 7^2}$; d) $\frac{5\sqrt{23 - 2{,}4^2}}{2{,}6 \times 3{,}1}$.

46 1° Dans la liste ci-dessous, classer les nombres suivant leur nature, puis retrouver les « couples » de nombres égaux :
$a = \frac{11}{7}$; $b = \frac{\pi}{2}$; $c = 1{,}570796327$; $d = \frac{314}{200}$;
$e = \frac{0{,}33}{0{,}21}$; $f = 1570796327 \times 10^{-9}$; $g = \frac{\pi^2 + 2\pi}{2\pi + 4}$.
2° Dans cette même liste, quels sont les nombres qui ont la même valeur approchée à 10^{-5} près ?
Ceux qui ont la même valeur approchée à 10^{-2} près ?

47 Donner un ordre de grandeur des nombres suivants.
Vérifier ensuite à la calculatrice.
a) $0{,}00497 \times \sqrt{93215}$; b) $2941003 \times (3{,}1 \times 10^{-3})^2$;
c) $\frac{3201 \times \sqrt{43100}}{938 \times \sqrt{429}} \times \frac{\pi}{3}$; d) $\frac{\pi \times \sqrt{10}}{100}$.

48 ★ Une œuvre d'art en forme de pyramide s'est vendue à 6 millions d'euros.
La pyramide mesure 1 500 cm de haut et a une base carrée de 0,02 km de côté.
Donner un ordre de grandeur de son prix en euro par m^3.

49 ★★ La Lune tourne autour de la Terre en décrivant une ellipse ; la distance Terre-Lune n'est donc pas constante.



Pour la mesurer, on envoie un signal lumineux de la Terre vers la Lune, qui, après réflexion sur un capteur installé sur le sol de la Lune, revient à son point de départ.
On a mesuré le temps mis par le signal pour effectuer l'aller-retour à divers moments de la rotation de la Lune autour de la Terre.
Le temps minimal mesuré est de 2,37666 s et le temps maximal de 2,71210 s.
1° Sachant que la lumière se déplace à environ 300 000 $km.s^{-1}$, quelle est la distance minimale Terre-Lune (« demi petit axe de l'ellipse ») ? En donner un ordre de grandeur, puis une valeur arrondie à 3 chiffres significatifs.
2° Même question pour la distance maximale (« demi grand axe »).

3. Écriture d'un calcul

50 Donner l'écriture conventionnelle des calculs écrits ci-dessous à l'écran d'une calculatrice.

```
-3²-3/4*5+(2-3)/
2^3-3
5*2/(3-7)+4*(-2+
3²)-1/3*4/5
-7/2*3-√(5-1)*4
```

Effectuer à la main et vérifier les calculs.

51 Le rôle des parenthèses est important.
Écrire les calculs suivants et effectuer à la main.

```
3-7/2*5+√(25)-3²
3-7/(2*5)+√(25-3
²)
(3-7)/(2*5)+√(25
-3)²
```

52 Relever les erreurs d'écriture « en ligne » pour le calcul de $-7 + 3\frac{8}{2^3 - 5}$. Effectuer ce calcul.
Alice : (-)7+3×8/2^3-5 ;
Ben : (-)7+3×(8/2^3-5) ;
Carole : (-)7+3×(8/(2^3-5)) ;
Didier : -7+(3×8)/(2^3-5).

53 ★ Mettre les calculs suivants en écriture conventionnelle, faire le calcul à la main, puis vérifier à la calculatrice.
a) 36 - 12/(3×2)+5×√(4-3) ;
b) (36 - 12)/3×2+5×(√4-3) ;
c) 36 - 12/3×2+5×√4-3 ;
d) 36 - 12/3×(2+5×√4)-3.

1 exercices

54 1° Indiquer les ordres de priorité, sans effectuer :

$C = -(2\times 5)^3 + 50 - 16/\sqrt{10-6}\times 5$;

$D = 2\times\dfrac{3-5}{3\times 4} + 2^3\times\sqrt{25-9}$.

2° Effectuer (à la main) les calculs précédents.

55 ★ Calculer à la main le nombre suivant :

$$5 - 2\sqrt{9-4} + \frac{5}{6}\div\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) + (2\sqrt{5})^3 ;$$

56 Même exercice.

$$-3^2 + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4}\right)\div\left(\frac{6}{2}\right)^2\times\sqrt{5^2-4^2} .$$

57 ★★ Calculer en respectant les priorités :

a) $\dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{20}}{\sqrt{45}\left(2-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}\right)}$; b) $4 - 3\dfrac{3^3-7\times 2^2}{\sqrt{7^2-3^2}}\div\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{3^4+3^2}}$.

4. Calcul exact en géométrie

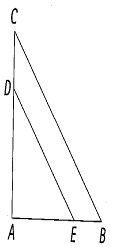
58 Calculer le volume d'un pavé droit de hauteur $3\sqrt{5}$ et dont la base est un carré de côté $\sqrt{5}+1$.
(Donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{5}$.)

59 Calculer le volume d'un cube de côté $2\sqrt{3}-1$.
(Donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{3}$, avec $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$.)

60 Un triangle rectangle ABC est tel que :
$AB=\sqrt{5}-2$; $BC=\sqrt{5}+2$ et $AC=3\sqrt{2}$.
Quel angle est-il droit ? Justifier.

61 Dans le triangle rectangle ABC ci-dessous, on a :
- (ED) est parallèle à (BC) ;
- $AE=2\sqrt{3}-1$;
- $AD=\dfrac{5}{2}$;
- $EB=1$.

a) Calculer DC. Donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{3}$.
b) Calculer DE.



62 Soit ABC un triangle tel que :
$AB=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$; $AC=3\sqrt{2}$ et $BC=2+\sqrt{6}$.
Ce triangle est-il rectangle ? Justifier.

63 ★★ On considère deux triangles ABC et ADE tels que :
$AB=3+\sqrt{2}$, $AC=1+3\sqrt{2}$ et $BC=2\sqrt{2}$;
$AD=2\sqrt{2}-1$, $AE=5-2\sqrt{2}$ et $DE=4-2\sqrt{2}$.
a) Montrer que ces deux triangles sont rectangles.
b) Montrer que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$ ont même cosinus.
c) Faire une figure sachant que A, B et D sont alignés et E est un point de la droite (AC). On prendra 1 cm pour unité graphique.

5. Limites de la calculatrice

64 1° Donner le plus grand entier que puisse écrire exactement la calculatrice.
Ajouter 1 : que se passe-t-il ?
Analyser ce qu'affiche la calculatrice.
Au résultat, ajouter 0,6 .
La calculatrice affiche-t-elle un résultat exact ?
Expliquer.
2° Donner le plus petit décimal positif que puisse écrire exactement la calculatrice sous sa forme décimale.
Que se passe-t-il si on le divise encore par 10 ?
Analyser l'affichage obtenu.

65 Donner le plus grand nombre que puisse afficher la calculatrice en utilisant la notation scientifique.
Que se passe-t-il si on lui ajoute 10^9 ?
Si on le multiplie par 1,00001 ?

66 1° À la calculatrice, calculer :

$$A=\frac{10^8+2\times 10^{-8}-10^8}{2} ;\quad B=\frac{10^8+2-10^8}{2} .$$

2° a) Simplifier l'écriture de l'expression :

$$E=\frac{x+2y-x}{2} .$$

b) En déduire E lorsque $x=10^8$ et $y=10^{-8}$.
Commenter le résultat obtenu en 1°.

67 ★ On cherche à obtenir la valeur exacte du nombre 2578^4.
1° Pourquoi la calculatrice ne peut-elle l'afficher ?
2° Procéder alors comme suit :
a) Calculer d'abord : 2578^2 ; l'écrire sous la forme :

$$a\times 10^5+b ;$$

b) Élever alors au carré le nombre $a\times 10^5+b$ en utilisant une identité remarquable, dont on calculera chacun des termes en utilisant la calculatrice.
3° Conclure.
Pour aller plus loin : thème 1 : « Calculatrice et grands nombres », p. 330.

68 ★ On cherche à obtenir une valeur approchée à 10^{-15} près du quotient $q=\dfrac{227}{149}$.
1° La calculatrice peut-elle la donner ? Pourquoi ?
2° On note A la troncature à l'ordre 6 du résultat.
a) Calculer à la calculatrice $227-149\times A$.
b) Justifier alors l'égalité $q-A=\dfrac{139}{149}\times 10^{-6}$.
c) En déduire une valeur approchée à 10^{-15} près du nombre q.

exercices 1

3 Arithmétique

1. Multiples et diviseurs

69 Critères de divisibilité
Le nombre 4 347 est-il divisible par 2 ? par 3 ? par 9 ?
Peut-on changer les chiffres de place pour le rendre divisible par 2 ? par 4 ? par 5 ?

70 ★ Un nombre a trois chiffres $\overline{cdu}$, autres que 0.
$\overline{cdu}$ signifie $100c+10d+u$.
1° On permute les chiffres des unités et des centaines.
Montrer que $\overline{cdu}-\overline{udc}=99(c-u)$.
2° Démontrer que si $d=c+u$, ce nombre $\overline{cdu}$ est divisible par 11.
3° Démontrer que si $c+d+u=9$, alors $\overline{cdu}$ est divisible par 9 .

71 Soit A un nombre qui s'écrit $\overline{xy}$ dans le système décimal. On considère le nombre B qui s'écrit $\overline{yx}$.
Montrer que $A+B$ est toujours divisible par 11 .
Traiter quelques exemples numériques.

72 Comment doit-on choisir les chiffres x et y pour
... nombre A qui s'écrit $\overline{112x}$ soit divisible par 45 ?
... nombre B qui s'écrit $\overline{53x1y}$ soit divisible par 15 ?

73 Deux voitures font des tours sur un circuit fermé ;
... partent toutes deux à midi de la ligne de départ.
... parcourt le circuit en 30 minutes, l'autre en 36 minutes.
... heure les deux voitures repasseront-elles en même temps sur la ligne de départ ?
... en auront-elles fait de tours ?

74 ★ Pour carreler le sol d'une pièce rectangulaire, ... dispose de carreaux carrés de quatre dimensions possibles : 12 cm de côté ; 15 cm de côté ; 20 cm de côté et 30 cm de côté.
Le travail est d'autant plus facile et rapide que les carreaux sont de grande dimension.
Quelle taille de carreaux faut-il prendre si l'on ne veut casser aucun carreau sachant que les dimensions de la pièce sont de 4,40 m sur 4,20 m.

75 Montrer que le carré d'un nombre pair est un nombre pair, et celui d'un nombre impair est un impair.

76 1° a) Développer et réduire l'expression :

$$(n+1)^2-n^2.$$

b) En déduire que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs.
2° Application à faire aux entiers 13 et 45 .

77 ★ 1° Trouver les diviseurs du nombre 22 .
En déduire tous les nombres entiers naturels x et y qui vérifient $(x+2)(y+1)=22$.
2° De même déterminer tous les entiers naturels x et y qui vérifient $xy+x+y=18$.

78 ★ Trouver les nombres entiers naturels a et b qui vérifient $a^2-b^2=25$.

2. Nombres premiers

79 Parmi les nombres suivants, indiquer ceux qui sont premiers : 25 422 ; 101 ; 70 107 ; 137 ; 15 631.

80 Parmi les nombres de la forme : 2^n-1, où $n\in\mathbb{N}$, certains sont des nombres premiers.
Déterminer les cinq premiers nombres premiers parmi ces nombres.

1 exercices

3. Décomposition

81 Écrire les nombres suivants sous la forme d'un quotient de puissances de nombres premiers, chacune des puissances ayant un exposant positif :

a) $\frac{12}{49} \times \frac{25}{48} \times 21$; b) $\frac{12^3}{5^2} \times \frac{35}{48} \times \frac{24^2}{1\,000}$;

c) $\frac{(12 \times 14^2) \times 25}{39(105 \times 28)^2}$; d) $\frac{2\,700}{630} \times \frac{12^2}{125} \times 49$.

82 ★ Écrire sous la forme d'un produit ou d'un quotient de puissances nombres premiers :

1° a) $2^4 \times 2^8 \times (2^{-5})^3$; b) $5^2 \times 5^9 \times 10^{-2}$.

2° a) $(3^4)^{-2} \times 9^6 \times 27^{-2}$; b) $(3^5)^2 \times (9^2)^6$.

3° a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2$; b) $\frac{2^4 \times 5^9}{(2^3)^2 \times 10^3}$; c) $\frac{4^8 \times 16^2}{2^9}$.

83 ★ Simplifier et donner le résultat sous la forme d'un produit ou d'un quotient de puissances d'exposants positifs des nombres premiers 2, 3, 5, 7...

$A = \frac{49 \times 105^2 \times 32}{(100 \times 7)^3}$; $B = \frac{(-2^3)^2 \times 24^3}{27^2 \times (-16^4)}$;

$C = \frac{(4^{-3} \times 10^2)^2 \times 75^{-3}}{4\,000^{-1} \times 16}$; $D = \frac{5^{2\,000}}{(5^{500})^2 \times 25^{499}}$.

84 ★★ Simplifier les nombres suivants en utilisan[t] les décompositions en produits de facteurs premiers :

1° a) $\frac{35}{63} + \frac{2}{27} - \frac{51}{34}$; b) $\frac{5\sqrt{27}}{\sqrt{75}}$.

2° a) $\frac{\sqrt{96} \times \sqrt{50}}{\sqrt{147}}$; b) $\frac{\sqrt{288} + \sqrt{162}}{\sqrt{98}}$.

85 ★★ Même exercice.

a) $\sqrt{\frac{4^{80} + 5 \times 8^{53}}{28 \times 2^{155}}}$; b) $\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}}$.

86 ★★ Soit $B = \frac{(9^{n+1} + 9^n)^2}{(3^{2n+1} - 3^{2n})^2}$.

1° Calculer B pour $n = 0, 1, 2, 3$. Que remarque-t-on

2° Démontrer alors cette particularité de façon générale (Écrire tous les nombres sous forme de puissances de 3, pu[is] factoriser.)

87 On donne dans le plan 3 points A, B et C et :

$AB = \sqrt{175}$; $BC = \sqrt{448}$ et $AC = \sqrt{63}$

Ces trois points sont-ils alignés ?

4 Problèmes

1. Les ensembles de nombres

88 Peut-on trouver des nombres x, y et z vérifiant les conditions ci-dessous ?

a) $x \in \mathbb{D}$ et $3x - 5 = 6x + 2{,}8$;

b) $y \in \mathbb{Z}$ et $(1 + \sqrt{3})y + 4\sqrt{3} = -4$;

c) $z \in \mathbb{D}$ et $9z^2 = 16$.

89 **Développement décimal d'un rationnel**

1° On considère le rationnel $\frac{22}{7}$.

a) Poser la division de 22 par 7 afin d'obtenir 20 chiffres après la virgule.

b) D'après la condition sur le reste d'une division euclidienne, expliquer pourquoi il suffit de connaître le développement jusqu'à la 7e décimale.

2° a) Expliquer pourquoi le développement décimal de $\frac{2}{7}$ est qualifié de « périodique ». Quel est le nombre de chiffr[es] de sa période ?

b) Quelle est la 128e décimale de $\frac{22}{7}$?

90 ★ On se propose de vérifier sur quelques exempl[es] que tout nombre admettant un **développement décimal péri[o]dique** est un nombre **rationnel**.

1° On considère le nombre $x = 0{,}5454\overline{54}...$ dont la pério[de] 54 a **deux chiffres**.

a) Calculer $100x$. Justifier que $100x = 54 + x$.

b) Résoudre cette équation et en déduire l'écriture de x [en] fraction.

2° Démontrer de la même façon que $0{,}999... = 1$.

3° En remarquant que $19{,}78\overline{78}$ s'écrit $19 + 0{,}78\overline{78}...$, dét[er]miner l'écriture en fraction de $19{,}78\overline{78}...$

exercices 1

91 ★★ $\sqrt{2}$ est irrationnel

PYTHAGORE et ses disciples ont découvert ce nombre au VIe siècle avant J.-C., en cherchant le rapport entre la diagonale d'un carré et son côté. Or, son étude sur la musique avait conduit PYTHAGORE à penser que « l'harmonie divine consiste en rapports numériques de nombres entiers ».
Hélas, $\sqrt{2}$ ne rentrait pas dans ce monde rationnel ; c'est pourquoi PYTHAGORE a nommé ces nombres des « irrationnels ».
La démonstration par l'absurde de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ repose sur l'écriture des entiers.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous forme irréductible, $\frac{p}{q}$, p et q étant des entiers naturels non nuls.

1° Justifier que $p^2 = 2 \times q^2$.

2° a) Suivant le dernier chiffre de p, quel est le dernier chiffre de son carré ? (Faire un tableau.)

b) Suivant le dernier chiffre de q, quel est le dernier chiffre de $2 \times q^2$? (Faire un tableau.)

3° a) Si on a $p^2 = 2 \times q^2$, quelle est la seule possibilité pour leur dernier chiffre ?

b) Dans ce cas, par quel chiffre se termine p ? Par quels chiffres peut se terminer q ?

La fraction $\frac{p}{q}$ est-elle alors irréductible ?

c) Conclure.

2. Valeur exacte, approchée

92 On cherche à déterminer l'ordre de grandeur du nombre $x = 2^{521} - 1$. (On peut démontrer que ce nombre est premier.)

1° Peut-on obtenir directement sa valeur à la calculatrice ?

2° On cherche à déterminer une valeur approchée du nombre x.

Première méthode

...tifier l'approximation $2^{10} \approx 10^3$.

...ntrer qu'en utilisant cette approximation, on obtient :

$$x \approx 2 \times 10^{156}.$$

...onde méthode

...ier que x peut s'écrire sous la forme $x = 2 \times (2^{130})^4 - 1$,

...iliser de nouveau la calculatrice.

...qu'on obtient cette fois $x \approx 6{,}86 \times 10^{156}$.

...de chiffres possède le nombre x ?

...aller un peu plus loin : observer le chiffre des unités ...ances successives de 2 : $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6...$

...passe-t-il ?

...le chiffre des unités du nombre x ?

★ On donne $a = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\pi}{3}}$ et $b = 1 - \frac{1}{2 + \frac{\pi}{3}}$.

...ner les troncatures d'ordre 3 de a et b ; les arron... 3 de a et b.

b) Calculer le produit des arrondis de a et b.

2° Faire d'autre part le calcul exact de $a \times b$.

Commenter.

94 Euro et valeurs approchées

1 euro = 6,55957 F. Pour les conversions de devises, les sommes sont toujours arrondies au centime.

A. 1° Un million de personnes se présentent à une même banque et échangent chacune 100 F en euros.

a) Combien d'euros chaque personne reçoit-elle ?

b) Quelle est le montant total d'euros distribués par cette banque ?

2° Un chef d'entreprise ouvre un compte en euros et y dépose 100 millions de francs.

De quelle somme, en euros, son compte sera-t-il crédité ?

3° De ces deux conversions, quelle est la plus avantageuse pour la banque ?

B. 1° Un million de personnes se présentent à une même banque et échangent chacune 150 F en euros.

a) Combien d'euros chaque personne reçoit-elle ?

b) Quel est le montant total d'euros distribués par cette banque ?

2° Un chef d'entreprise ouvre un compte en euros et y dépose 150 millions de francs. De quelle somme, en euros, son compte sera-t-il crédité ?

3° De ces deux conversions, quelle est la plus avantageuse pour la banque ?

3. Calcul et géométrie

95 Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6 cm, $\mathcal{C}_1$ son cercle inscrit et $\mathcal{C}_2$ son cercle circonscrit.

1° Faire une figure et redonner la définition de chacun de ces cercles.

2° Calculer l'aire de la couronne comprise entre ces deux cercles.

En donner la valeur exacte, puis une valeur arrondie à 4 chiffres significatifs.

96 Soit $ABCD$ un carré de côté 6 cm. On joint le point A à un point M du segment $[BC]$. On pose $BM = x$.

1° A-t-on des contraintes sur la valeur de x ?

2° On suppose que $x = 2\sqrt{3}$.

a) Calculer l'aire du trapèze $AMCD$.

b) Calculer le rapport entre l'aire du trapèze $AMCD$ et l'aire du triangle ABM (en donner la valeur exacte sous la forme $a\sqrt{3} + b$).

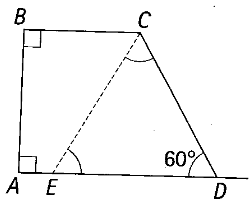
1 exercices

3° Déterminer x afin que l'aire du trapèze $AMCD$ soit double de l'aire du triangle ABM.

97 ★★ $ABCD$ est un trapèze rectangle, avec :

$$\widehat{CDA} = 60° \text{ et } CD = 4.$$

On place E sur le segment $[AD]$ afin que le triangle CDE soit équilatéral.

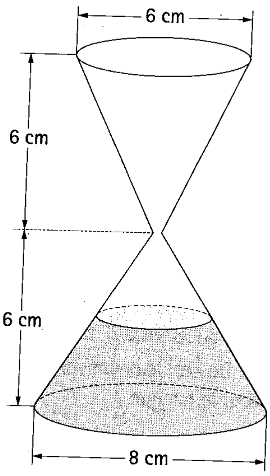


Déterminer la valeur exacte de AE lorsque le périmètre du trapèze $ABCE$ est égal au périmètre du triangle CDE.

98 ★ Un sablier est formé de deux cônes de même hauteur 6 cm, l'un de diamètre 6 cm et l'autre de diamètre 8 cm.

Au départ, le sable remplit entièrement le petit cône.

On retourne le sablier.



Calculer le pourcentage de volume du grand cône occupé par le sable en valeur exacte.

4. Arithmétique

99 Un **nombre parfait** est un entier naturel égal à la somme de ses diviseurs, autres que lui-même.

Ainsi, 6 est un nombre parfait, car $6 = 1 + 2 + 3$.

Trouver le seul nombre parfait compris entre 25 et 30.

100 Extrait du roman « *Le théorème du Perroquet* » de Denis Guedj (ed. du Seuil, 1998).

« *Comme on lui demandait ce que c'est qu'un ami, il* [Pythagore] *répondit :*

« Celui qui est l'autre moi-même, comme sont 220 *et* 284. » *Deux nombres sont « amis », ou « amiables », si chacun est la somme de tout ce qui mesure l'autre. Les deux nombres amis les plus célèbres du Panthéon pythagoricien sont* 220 *et* 284. *Ils font une belle paire.* »

Pour les Grecs, un nombre « mesure » un entier s'il est un diviseur de cet entier.

a) Trouver tous les diviseurs de 220, autres que lui-même, et calculer leur somme.

b) De même, trouver tous les diviseurs de 284, autres qu lui-même, et calculer leur somme.

c) Conclure.

101 Montrer que la somme des inverses des diviseurs nombre 28 est entier.

102 ★★ On appelle **carré parfait** un entier égal carré d'un nombre entier.

Montrer que, pour tout réel x, on a l'égalité :

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x+1)^2.$$

En déduire que, pour tout entier n, le nombre :

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

est un carré parfait. Vérifier pour $n = 6$, puis $n = 11$.

103 ★★ 1° Montrer l'égalité suivante, pour tous réels a, b, c et d :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2.$$

2° *Application :* on s'intéresse aux nombres entiers égau la somme de deux carrés parfaits, par exemple :

$$146 = 121 + 25 = 11^2 + 5^2.$$

Montrer que, lorsqu'on multiplie deux nombres entiers d type, on obtient encore un nombre de ce type.

Vérifier avec le produit des nombres $146 = 11^2 + 5$ $113 = 7^2 + 8^2$.

104 ★★ Euler ayant démontré qu'il y a une infi de nombres premiers, de nombreux mathématiciens, et lu tête, ont cherché des expressions simples donnant des nom premiers. Sans parvenir à une formule générale, ils ont n moins découvert des « familles » de nombres premiers.

1° Euler : nombres de la forme $n^2 - n + 41$

On montre que, pour tous les entiers n allant de -40 à $n^2 - n + 41$ est un nombre premier.

a) Vérifier cette formule pour tous les entiers n de 0 à

b) Montrer que pour $n = 41$, le nombre $n^2 - n + 41$ pas premier.

2° Mersenne : nombres de la forme $2^n - 1$, où n e nombre premier

a) Vérifier que cette formule donne des nombres premie prenant pour n les premiers nombres premiers.

b) Quelle est la première valeur de n qui ne donne p nombre premier par cette formule ?

3° Fermat : nombres de la forme $2^{2^n} + 1$, où n e entier naturel.

a) Calculer les nombres obtenus avec n entier allant de 0

b) En revanche, montrer que la valeur $n = 5$ donne un n divisible par 641.

3. Hyperbole 2000

Nature et écriture des nombres

Pour démarrer

Pour chaque question, une seule réponse est exacte ; laquelle ?

Exercice 1 : Calcul sur les nombres en écriture fractionnaire

$A = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{1}{6}$. Quelle est la valeur de A ?

a $A = -\frac{10}{162}$ b $A = \frac{1}{18}$ c $A = -\frac{1}{18}$ d $A = -\frac{5}{54}$

Exercice 2 : Calcul sur les nombres écrits avec des radicaux

$B = \sqrt{6^2 + 8^2}$. Quelle est la valeur de B ?

a $B = 100$ b $B = \sqrt{28}$ c $B = 10$ d $B = 14$

Exercice 3 : Calcul avec des puissances

$C = \frac{10^5 \times 10^{-2} \times 10^{-4}}{2 \times 10^2 \times 10^{-3}}$. Quelle est la valeur de C ?

a $C = \frac{1}{2}$ b $C = \frac{1}{4}$ c $C = 0$ d $C = 5$

Exercice 4 : Arrondis

Quel est l'arrondi au millième de 5,241 857 2 ?

a 5,241   b 5,24
c 5,242   d 5,241 9

Exercice 5 : Écriture scientifique d'un nombre décimal

Quelle est l'écriture scientifique de 58 472 ?

a 58 472   b $5{,}847\,2 \times 10^4$
c $5{,}847\,2 \times 10^5$ d $58{,}472 \times 10^3$

Exercice 6 : Diviseurs d'un nombre entier

Quelle est la liste complète des diviseurs de 30 ?

a 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6   b 30 ; 60 ; 90 ; 120 ; 150 ; ...
c 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15   d 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30

Hier aujourd'hui demain

Les nombres à travers les époques

-3000 **Numération égyptienne**
2314 =

-2000 **Numération babylonienne**
314 =

-1400 **Numération chinoise**
2314 = = ||| — ||||

Babylone : apparition du premier zéro.
Grèce : les Pythagoriciens prouvent que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Numération romaine
2314 = MMCCCXIVI

J.C.
Chine : utilisation des nombres négatifs.
≈600 **Inde** : Brahmagupta utilise les nombres négatifs et les quatre opérations sur eux.
Xe s 900 Al-Karagî et Al-Farâbî généralisent le concept de nombre aux irrationnels positifs et aux rationnels.
XIIe s **Occident** : apparition du zéro.
XIVe s 1300 **Perse** : utilisation des décimaux (Al-Kashi).
XVIe s **Europe** : utilisation des décimaux (Stevin : La Disme, en 1585).
XVIIIe s **Europe** : Euler définit les nombres négatifs et les quatre opérations sur ces nombres.
1801 **France** : adoption du système métrique et des décimaux.
XIXe s 1872 **Europe** : Cantor et Dedekind construisent $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{N}$.
1896 **France** : premier manuel d'enseignement sur les nombres négatifs.

Messages codés... grâce aux nombres premiers

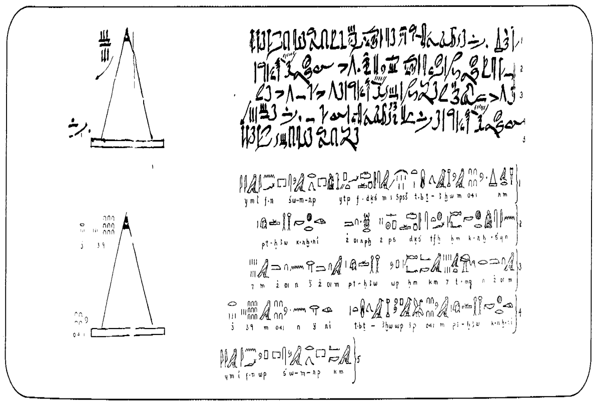
Le commerce électronique repose entièrement sur les techniques de cryptographie qui permettent d'assurer la confidentialité des transactions.

Mathématiquement le système se fonde sur la difficulté de factoriser un grand nombre sous forme de produit de deux nombres premiers*.

Actuellement, la loi limite à 128 bits** la taille des clés de cryptage. Or le jeudi 26 août 1999, un groupe de scientifiques de six pays a annoncé avoir « cassé » une clé numérique de 512 bits ! La première phase de ce travail a mobilisé, en 1999, 300 ordinateurs entre le 27 avril et le 13 juillet. Puis c'est le super-ordinateur Cray qui a terminé le travail le 22 août 1999. En mars 2000, on pouvait trouver sur un site Internet la formule d'une clé de cryptage utilisée pour les cartes bancaires. Les cartes bancaires sont-elles vulnérables ?

* Un nombre premier est un entier admettant exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
** « bit » est la contraction de binary digit : 0 ou 1. Parler de 128 bits, c'est parler d'une suite de 128 chiffres pouvant chacun être 0 ou 1.

Problème de géométrie égyptien antique et sa traduction en caractère démotiques.



COURS Nombres premiers

UNE APPROCHE
Trouver deux entiers naturels a et b non nuls tels que : $56 \times 45 \times a = b^2$.

1 Nombres premiers

DÉFINITION

Dire qu'un entier naturel est premier signifie qu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

EXEMPLES
- 2 ; 3 et 7 sont des nombres premiers.
- 6 n'est pas premier car il a quatre diviseurs : 1, 2, 3 et 6.
- 0 n'est pas premier car il a une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur : lui-même.

REMARQUE
On sait depuis Euclide (3ᵉ siècle av. J.-C.) qu'il y a une infinité de nombres premiers.

2 Décomposition d'un entier en produit de nombres premiers

THÉORÈME

Ce théorème est admis.

Tout entier naturel non premier admet une décomposition en un produit de nombres premiers dont certains peuvent être égaux. Cette décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs.

EXEMPLE : Décomposition de 72 en produit de nombres premiers.

MÉTHODE 1 : Avec les tables de multiplications.
On sait que $72 = 9 \times 8$.
Or $9 = 3 \times 3 = 3^2$ et $8 = 4 \times 2 = 2^3$.
Donc $72 = 3^2 \times 2^3$.
Par convention, on range les facteurs premiers par ordre croissant : $72 = 2^3 \times 3^2$.

MÉTHODE 2 : Avec des divisions successives par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, ...
On écrit 72 et on tire un trait vertical à droite.
- 72 est divisible par **2** ; le quotient est **36**.

On dispose **2** et **36** comme ci-contre.
- **36** est divisible par 2 ; le quotient est 18.
- 18 est divisible par 2 ; le quotient est 9.
- 9 est divisible par 3 ; le quotient est 3.
- 3 est divisible par 3 ; le quotient est 1.

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Par conséquent :
$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ ou $72 = 2^3 \times 3^2$.

REMARQUE
Avec la première méthode, on peut aussi écrire :
$$72 = 12 \times 6 = 2^2 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3^2.$$
Peu importe la façon dont on organise les calculs, car la décomposition en produit de nombres premiers est unique.

Les méthodes

Exercice résolu 1 — Décomposer un entier en produit de nombres premiers

▶ VOIR AUSSI EXERCICE 55 PAGE 60

ÉNONCÉ : Dans chaque cas, décomposer en produit de nombres premiers.
a) 84×63 b) 84×41

SOLUTION
a) $84 = 4 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7$
et $63 = 9 \times 7 = 3^2 \times 7$.
$84 \times 63 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 3^2 \times 7$
$= 2^2 \times 3 \times 3^2 \times 7 \times 7$
Donc $84 \times 63 = 2^2 \times 3^3 \times 7^2$.
b) 41 est un nombre premier, car il n'apparaît pas dans les tables de multiplication par 2, 3, ..., 9.
Donc $84 \times 41 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 41$.

MÉTHODE :
- Pour décomposer $x \times y$ en produit de facteurs premiers, on décompose x puis y.
- Lorsqu'on regroupe les puissances d'un même nombre premier a, on utilise la formule :
$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

Exercice résolu 2 — Reconnaître, sans calculatrice, un carré parfait et un cube parfait

▶ VOIR AUSSI EXERCICE 66 PAGE 61

ÉNONCÉ : **a)** Montrer, sans calculatrice, que 324 est un carré parfait.
b) Montrer, sans calculatrice, que 216 est un cube parfait.
c) 180 est-il un carré parfait ?

SOLUTION
a) $324 = 2 \times 162 = 2 \times 2 \times 81 = 2^2 \times 9^2 = (2 \times 9)^2$.
Donc $324 = 18^2$.
b) $216 = 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 54 = 2 \times 2 \times 2 \times 27$.
Donc $216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$.
c) $180 = 10 \times 18 = 2 \times 5 \times 2 \times 9$
$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 = (6\sqrt{5})^2$. Or $(6\sqrt{5})^2 \notin \mathbb{N}$
Donc 180 n'est pas un carré parfait.

INFO :
Un carré (resp. cube) parfait est le carré (resp. cube) d'un entier naturel.

Exercice résolu 3 — Simplifier une fraction

▶ VOIR AUSSI EXERCICE 70 PAGE 61

ÉNONCÉ : Simplifier la fraction $\frac{168}{90}$ pour la rendre irréductible.

SOLUTION
$168 = 2 \times 84 = 2 \times 4 \times 21 = 2^3 \times 3 \times 7$
$90 = 2 \times 45 = 2 \times 5 \times 9 = 2 \times 3^2 \times 5$
$$\frac{168}{90} = \frac{2^3 \times 3 \times 7}{2 \times 3^2 \times 5} = \frac{2^2 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 7}{\cancel{2} \times 3 \times \cancel{3} \times 5}$$
Donc après simplification :
$$\frac{168}{90} = \frac{2^2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{28}{15}$$

MÉTHODE :
Pour rendre irréductible une fraction $\frac{a}{b}$, on peut :
1. décomposer a et b en produit de facteurs premiers ;
2. puis simplifier jusqu'à obtenir des facteurs premiers différents au numérateur et au dénominateur.

ACTIVITÉS Informatique

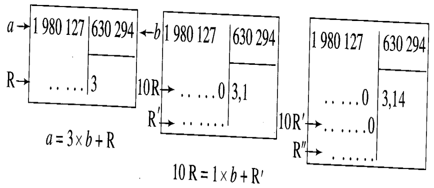
EXERCICES

Activité 4 Donner l'écriture décimale d'un nombre rationnel

Utiliser l'informatique

1 Position du problème

On désire connaître l'écriture décimale d'un rationnel, par exemple $\frac{1\,980\,127}{630\,294}$
Pour cela il suffit de diviser le numérateur par le dénominateur.
Mais à la main, le calcul est long et, à la calculatrice, on ne peut connaître au mieux qu'une dizaine de décimales.
Recopier et remplacer chaque **.** par le chiffre qui convient.



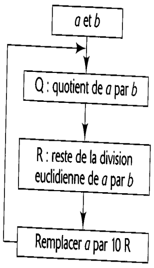
$a = 3 \times b + \mathrm{R}$

$10\,\mathrm{R} = 1 \times b + \mathrm{R}'$

$10\,\mathrm{R}' = 4 \times b + \mathrm{R}''$

2 Avec un tableur

Voici un procédé algorithmique (répétitif) qui permet de trouver autant de décimales que l'on veut de $\frac{a}{b}$



Pour mettre en œuvre cet algorithme, nous utilisons le tableur de Works.

a) Taper la feuille de calcul suivante en adaptant la largeur des colonnes.

b) En C2, taper :

$\boxed{= \text{ENT (A2 / B2)}}$

En D2, taper :

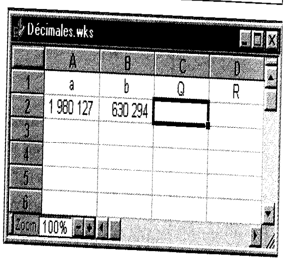
$\boxed{= \text{RES (A2 ; B2)}}$

c) En A3, taper :

$\boxed{= 10 * \text{D2}}$.

d) En B3, taper :

$\boxed{= \text{B2}}$.



Avec le tableau Excel :
- *remplacer* RES *par* MOD
- *remplacer Recopier vers le bas par Recopier, En bas.*

Sélectionner de A3 à B6, cliquer sur *Édition* et *Recopier vers le bas.*
Sélectionner de C2 à D6, puis cliquer sur *Édition* et *Recopier vers le bas.*

3 Exploitation du résultat

Comparer les décimales de $\frac{1\,980\,127}{630\,294}$ et celles de π.

4 Application

Utiliser la feuille de calcul ci-contre pour trouver les vingt premières décimales de $\frac{1}{7}$, puis de $\frac{6}{5^{12}}$ et $\frac{6}{5^{13}}$

INFO

Voici un moyen mnémotechnique pour mémoriser les premières décimales de π :
Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages. Immortel Archimède, artiste, ingénieur qui de ton jugement peut priser la valeur. Pour moi ton problème eut de sérieux avantages.

Faire le point

Pour se tester

POUR LES EXERCICES 1 À 7 :
Indiquer la bonne réponse par a, b ou c.

1 $\frac{81}{15}$ est :
a un décimal
b un rationnel non décimal
c un irrationnel

2 $\sqrt{\pi^2}$ est :
a un entier
b un décimal
c un réel

3 $10\sqrt{\frac{4}{9}}$ est :
a un décimal
b un rationnel non décimal
c un irrationnel

4 Le nombre $-2\sqrt{8-4}+5^3$ est égal à :
a 1
b 123,343 145 8
c 121

5 La séquence de touches suivantes :

√ 5 − 2 = x² ÷ √ 5 + 2 =

correspond au nombre :

a $\frac{\sqrt{5}-2^2}{\sqrt{5}+2}$ b $\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{\sqrt{5}}+2$ c $\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{\sqrt{5}+2}$

6 La décomposition en produit de nombres premiers de 480 000 est :
a $2^4 \times 3 \times 10^4$
b $2^{12} \times 3 \times 5^4$
c $2^8 \times 3 \times 5^4$

7 La décomposition en produit de nombres premiers de $(99)^3 \times (55)^2 \times (21)^4$ est :
a $3^{10} \times 5^2 \times 7^4 \times 11^5$
b $3^{24} \times 5^2 \times 7^4 \times 11^6$
c $3^9 \times 5^2 \times 7^4 \times 11^5$

Vrai ou faux

POUR LES EXERCICES 8 À 21 :
Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier cette réponse.

8 Le produit de deux décimaux est un décimal.

9 Le quotient de deux décimaux est un décimal.

10 Le quotient de deux rationnels est un rationnel.

11 La racine carrée d'un entier est un irrationnel.

12 Le produit de deux irrationnels est un irrationnel.

13 Le carré d'un irrationnel est un rationnel.

14 L'équation $x^2 = 2$ a deux solutions irrationnelles.

15 $\frac{3\pi}{10}$ est un décimal.

16 L'écriture scientifique du nombre $5 \times 10^8 \times 3 \times 10^{-3}$ est : 15×10^5.

17 Un ordre de grandeur du nombre $\frac{253 \times 10^5}{3{,}1 \times 10^{-3}}$ est 8 milliards.

18 Le calcul-machine de $\frac{2{,}5^2-3{,}5^2}{\sqrt{5}-1} \times 3$ se traduit par la séquence de touches :

2.5 x² − 3.5 x² ÷ (√ 5 − 1) × 3 =

19 La décomposition en produit de nombres premiers de 28×56 est $2^6 \times 7^2$.

20 Tout entier premier est impair.

21 Tout entier impair est premier.

Exercices d'application

Les ensembles de nombres

22 Pour chacun des nombres suivants, dire auxquels des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ il appartient.

a) $0{,}666$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $2-\sqrt{49}$

d) $2-\sqrt{50}$ **e)** 10^{-7} **f)** 10^{7} **g)** $\left(1+\sqrt{2}\right)^2$

h) $\frac{16}{25}$ **i)** $\sqrt{\frac{16}{25}}$ **j)** $\frac{25}{36}$ **k)** $\sqrt{\frac{25}{36}}$

23 Classer les nombres de la liste suivante en quatre catégories : entiers, décimaux non entiers, rationnels non décimaux et irrationnels.

$0{,}777\ldots$ (avec une infinité de 7) ;

$\frac{3\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3\pi}$; $\frac{\pi+5}{\pi-2}$;

$\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$; $\frac{\sqrt{7\,921}}{2}$; $-\frac{\sqrt{225}}{3}$.

POUR LES EXERCICES 24 À 26 :
Faire la liste des nombres qui appartiennent à :
a) $\mathbb{N}$ **b)** $\mathbb{Z}$ **c)** $\mathbb{D}$ **d)** $\mathbb{Q}$ **e)** $\mathbb{R}$

24 $\frac{81}{4}$; $\sqrt{\frac{81}{4}}$; $\frac{16}{9}$; $\sqrt{\frac{16}{9}}$; $4-\sqrt{100}$;

$4-\sqrt{48}$; 10^4 ; 10^{-4} ; $\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

25 $\frac{7}{5}$; $\frac{100}{25}$; $15{,}6+2{,}3-38{,}9$; $\sqrt{\frac{4}{9}}$;

$\left(2-\sqrt{5}\right)^2$; $\sqrt{144\times10^{-3}}$; 10^4-10^{-4}

26 $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$; $\frac{4+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$;

$\frac{\sqrt{5\,329}}{5}$; $-\frac{\sqrt{441}}{7}$;

$-2{,}111\ldots$ (une infinité de 1) ; $\frac{15{,}6}{7{,}2}$

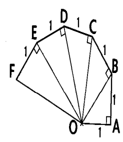
27 Sur une droite graduée (unité 2 cm), marquer aussi précisément que possible les points d'abscisses :

a) $\frac{\pi}{2}$ **b)** 2×10^{-1} **c)** $0{,}8$ **d)** $\frac{7}{4}$

e) $-\frac{24}{7}$ **f)** $\sqrt{5}$ **g)** $-2{,}8$ **h)** $-\sqrt{3}$

28 **a)** Sur la figure ci-dessous, quels sont les segments en rouge ayant pour longueurs :

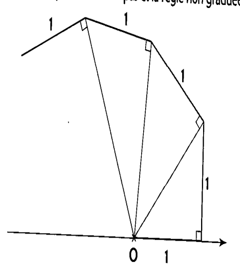
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$?



b) Tracer la droite graduée ci-dessous et marquer les points d'abscisses :

$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\sqrt{7}$; $1+\sqrt{5}$; $2-\sqrt{5}$

en utilisant uniquement le compas et la règle non graduée.



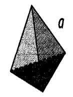
29 Une sphère a pour rayon 6,2 m. Stéphanie affirme : « Son volume $\mathcal{V}$ est égal à $317{,}770\,666\,7\,\pi\ \text{m}^3$. »
Commenter cette réponse.

30 Un tétraèdre régulier d'arête ℓ est une pyramide dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux de côté ℓ.
Calculer la valeur exacte du volume $\mathcal{V}$, puis donner son arrondi au millième pour :

a) $\ell=4$ **b)** $\ell=30{,}6$

INFO

Tétraèdre régulier



Volume : $\mathcal{V}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

31 Un cercle $\mathscr{C}_1$ a pour rayon 7 cm. Un cercle $\mathscr{C}_2$ a une aire double de celle de $\mathscr{C}_1$.
Calculer la valeur exacte du rayon de $\mathscr{C}_2$, puis donner son arrondi au dixième.

32 Dans chaque cas, calculer le nombre représenté par $\square$.

a) $\frac{1}{4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{50}+\frac{1}{60}+\frac{1}{\square}$

b) $\frac{1}{10^3}=\frac{1}{12^3}+\frac{1}{15^3}+\frac{1}{\square^3}$

Nombres et calculatrices

33 Par la suite, x désigne le nombre $\frac{941\,664}{665\,857}$.

a) Avec la calculatrice, comparer les valeurs affichées pour $\sqrt{2}$ et x, puis comparer 2 et x^2.

b) Peut-on dire que x est égal à $\sqrt{2}$? Pourquoi ?

34 On pose $A=b^2-4ac$.

a) Calculer A à la main, puis à la calculatrice avec :

$$a=\frac{1}{9}\ ;\ b=-\frac{4}{15}\ \text{ et }\ c=\frac{4}{25}$$

b) Les résultats obtenus sont-ils identiques ?

35 $A=\frac{a^2+4a-7}{3a+1}$ avec $a=5-2\sqrt{3}$.

a) En utilisant une mémoire, déterminer A à la calculatrice et noter le résultat.

b) Donner l'arrondi et la troncature de A, à 10^{-5} près.

c) Encadrer A par deux décimaux a et b tels que :

$$a-b=10^{-7}.$$

d) Pour $5-2\sqrt{3}$ la calculatrice affiche : 1.535898385
Avec la calculatrice, déterminer à nouveau A en remplaçant a par 1,535898385. Que constate-t-on ?

(D'après CRDP Poitou-Charente)

INFO

Pour calculer par exemple, x^2+x avec $x=1+\sqrt{3}$, on peut utiliser les mémoires de la calculatrice.

- Sur CASIO :

1 [+] [√] 3 [→] [X, θ, T] [EXE]
[X, θ, T] [x²] [+] [X, θ, T] [EXE]

- Sur TI :

1 [+] [√] 3 [ENTER] [STO] [X, T, θ] [ENTER]
[X, T, θ] [x²] [+] [X, T, θ] [ENTER]

36 Donner l'écriture scientifique de chaque nombre :

$A=\frac{28\times10^4}{0{,}4\times10^5}$; $B=\frac{18\times10^{-4}}{6\times10^{-3}}$; $C=\frac{15\times10^3}{0{,}03\times10^5}$

37 On donne $A=0{,}000\,1$.
Donner les écritures scientifiques des nombres suivants :

a) A **b)** A^2 **c)** A^3 **d)** A^{-2} **e)** $10^{-6}\,A^{-3}$

38 Ranger dans l'ordre croissant chaque liste de nombres ci-dessous :

a) $5{,}04\times10^2$; 540×10^0 ; $0{,}500\,4\times10^3$; $54{,}04\times10^1$; $5\,404{,}4\times10^{-1}$.

b) 656×10^{-3} ; 65×10^{-2} ; 6×10^{-1} ; $6\,656\times10^{-4}$.

39 Charlie a effectué sur sa calculatrice $257{,}009 : 0{,}000\,78$.
« À l'écran je lis 3294,987179 J'ai dû me tromper en tapant les nombres. »
Expliquer sans utiliser la calculatrice pourquoi il peut dire cela.

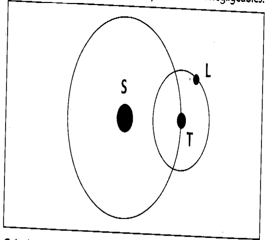
40 Pour chacun des nombres suivants, donner l'écriture scientifique ainsi qu'un ordre de grandeur sous la forme $a\times10^p$ avec a entier et $-10<a<10$.

$A=0{,}000\,201\,8$; $B=-7\,214{,}25$
$C=1\,999$; $D=-0{,}027\,2\times10^{-5}$
$E=1\,515\times10^5$; $F=290{,}05\times10^{-5}$

41 Effectuer chacun de ces calculs à la main et donner le résultat en écriture scientifique.
Vérifier les réponses avec la calculatrice.

$A=2\,314{,}5\times10^{-3}+0{,}038\times10^3$;
$B=16\times10^{-8}\times0{,}05\times10^{13}\times0{,}25\times10^2$;
$C=0{,}75\times10^{-3}\times6\times10^{-4}\times(2\times10^3)^2$.

42 On suppose que la Terre (T) décrit autour du Soleil (S) un cercle de $14{,}96\times10^7$ km de rayon et que la Lune (L) décrit autour de la Terre un cercle de $3{,}84\times10^5$ km de rayon. On suppose aussi que les deux cercles sont dans un même plan et que les rayons des planètes sont négligeables.



Calculer les distances maximale et minimale entre la Lune et le Soleil. Effectuer le calcul à la main, puis à la calculatrice.

X **43** Effectuer chacun de ces calculs à la main, puis vérifier les réponses avec la calculatrice.

$A=\sqrt{8}\times\sqrt{72}\times\sqrt{144}$; $B=\sqrt{7{,}5}\times\sqrt{30}+\sqrt{0{,}04}$;

$C=\sqrt{45}\times\sqrt{\frac{54}{30}}$; $D=\sqrt{\frac{6{,}3}{2{,}8}}\times\sqrt{\frac{1{,}8}{0{,}072}}$

44 **Touches [EE] ou [EXP] ou [×10ˣ]**
Touches [xʸ] ou [yˣ] ou [^]

1. Comparer les résultats obtenus en effectuant les séquences de touches ci-dessous. Expliquer les résultats.

a) 3 [^] 5 [=] **b)** 3 [EE] 5 [=]

2. Donner trois façons d'entrer 100 000 dans la calculatrice.

3. Écrire les séquences de touches permettant d'entrer les nombres suivants dans la calculatrice :

$A=5\,014\times10^{14}$ $B=-32\times10^{-8}$

EXERCICES

45 Voici des séquences de touches tapées à la calculatrice. Pour chacune d'entre elles :
- effectuer ce calcul à la calculatrice ;
- écrire l'expression correspondant à cette séquence ;
- calculer cette expression à la main.

a) 2 [÷] 3 [+] 4 [=] [1/x] [×] 5 [=]

b) 2 [+] 1 [÷] 3 [×] [(] 4 [÷] 5 [+] 1 [)] [=]

c) [(] 2 [+] 1 [÷] 3 [)] [×] 4 [÷] 5 [+] 1 [=]

d) 2 [^] 2 [^] 3 [=]

e) [(] 2 [^] 2 [)] [^] 3 [=]

f) 2 [^] [(] 2 [^] 3 [)] [=]

g) [√] 2 [×] 2 [−] 1 [=] [÷] 3 [÷] 7 [=]

h) [√] 7 [x^2] [+] 1 [=] [÷] 8 [×] 2 [=]

46 Les affichages [Fix] [Sci] [Norm]

1. Différents affichages

a) Reproduire cet écran sur sa calculatrice.

√98765
314.2689931

b) Taper ensuite :
- Sur TI : [Mode] [Sci] [ENTER] [Float] [ENTER]
- Sur CASIO : [Disp] [Sci] 0 [EXE]

Quelle est la signification de l'affichage obtenu ?

c) Taper alors :
- Sur TI : [Mode] [Normal] [ENTER] [4] [ENTER]
- Sur CASIO : [Fix] 4 [EXE]

Quelle est la signification de l'affichage obtenu ?

d) Ensuite taper :
- Sur TI : [Mode] [Normal] [9] [Enter]
- Sur CASIO : [Norm] [EXE]

Que constate-t-on ?

2. Application géométrique

Un cône de révolution a 4,3 m de hauteur et un disque de rayon 1,6 m pour base.
Calculer le volume en m^3 de ce cône et configurer la calculatrice pour qu'elle affiche l'arrondi au millième de ce volume.

47 Quelle est la valeur exacte de 7^{12} ?

48 On se propose de calculer la valeur exacte de $3\,256^4$.

a) Calculer la valeur exacte de $3\,256^2$.
b) Pourquoi la calculatrice ne peut-elle pas afficher la valeur exacte de $3\,256^4$?
c) Vérifier que $10\,601\,536 = 106 \times 10^5 + 1\,536$.
d) Développer $(106 \times 10^5 + 1\,536)^2$.
e) Utiliser la calculatrice, mais effectuer aussi des calculs à la main, pour en déduire la valeur exacte de $3\,256^4$.

Nombres premiers

49 Dans chaque cas, indiquer si le nombre est premier.
a) 14 **b)** 17 **c)** 31 **d)** 53 **e)** 98 **f)** 111

50 a) Recopier et compléter :

$180 = 1 \times \ldots \qquad 180 = 2 \times \ldots$

En déduire quatre diviseurs de 180.
b) 180 est-il un nombre premier ?
c) Écrire la liste de tous les diviseurs de 180.

51 a) Observer que $3\,131 = 3\,100 + 31$ et expliquer pourquoi 3 131 n'est pas premier.
b) Expliquer pourquoi 503 503 n'est pas premier.

52 Dans chaque cas, dire, sans calcul, si A est premier.
a) $A = 2 \times 9 \times 5 + 3$ **b)** $A = 36 \times 5 \times 7 + 27$

53 a) Recopier et compléter :

$36 = 4 \times \ldots \qquad 36 = 4 \times \ldots$

b) En déduire, de deux façons différentes, la décomposition de 36 en produit de nombres premiers.

54 a) Écrire 1 200 sous la forme d'un produit de deux entiers.
b) En déduire la décomposition de 1 200 en produit de nombres premiers.
c) Retrouver cette décomposition en utilisant le fait que $1\,200 = 25 \times 48$.

55 Dans chaque cas, décomposer en produit de nombres premiers.
a) 27×24 **b)** 26×38 **c)** 63×43

56 Utiliser la méthode des divisions successives (voir page 52), pour décomposer chaque nombre en produit de nombres premiers.
a) 720 **b)** 286 **c)** 804 **d)** 135 **e)** 585

POUR LES EXERCICES 57 À 60 :
Décomposer chaque nombre en produit de nombres premiers.

57 a) 40 **b)** 45 **c)** 54 **d)** 36

58 a) 56 **b)** 42 **c)** 93 ; **d)** 110

59 a) 144 **b)** 40 000 **c)** 250 000

60 a) $18 \times 17\,000$ **b)** $4\,900 \times 12^4$ **c)** $18^3 \times 63$

60

EXERCICES

POUR LES EXERCICES 61 ET 62 :
Utiliser le calcul mental pour répondre aux questions posées.

61 Décomposer en produit de nombres premiers.
a) 10 **b)** 10^2 **c)** 10^3 **d)** 30 **e)** 700

62 Calculer 5^2 et 5^3, puis décomposer en produit de nombres premiers : 75 ; 250 ; 1 250.

63 Écrire les nombres suivants sous la forme :

$$\frac{2^n \times 3^m}{5^p \times 7^q}$$

avec n, m, p et q entiers naturels.

a) $\frac{15}{49} \times \frac{64}{25} \times 24$ **b)** $\frac{36 \times (6 \times 14)^2}{35 \times (7^3 \times 12)}$ **c)** $\frac{12^4}{100} \times \frac{21}{48} \times \frac{6^5}{49}$

64 Dans chaque cas, on donne la décomposition en produit de nombres premiers de p et q.
Sans calculer ces nombres, donner la décomposition en produit de nombres premiers de $p \times q$, puis de p^2, et enfin de q^3.
a) $p = 3 \times 5^2 \times 7$ et $q = 2^2 \times 7^2 \times 11 \times 17$
b) $p = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ et $q = 3 \times 5^2 \times 7^3 \times 11$

65 Dans chaque cas, on donne la décomposition en produit de nombres premiers des nombres p et q. Sans calculer ces nombres, dire si q est un diviseur de p ? Si oui, donner le quotient exact de p par q.
a) $p = 2^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 11^2$ et $q = 2^3 \times 3^3 \times 7^2$
b) $p = 2^3 \times 5^4 \times 7^2 \times 13^3$ et $q = 2^2 \times 5^4 \times 7$

66 Chacun des nombres suivants est-il un carré parfait ? un cube parfait ? Répondre sans utiliser la calculatrice.
a) 7 056 **b)** 720 **c)** 3 375

67 a) Décomposer 2 000 en produit de nombres premiers.
b) Quel est le plus petit entier qui, multiplié par 2 000 est un carré parfait ?

68 a) Décomposer 2 100 en produit de nombres premiers.
b) Quel est le plus petit entier qui, multiplié par 2 100 est un cube parfait ?

69 Sans utiliser la calculatrice, simplifier la fraction $\frac{306}{450}$ pour la rendre irréductible.

X **70** Écrire les fractions suivantes sous forme de fractions irréductibles après avoir décomposé le numérateur et le dénominateur en produit de nombres premiers.
Vérifier ensuite le résultat à la calculatrice.
a) $\frac{280}{945}$ **b)** $\frac{180}{525}$ **c)** $\frac{1\,134}{1\,701}$ **d)** $\frac{15^3 \times 4}{6^2 \times 5^3 \times 7}$

71 a) Décomposer en produit de nombres premiers chacun des nombres : 7 744 et 17 424.
b) Sans calculatrice, expliquer pourquoi 7 744 et 17 424 sont divisibles par $(44)^2$.
c) En déduire sans calculatrice :
- la racine carrée de 7 744 ;
- la racine carrée de 17 424 ;
- la fraction irréductible égale à $\frac{7\,744}{17\,424}$.

72 1. a) Écrire les entiers de 1 à 100 (en 10 lignes et 10 colonnes).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

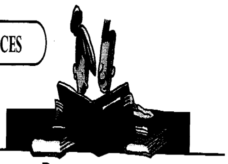
b) Barrer tous les multiples de 2, sauf 2.
c) Barrer tous les multiples de 3, non encore barrés, sauf 3.
d) Barrer tous les multiples de 5, non encore barrés, sauf 5.
e) Barrer tous les multiples de 7, non encore barrés, sauf 7.
Il doit rester vingt-cinq entiers non barrés. Ces entiers sont les nombres premiers inférieurs à 100.

INFO
L'algorithme précédent est dû à Eratosthène de Cyrène (– 276, – 194), mathématicien grec de l'école d'Alexandrie.

73 1. Voici des sommes de trois entiers impairs consécutifs. Calculer chaque somme et dire s'il s'agit d'un nombre premier.
a) $3 + 5 + 7$ **b)** $11 + 13 + 15$ **c)** $137 + 139 + 141$
2. Tout entier impair est de la forme $2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.
a) Exprimer en fonction de n, les deux entiers impairs qui suivent $2n + 1$.
b) Exprimer en fonction de n, la somme S de ces trois entiers impairs consécutifs.
c) En déduire que la somme S n'est jamais un nombre premier.

CHAPITRE 3 | NATURE ET ÉCRITURE DES NOMBRES | 61

EXERCICES



Pour progresser

74 Additionner, soustraire des fractions

RAPPEL

• Lorsque les dénominateurs sont les mêmes on applique les règles suivantes (avec $c \neq 0$) :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

• Lorsque les dénominateurs sont différents on réduit les fractions au même dénominateur, puis on applique les règles précédentes :

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}$$

Dans chaque cas, calculer à la main et donner la réponse sous forme de fraction irréductible. Vérifier les réponses avec la calculatrice.

a) $\frac{34}{9}-\frac{22}{9}$ **b)** $\frac{3}{4}+\frac{7}{12}$ **c)** $\frac{1}{15}-\frac{1}{3}$

d) $5-\frac{3}{2}$ **e)** $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}$ **f)** $\frac{1}{6}-\frac{3}{4}$

75 Multiplier, diviser des fractions

RAPPEL

• Pour multiplier deux fractions on applique la règle suivante ($b \neq 0$, $d \neq 0$) :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

• Pour diviser un nombre par $\frac{a}{b}$ on multiplie ce nombre par $\frac{b}{a}$ $\left(\text{l'inverse de } \frac{a}{b}\right)$.

Dans chaque cas, calculer à la main et donner la réponse sous forme de fraction irréductible. Vérifier les réponses avec la calculatrice.

a) $\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}$ **b)** $5\times\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)$

d) $\dfrac{\frac{3}{5}}{3}$ **e)** $\frac{4}{7}:\frac{28}{21}$ **f)** $\dfrac{2}{\frac{3}{5}}$

76 Un nombre admet différentes écritures

EXEMPLE

• 0,75 et 0,750 sont deux écritures décimales d'un même nombre.

• $\frac{75}{100}$ et $\frac{3}{4}$ sont deux écritures fractionnaires du nombre précédent.

Dans chaque cas, une seule des écritures ne désigne pas le même nombre que les autres ; trouver cette écriture.

a) $0{,}555$; $\frac{25}{45}$; $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$; $\frac{5}{9}$; $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}$

b) $\sqrt{13}\sqrt{17}$; $10+11$; $\sqrt{100+121}$; $13\sqrt{\frac{17}{13}}$

77 Nature d'un nombre

1. Revoir le cours page 48 et l'exercice résolu 1 page 49.

2. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

a) -1 ; $\frac{2}{3}$ et π sont des réels.

b) 0 ; $-5{,}72$ et $\sqrt{\frac{4}{49}}$ sont des rationnels.

c) $\frac{2}{3}-\frac{5}{3}$; $\frac{25}{\sqrt{100}}$; $\frac{1}{6}$ et 3,14 sont des décimaux.

78 Décomposer en produit de nombres premiers

INFO

Les nombres premiers inférieurs à 20 sont :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 .

1. Chacune des égalités suivantes est exacte ; laquelle donne la décomposition en nombres premiers de 36 ?

a) $36 = 2 \times 18$ **b)** $36 = 4 \times 9$

c) $36 = 2^2 \times 3^2$ **d)** $36 = 2^2 \times 9$

2. Recopier et compléter :

$$90 = 2 \times \ldots = 2 \times 3 \times \ldots = 2 \times 3 \times 3 \times \ldots$$

En déduire la décomposition en produit de nombres premiers de 90.

3. Donner la décomposition en produit de nombres premiers de 360, puis de 630.

79 Pour rédiger

Lire ci-dessous l'énoncé, puis la solution d'un élève.
Rédiger cette solution en tenant compte des remarques du correcteur.

Énoncé

Sans effectuer la division, montrer que 1 092 est divisible par 13.

Solution d'un élève

$1092 = 4 \times 273 = 3 \times 91$ Cette égalité est fausse.

Donc la décomposition en facteurs premiers de 1092 est : $1092 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 13$

Pense à Conclure.

Exercices d'approfondissement

EXERCICES

80 Intercaler

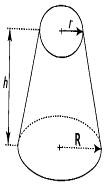
Dans chaque cas, trouver si possible un entier naturel, un décimal non entier, un rationnel non décimal et un irrationnel, strictement compris entre les deux nombres.

a) $\frac{99}{101}$ et $\frac{100}{101}$ **b)** 3,14 et 3,15 **c)** $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$

81 Calcul d'un volume

Le volume d'un tronc de cône est donné par :

$$\mathscr{V} = \pi\frac{h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$



Données :
$r = 0{,}55$; $R = 1{,}75$; $h = 3{,}55$.

a) Calculer la valeur exacte de $\mathscr{V}$.
Est-elle un nombre rationnel ?

b) Calculer l'arrondi au dixième de $\mathscr{V}$.

82 Des calculs volumineux

Dans chaque cas :

• effectuer le calcul à la main et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ;

• vérifier le résultat avec la calculatrice ;

• dire si ce nombre est décimal.

a) $-\frac{3}{5}-\frac{2}{3}:\left(\frac{3}{2}+3\right)\times\left(2-\frac{1}{5}\right)$

b) $10-4\times\dfrac{\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{3}\right)\left(3-\frac{1}{2}\right)}{\frac{7}{9}-3}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$

c) $\dfrac{2-\frac{1}{5}}{\dfrac{2+\frac{1}{5}}{3}}$ **d)** $1+\dfrac{1+\dfrac{2}{3+\frac{4}{5}}}{1-\dfrac{2}{3-\frac{4}{5}}}$

83 Les limites de la calculatrice

$A = \sqrt{10^{16} - (10^8 - 2 \times 10^{-8})^2}$

a) Donner un ordre de grandeur de A.

b) Calculer A à la calculatrice après avoir écrit la séquence de touches nécessaire.

c) Conclure.

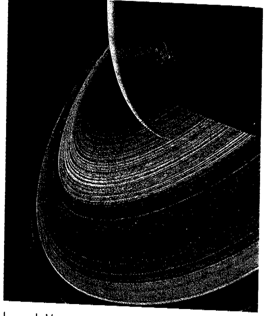
84 Comparer

Dans chaque cas, comparer les affichages fournis par une calculatrice pour les deux nombres. Ensuite, par un calcul à la main dire si ces deux nombres sont égaux :

a) $\sqrt{9^{14}+1}$ et 9^7

b) $\sqrt{5}-2$ et $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

85 Le programme américain Voyager



La sonde Voyager 2, lancée le 20 août 1977, survola Neptune le 24 août 1989 à 4 900 km d'altitude.
Combien de temps les signaux émis ont-ils mis pour parvenir aux antennes de réception situées sur la Terre ?

Données :

• Distance Terre-Neptune : 4,5 milliards de km ;

• Les signaux se déplacent à la vitesse de la lumière :
$300\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

86 « Le silence de ces espaces infinis m'effraie. »

Pascal

Traduire chaque donnée numérique de ce texte par leur écriture décimale et par leur écriture scientifique (en conservant les mêmes unités).

a) Notre corps est constitué d'environ *six mille milliards de cellules*, dont environ *15 milliards de neurones*. Le nombre des molécules d'hémoglobine (qui fixent l'oxygène dans le sang) est beaucoup plus élevé : *un milliard de fois le nombre total de cellules*.
Toute cette « machine » si bien organisée nous autorise une durée de vie moyenne de *trente mille jours* pour une femme et *vingt-sept mille jours* pour un homme. Convertis en secondes, cela nous donne *deux milliards et demi de secondes* pour une femme et *2,3 milliards de secondes* pour un homme.

b) Évadons-nous un peu dans l'univers : notre planète (bleue) ne pèse que *4×10^{13} milliards de tonnes*.
Les objets les plus éloignés de la Terre (découverts en 1960) sont les quasars : le plus lointain d'entre eux a été découvert en 1989 et se trouve à *14 milliards d'années-lumière* de la Terre.
Alors que la premiere Supernova observable à l'œil nu se situe (seulement) à *170 000 années-lumière* de la Terre.
Quant aux trous noirs possibles qu'on pense avoir découverts, ils sont à environ *200 millions d'années-lumière*.

87 Estimation d'un ordre de grandeur

1. a) Calculer 2^{10} et 10^3.

b) En prenant 10^3 pour valeur approchée de 2^{10}, donner l'écriture scientifique d'un ordre de grandeur de 2^{1999}.

2. a) Calculer 6^9 et 10^7.

b) En déduire l'écriture scientifique d'un ordre de grandeur de 600^{600}.

EXERCICES

88 Les planètes

Voici, résumées dans un tableau, les distances moyennes au Soleil en mètres, des neuf planètes du système solaire.

Jupiter	$0{,}000\,778\,3 \times 10^{15}$
Mars	$2\,279\,400 \times 10^{5}$
Mercure	$57\,910 \times 10^{6}$
Neptune	$4{,}505 \times 10^{12}$
Pluton	$0{,}059\,13 \times 10^{14}$
Terre	$1{,}496 \times 10^{11}$
Saturne	$14{,}236 \times 10^{11}$
Uranus	$28\,670 \times 10^{8}$
Vénus	$1{,}082 \times 10^{11}$

1. a) Exprimer chacun de ces nombres en écriture scientifique.
b) Ranger alors ces planètes dans l'ordre croissant de leurs distances au Soleil.
2. En astronomie, on appelle unité astronomique (u.a.) la distance moyenne de la Terre au Soleil : 1 u.a. = 149 597 870 km. Pour chaque planète exprimer en u.a. sa distance au Soleil, arrondie au centième.

89 Record à battre...

Le plus grand nombre premier connu était en 1994 :

$$P = 2^{859\,433} - 1.$$

Il a été découvert à l'aide d'un ordinateur Cray C-90 par deux « chasseurs de nombres premiers » : David Slowinski et Paul Gage, aux USA. C'est un nombre de Mersenne.
a) Donner une valeur approchée de P de la forme $a \times 10^n$ (avec $a \in \mathbb{N}$, $1 < a < 10$ et $n \in \mathbb{N}$) en utilisant le fait que $2^{10} \approx 10^3$.
b) Estimer le nombre de chiffres de P.

INFO

- $2^n - 1$ s'appelle un « nombre de Mersenne ». On ne sait toujours pas s'il existe une infinité de nombres de Mersenne premiers.
- En 1998, Clarkson, Woltman et Kurowski ont établi que $2^{3\,021\,377} - 1$ est un nombre premier.

90 Puissances

a) Indiquer le chiffre des unités de chacun des nombres : $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}$. Qu'observe-t-on ?
b) Chercher le chiffre des unités de 2^{21}, 2^{53}, 2^{400} et 2^{401}, en indiquant le procédé utilisé.

(D'après *Évaluation à l'Entrée en Seconde, 1997*)

91 Nombres premiers jumeaux

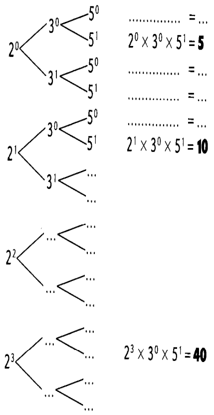
Il s'agit de couples de nombres premiers dont la différence vaut 2, par exemple : (5 ; 7) ou (11 ; 13) ou (17 ; 19). Donner quatre autres couples de nombres premiers jumeaux.

INFO

Les mathématiciens conjecturent qu'il y a une infinité de nombres premiers jumeaux, mais le problème est si difficile que personne ne l'a encore prouvé.

92 Recherche des diviseurs d'un entier

N est le nombre dont la décomposition en facteurs premiers est $N = 2^3 \times 3 \times 5$.
a) On note n un diviseur de N.
La décomposition en facteurs premiers de n ne doit contenir que les facteurs 2, 3 ou 5. Donc $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$.
Quelles sont les valeurs possibles de a, b et c ?
b) Recopier et compléter l'arbre suivant ; en déduire la liste complète des diviseurs de N.



93 Nombres parfaits

Un nombre entier positif est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs (à l'exception de lui-même, mais 1 compris).
1. Les trois premiers nombres parfaits sont 6 ; 28 et 496.
a) Les décomposer en produit de nombres premiers.
b) Vérifier que 6 ; 28 et 496 sont parfaits.
2. Le plus grand nombre parfait connu était en 1996 :

$$A = 2^{216\,089}\,(2^{216\,090} - 1).$$

a) Donner une valeur approchée de A de la forme $a \times 10^n$ (avec $a \in \mathbb{N}$, $1 < a < 10$ et $n \in \mathbb{N}$) en utilisant : $2^{10} \approx 10^3$.
b) Estimer le nombre de chiffres de A.

94 Nombres amicaux

Deux entiers positifs m et n sont dits « amicaux », si la somme des diviseurs de m (autres que m) est égale à n et simultanément la somme des diviseurs de n (autres que n) est égale à m. Les plus petits nombres amicaux sont 220 et 284.
a) Décomposer en produit de nombres premiers 220 et 284.
b) Vérifier que 220 et 284 sont amicaux.

95 Divisibilité

Sans effectuer la division, montrer que 888 888 est divisible par 37.

96 Rendre irréductible

Écrire les nombres suivants sous forme de fraction irréductible en détaillant les calculs. Vérifier à la calculatrice.

a) $\dfrac{352}{44}$ **b)** $\dfrac{4\,242}{2\,828}$ **c)** $\dfrac{242\,424}{323\,232}$ **d)** $\dfrac{32\,032}{77}$

Aide à la démonstration

97 Propriété fausse et contre-exemple

AIDE

Pour démontrer que la propriété « La somme de cinq entiers consécutifs quelconque est un nombre premier » est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple : 1, 2, 3, 4 et 5 sont cinq entiers consécutifs et $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$; or 15 n'est pas premier.

Dans chaque cas, démontrer que la propriété est fausse.
a) La formule $P(n) = n^2 + n + 41$ pour $1 \leqslant n \leqslant 10$ donne tous les nombres premiers entre 43 et 151.
b) Tout nombre de la forme $6n + 5$, avec $n \in \mathbb{N}$, est un nombre premier.

INFO

La quête d'une formule pour les nombres premiers a commencé depuis longtemps, et elle se continue... Citons quelques formules :
- la formule d'Euler : $n^2 + n + 41$ pour $1 \leqslant n \leqslant 107$;
- les formules d'Ulam : $4n^2 + 170n + 1\,847$ donne 760 nombres premiers non engendrés par la formule d'Euler et $4n^2 + 4n + 59$ donne 1 500 nombres premiers non engendrés par les deux formules précédentes.

(D'après *Secrets de nombres, Tangente*)

98 Conjecturer puis démontrer

Problème
Le carré d'un entier impair quelconque est-il pair ou impair ?

Pour résoudre ce problème suivre les étapes suivantes.

1re étape : faire des essais
Calculer : $3^2, 5^2, 7^2, 9^2, 23^2, 251^2$. Qu'observe-t-on ?

2e étape : conjecturer
Recopier et compléter : « Il semble que le carré de **tout** entier impair soit... »

3e étape : démontrer
On doit démontrer cette conjecture pour tout entier impair (quelques exemples ne suffisent pas).
Pour cela utilisons la forme générale $2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$, d'un entier impair.
Développer $(2k + 1)^2$ et conclure.

Remarque
On peut ici utiliser une autre méthode pour démontrer cette conjecture : on observe le chiffre des unités possibles pour un entier impair, on en déduit le chiffre des unités de son carré et on conclut.

EXERCICES

POUR LES EXERCICES 99 À 101 :
Il est conseillé de traiter auparavant l'exercice 98.

99 Le carré d'un entier pair est-il pair ou impair ? Justifier la réponse.

100 Le cube d'un entier impair est-il pair ou impair ? Justifier la réponse.

101 Le produit de deux entiers qui se terminent par 76, se termine-t-il par 76 ? Justifier la réponse.

102 Disjonction de cas

1. Préliminaire
À l'aide de la division euclidienne, expliquer pourquoi tout entier naturel n s'écrit (avec $p \in \mathbb{N}$) :

$$n = 3p \text{ ou } n = 3p + 1 \text{ ou } n = 3p + 2.$$

2. Problème
On se propose de démontrer que « le produit de trois entiers consécutifs n, $n + 1$ et $n + 2$ est un multiple de 3 ».
Pour cela envisager chacun des cas ci-dessous, puis conclure.

$$n = 3p\ ;\ n = 3p + 1\ ;\ n = 3p + 2$$

Des défis

103 Quel est le plus petit entier de 1 999 chiffres dont la somme des chiffres est 2 001 ?

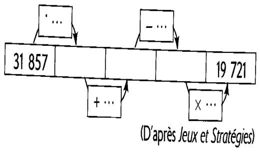
104 Quel est le nombre de chiffres de 300^{300} ?

(*Rallye de La Réunion, 1991*)

105 Quel est le nombre de chiffres du nombre de chiffres de $1\,999^{1999}$?

106 Quels sont les entiers qui s'écrivent comme somme d'au moins deux entiers consécutifs ?

107 On part de 31 857. Avec les nombres 37, 41, 111 et 287, peut-on atteindre 19 721 ? Chaque nombre peut être utilisé une seule fois.



(D'après *Jeux et Stratégies*)

Problèmes de synthèse

108 Le jeu d'échecs

Ce jeu fut inventé aux Indes, au VIe siècle. On raconte que son inventeur le présenta au roi de la contrée qui, émerveillé, lui proposa un cadeau. L'inventeur pouvait choisir lui-même son cadeau.

Voici son choix : « Placez pour moi : un grain de blé sur la 1re case, deux sur la 2e, quatre sur la 3e, puis 8, et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64e case.

Cet exercice a pour objectif d'évaluer la valeur de ce cadeau.

1. Le nombre de grains de blé de la dernière case est 2^{63}. Expliquer pourquoi. Combien faut-il de chiffres pour donner l'écriture décimale de ce nombre ?

2. En estimant que l'on peut compter 10 grains en une seconde, combien faudrait-il de temps pour compter les grains de la dernière case ? Évaluer ce temps en secondes, puis en années.

3. Notons A le nombre total de grains sur l'échiquier :

$$A = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{63}.$$

Écrire $2 \times A$ sous la forme d'une somme, puis en calculant $2 \times A - A$ de deux façons différentes, montrer que :

$$A = 2^{64} - 1.$$

4. Comparons ce nombre A à des mesures de grandeurs connues.

a) Si on estime qu'un gramme de blé équivaut à 40 grains, qu'un sac de blé contient 100 kg et qu'un wagon contient 4 000 sacs, combien de wagons pourrait-on remplir avec le cadeau du roi ?

b) Si on estime qu'un wagon mesure 25 m de longueur, quelle serait alors, en km, la longueur du train permettant de transporter le cadeau du roi ? Comparer cette longueur à la distance Terre-Lune (380 000 km).

(D'après *Galion-Thèmes*)

109 Les globules rouges (ou hématies)

Dans 1 mm^3 de sang humain, il y a environ 4,5 millions de globules rouges. Le corps humain contient environ 5,5 litres de sang.

Un globule rouge a la forme d'un cylindre de 7×10^{-3} mm de diamètre et de 3×10^{-3} mm de hauteur.

1. Calculer le nombre total de globules rouges présents dans un corps humain.

2. a) Si on empile l'un au-dessus de l'autre tous les globules rouges contenus dans le sang d'un corps humain, quelle est la hauteur de la colonne obtenue (en km) ?

b) Avec cette longueur, combien de fois pourrait-on faire le tour de la Terre (40 000 km) ?

3. Calculer, en m^2, l'aire d'un globule rouge, puis l'aire totale de tous les globules rouges contenus dans le corps humain.

INFO

Les globules rouges transportent l'oxygène et les échanges se font par l'intermédiaire de leur surface, d'où l'importance de la valeur de l'aire totale calculée à la question 3 !

110 La troisième loi de Kepler

Johannes Kepler (1571-1630), astronome et mathématicien allemand, publie en 1619 un traité intitulé *L'harmonie du monde*, dans lequel il expose une théorie musicale du mouvement des planètes, mais aussi la loi qu'il a découverte, et que l'on appelle aujourd'hui la troisième loi de Kepler.

Ce problème a pour objet de retrouver cette loi qui relie la période T d'une planète (durée d'une révolution autour du Soleil) et sa distance a au Soleil.

Les six planètes connues du temps de Kepler

Planète	a (en millions de km)	T (jours)	$\frac{T}{a}$	$\frac{T}{a^2}$
Mercure	57,90	87,969		
Vénus	108,21	224,701		
Terre	149,60	365,256		
Mars	227,90	686,980		
Jupiter	778,34	4 332,59		
Saturne	1 427	10 759,2		

1. a) Recopier et compléter ce tableau en arrondissant au millième.

b) Quelle remarque peut-on faire sur la suite des valeurs prises par $\frac{T}{a}$ et $\frac{T}{a^2}$?

c) Les valeurs de T sont-elles proportionnelles aux valeurs correspondantes de a ? de a^2 ?

2. a) Calculer le produit $\frac{T}{a} \times \frac{T}{a^2}$ pour les six planètes (tronquer au dix-millième).

b) En déduire que : $T = k\sqrt{a^3}$ avec $k \approx 0{,}2$.

On écrit plutôt $T = ka^{1,5}$; en effet :

$(a^{1,5})^2 = a^{1,5 \times 2} = a^3$, donc $a^{1,5} = \sqrt{a^3}$.

3. De nouvelles planètes sont découvertes :

- en 1781, Uranus (période T = 84,01 ans) ;
- en 1846, Neptune (période T = 164,79 ans) ;
- en 1930, Pluton (période T = 243,18 ans).

Convertir ces périodes en jours, puis calculer les distances moyennes au Soleil des planètes Uranus, Neptune et Pluton.

(D'après *Les Trésors de Tonton Lulu, Tome 1*)

111 Une propriété et sa réciproque

1. Expliquer pourquoi tout entier naturel n est de la forme : $n = 6p$ ou $n = 6p + 1$ ou $n = 6p + 2$ ou $n = 6p + 3$ ou $n = 6p + 4$ ou $n = 6p + 5$ (avec $p \in \mathbb{N}$).

2. En déduire la propriété suivante : « Si n est un entier premier, $n \geqslant 5$, alors n est de la forme $6p + 1$ ou $6p + 5$. »

3. La propriété réciproque est-elle vraie ?

112 Une équation d'inconnue entière

1. a) Décomposer 220 en produit de nombres premiers.

b) Trouver tous les diviseurs de 220.

2. x désigne un entier naturel.

Résoudre l'équation $x(x + 1)(3x - 1) = 220$.

113 Le nombre d'or

Le nombre d'or est le nombre $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1. Vérifier les égalités suivantes :

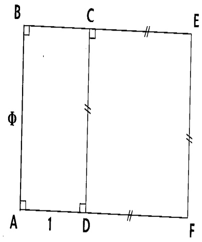
a) $\Phi^2 = \Phi + 1$ **b)** $\Phi = \frac{1}{\Phi} + 1$ **c)** $\Phi^3 = 2\Phi + 1$

2. ABCD est un rectangle de dimensions 1 et Φ.

On dit que ABCD est un rectangle d'or car :

$$\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \frac{\Phi}{1} = \Phi$$

CDFE est un carré de côté Φ.



Démontrer que ABFE est un rectangle d'or.

3. a) Afficher 1 999 à l'écran de la calculatrice.

Effectuer la séquence de touches : 1/x + 1 =.

À partir du résultat affiché, refaire cette séquence ; … et ainsi de suite.

Noter les résultats obtenus et les comparer à Φ.

b) Reprendre la question **a)** avec un autre nombre que 1 999.

114 Des calculs vraiment curieux

1. a) Calculer $3^2 + 2$; $33^2 + 22$; $333^2 + 222$.

Quelle conjecture peut-on en déduire ?

b) Soit X un entier naturel écrit avec n chiffres tous égaux à 1 :

$$X = \underbrace{111 \ldots\ldots 11}_{n \text{ chiffres}}.$$

- Exprimer $9X + 1$, puis X en fonction de n.
- Exprimer $(\underbrace{333 \ldots 33}_{n \text{ chiffres}})^2 + \underbrace{222 \ldots 22}_{n \text{ chiffres}}$ en fonction de n.
- Justifier alors la conjecture de la question **a)**.

2. Écrire côte à côte un nombre pair de fois le chiffre 1 ; (par exemple 11 111 111). On obtient un nombre A.

Écrire côte à côte une série de chiffres 2, deux fois plus courte que la précédente (suite de l'exemple : 2 222). On obtient un nombre B.

Émettre une conjecture sur la différence A – B, puis la démontrer.

115 PGCD de deux entiers naturels non nuls

Parmi les diviseurs communs à deux entiers naturels non nuls a et b, l'un d'eux est plus grand que les autres. On l'appelle le plus grand commun diviseur (en abrégé PGCD) ; on le note PGCD $(a ; b)$.

1. À la main

a) Écrire la liste par ordre croissant des diviseurs de 36, puis des diviseurs de 60. Quel est le PGCD de 36 et 60 ?

b) Déterminer le PGCD de 218 et 162, puis de 75 et 28.

2. Algorithme d'Euclide

RAPPEL

En classe de Troisième ont établi que si r est le reste de la division euclidienne de a par b (avec $b < a$), alors PGCD $(a ; b)$ = PGCD $(b ; r)$.

a) En utilisant ce rappel, expliquer pourquoi :

PGCD(322 ; 112) = PGCD(112 ; 98) = PGCD(98 ; 14) = 14.

b) Calculer le PGCD de 118 404 et 13 884.

3. Avec les décompositions en produit de nombres premiers

a) Décomposer 36 en produit de nombres premiers.

b) On admet ici que tout diviseur de 36 a une décomposition en produit de nombres premiers de la forme :

$$2^a \times 3^b \text{ avec } 0 \leqslant a \leqslant 2 \text{ et } 0 \leqslant b \leqslant 2.$$

En déduire tous les diviseurs de 36.

c) Décomposer 60 en produit de nombres premiers et en déduire tous les diviseurs de 60.

d) Quel est le PGCD de 36 et 60 ?

e) Décomposer ce PGCD en produit de nombres premiers.

Conjecturer une méthode pour obtenir ce PGCD à partir des décompositions en produit de nombres premiers de 36 et 60.

f) Tester cette conjecture pour le calcul du PGCD de 175 et 190.

116 Décomposition et repère du plan

x et y désignent des entiers naturels.

Les nombres étudiés dans ce problème sont tous de la forme $N = 2^x \times 3^y$. On désigne leur ensemble par E.

À chaque nombre N on associe, dans un repère, le point de coordonnées $(x ; y)$.

1. Quel point est associé à chacun des nombres suivants ?

a) $1 = 2^0 \times 3^0$ **b)** 2^x **c)** 3^y **d)** 36 **e)** 216

2. a) Expliquer pourquoi toute puissance de 6 est un nombre de l'ensemble E.

b) Où se trouvent tous les points associés aux puissances de 6 ?

3. On admet dans cette question que si $N = 2^x \times 3^y$ alors tout diviseur de N a une décomposition en produit de nombres premiers de la forme $2^a \times 3^b$ avec $0 \leqslant a \leqslant x$ et $0 \leqslant b \leqslant y$.

a) Dans un repère, placer les points associés aux nombres : $N_1 = 2^4 \times 3$ et $N^2 = 2^2 \times 3^3$.

b) Trouver tous les diviseurs de N_1 et représenter, en rouge, les points associés à ces diviseurs.

c) Trouver tous les diviseurs de N_2 et représenter, en bleu, les points associés à ces diviseurs.

d) Que peut-on dire des points associés aux diviseurs communs de N_1 et N_2 ?

Placer le point M associé au PGCD de N_1 et N_2.

Annexe 3 : Questionnaires – Professeurs

Questionnaire – Professeurs de seconde

Le questionnaire que nous vous proposons s'inscrit dans le cadre de la réalisation d'une thèse en didactique des mathématiques sur le thème de l'arithmétique qui étudie les notions suivantes : la division euclidienne, le multiple et le diviseur, le plus grand diviseur commun, les nombres premiers entre eux, le plus petit commun multiple, les nombres premiers, la décomposition en facteurs premiers.
Je vous serais très reconnaissante de bien vouloir consacrer un peu de votre temps pour répondre à ce questionnaire. N'hésitez pas à faire toutes les remarques et commentaires que vous souhaitez. Vous pouvez utiliser des feuilles annexes pour compléter vos réponses.
N.B : Le questionnaire est anonyme.

Première Partie

1. Nombre d'années d'enseignement :

2. Établissement actuel :

3. Quelle est votre formation en arithmétique (enseignement secondaire, enseignement supérieur, formation initiale, formation continue) ?

4. Avez-vous déjà enseigné l'arithmétique ? Si oui à quel(s) niveau(x) et en quelle(s) année(s) ?

5. Quel manuel est utilisé en classe de seconde dans votre établissement ?

6. Pour votre enseignement d'arithmétique en seconde, vous utilisez :

Autres manuels de seconde ☐

Manuels d'autre(s) niveau(x) du secondaire : Collège ☐ Lycée ☐

Revues, documents à destination des enseignants (brochures IREM, bulletin APMEP, etc.) ☐

Manuels ou polycopiés universitaires ☐

Revues et ouvrages de vulgarisation mathématique ☐

Internet ☐

Autres, précisez :

7. Définissez-vous l'arithmétique à vos élèves ? Si oui quelle définition leur donnez-vous ?

8. Au collège, les élèves ont rencontré un certain nombre de notions d'arithmétique. Parmi celles-ci, lesquelles retravaillez-vous avec vos élèves de seconde ?

9. Quelles sont les principales difficultés que rencontrent vos élèves à propos de notions d'arithmétique? Que proposez-vous pour les aider à surmonter ces difficultés ?

10. Quelle définition donnez-vous à vos élèves des nombres premiers ? Quelle(s) méthode(s) proposez-vous à vos élèves pour déterminer si un nombre est premier ou pas ?

11. Quelle définition du pgcd donnez-vous en classe de seconde ? Quelle(s) méthode(s) de détermination du pgcd proposez-vous à vos élèves ? Si vous en proposez plusieurs, précisez à l'aide d'exemples le contexte d'utilisation de chaque méthode ?

12. Faites-vous travailler vos élèves sur des activités basées sur l'utilisation de la calculatrice et/ou de l'ordinateur avec les notions d'arithmétique? Si oui avec quelle(s) notion(s) ?

Deuxième Partie

1. Nous envisageons de proposer l'exercice suivant à des élèves de seconde :

Soit $M = 3^2 \times 5^2 \times 7$

a) *M est-il divisible par : 7, 9, 2, 11,63 ? Justifiez votre réponse.*

b) $B = 3^2 \times 5^3 \times 7$, *B est- il diviseur de M. et pourquoi ?*

c) $F = 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$, *est- il multiple de M. et pourquoi ?*

Selon vous, quelle(s) solution(s) pourraient-ils mettre en œuvre et quelle correction leur proposeriez-vous ?

Est-ce qu'en seconde, vous proposez ce type d'exercices ? Si oui avec quel(s) objectif(s) ?

2. Nous envisageons de proposer l'exercice suivant à des élèves de seconde.

Soit $A = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ *et* $C = 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$

Donner un multiple commun des deux nombres

Selon vous, quelle(s) solution(s) pourraient-ils mettre en œuvre et quelle correction leur proposeriez-vous ?

Est-ce qu'en seconde, vous proposez ce type d'exercices ? Si oui avec quel(s) objectif(s) ?

Troisième Partie

1. L'arithmétique disparaît des programmes de seconde à la rentrée de l'année scolaire 2009 : qu'est ce que vous pensez de ce changement (les raisons et/ou les conséquences et/ou tout autre commentaire) ?

2. Pensez-vous que la disparition de l'arithmétique, spécifiquement des contenus nombre premier et décomposition en facteurs premiers, implique une perte en termes d'organisation des apprentissages mathématiques pour la classe de seconde? Si oui, pouvez-vous donner des exemples ?

ANNEXES 4 : Réponse des enseignants au questionnaire

Réponses des enseignants aux questions (Q1 ; Q2 ; Q3 ; Q4 ; Q5)

P	N	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
P-E	P1	30	lycée Jean-Paul Sartre BRON	Formation initiale enseignement supérieur	De 1979 à 1982 en classe de $6^{ème}$ et $5^{ème}$ De 1997 à 2001 en classe de TS spécialité maths De 2000 à maintenant en classe de seconde	Déclic Hachette
	P2	1	Lycée Privé Aux Lazaristes	Enseignement supérieur Formation continue	Non, jusqu'à cette année scolaire. Cette année je l'ai fait avec ma classe de seconde.	Hyperbole 2004
	P3	35	Lycée du parc	Enseignement supérieur	Oui : seconde T S : de 2001 à 2009	----------
	P4	1	Albert Camus Rillieux –le-pape	Supérieur : licence et master de Math	Oui, 2d Celle en première année de classes préparatoires scientifiques.	Déclic 2d 2004 édition Hachette
	P5	4	Al kindi	supérieur	$1^{ère}$ S ; Ter S	le manuel scolaire de l'éducation nationale
	P6	21	Al kindi	secondaire & supérieur	Oui, à des élèves de terminale S	Déclic
	P7	15	Lycée François Mauriac Bordeaux	classes prépas et préparation à l'agrégation	Au collège $3^{ème}$ (1998-2004), et en TS (spécialité)(1996-1998 et 2008-2009)	fractale (Bordas)
	P8	1	J. Brel Lycée Vénissieux	Spé math de TS Prépa & un peu en maitrise et agreg	Spé math de TS 2008/09. En 2d : 2007/08 et 08/09	Hyperbole
	P9	30	Lycée J. Brel	Enseignement secondaire Enseignement supérieur	Collège, un peu en seconde	Hyperbole
	P10	1	Sembat (venissieux)	secondaire +supérieur	Oui 2d : 2008/09	Hyperbole
P	P11	10	Lycée du parc	Module arith et des membres en maitrise à Orsay	$3^{ème}$: 2002 à 05 Spé math T S depuis 2006	Indice
	P12	1	Lycée du parc	supérieur	Oui : 2d : 2008/09	Indice
	P13	30	Lycée Riom	Enseignement supérieur	Spé math de TS. En 2d.	Hyperbole
	P14	15	Jean Perrin	Au collège En classe préparatoire	2d & Spé math de TS.	Radial
	P15	29	A. Camus – Firminy -42	Tout a été appris	2d 2008/09 Pendant les 5 années dernières Spé math de TS.	Hyperbole
	P16	24	Lycée Descartes – st-	Enseignement secondaire	Oui T S : 2003 / 04 et	Hyperbole Nathan

			genis – Laval		2008/09	
	P17	9	Lycée Fays (Villeurbanne)	Enseignement supérieur	Oui en 2d.	Maths x (Didier)
	P18	2	Lycée générale et technologique Jacques Brel	Enseignement secondaire et supérieur (spé. Math en TS, classe préparatoire, MPSI, MP	Oui. En 2d.(2007-2008 et (08/09). Interrogation orale a CPGE : MPSI, MP en 05/06 & 06/07 & 08/09	Hyperbole Nathan
	P19	36	Ampère	Enseignement supérieur- séminaire d'algèbre commutative.	Oui en 1985 en DEUG à la faculté En Lycée 2d et T S	Hyperbole Nathan
	P20	30	Ampère Lyon	Enseignement secondaire T Enseignement supérieur : maitrise	Oui TS 1998 à 2001	Hyperbole Nathan
	P21	26	lycée Louis et Auguste Lumière à Lyon	Formation en maîtrise de mathématiques pures et durant la préparation de l'agrégation	Au collège en troisième (PGCD) En terminales C il y a longtemps !en seconde depuis deux ans nombres premiers	Modulo didier
	P22	33	lycée AMPERE (LYON)	Enseignement secondaire et supérieur	Oui en Terminales années 80 (programmes année 70)	HYPERBOLE Nathan
	P23	35	Paul Langevin Suresnes 92150	Des unités de valeurs en arithmétiques en 1973	en spé en TS	Repère Hachette
	P24	32	lycée Aubanel Avignon	Enseignement supérieur	collège : 3ième, lycée : seconde , 1ère L option math, Term S (spécialité math)	Hyperbole Nathan
Pn	P25	30	Lycée Sud Médoc 33320 Le Taillan Médoc	en terminale, en prépa, à la préparation du capes, formation personnelle pour enseigner en spé maths en terminale.	depuis 12 ans en spé maths et en seconde, et en 1980 en Côte d'Ivoire	Déclic, Hachette
	P26	3	Collège Catherine de Vivonne – Rambouillet (78)	Ecole d'ingénieur + auparavant prépa Maths Sup Maths Spé + prépration au concours du CAPES et de l'agrégation	oui, niveau TS spé Maths en février mars de cette année	Pas de lycée en ce moment je suis TZR
	P27	13	lycée Marie Reynoard, Villard Bonnot 38	J'ai dû apprendre la division avec reste au primaire (??). Sinon, j'ai passé les concours en autodidacte, donc pas	Oui, en seconde, depuis que c'est au programme et en TS spécialité depuis 2005.	Mathx Didier

				de formation particulière.		
	P28	33	Lycée F.Mauriac 42 Andrézieux	enseignement supérieur	Oui, plusieurs années en TS Spé maths	Hyperbole de Nathan
	P29	19	Lycée Barthélémy de Laffemas, à Valence.	A l'époque, on faisait de l'arithmétique en 6e : nombres premiers, PGCD, PPCM. Je n'ai pas le souvenir d'en avoir vraiment fait après avant d'arriver en licence.	De 1997 à 2002, j'ai enseigné le calcul du pgcd en 3e. De 2003 à 2009, en 2nde, les nombres premiers avec calcul du pgcd en comparant les décomposition en produits de nombres premiers. En 2008 : en 1reL option math, l'écriture des nombres en différentes bases.	Hyperbole
	P30	34	lycée Marseilleveyre (13008-Marseille)	Formation secondaire « à l'ancienne » (terminale en 67-68, avec un gros pavé d'arithmétique), puis prépa avec un chapitre consistant d'arithmétique, puis un enseignement de théorie des nombres en maîtrise à Jussieu, puis une révision de tout ça à la préparation de l'agrèg, des stages, ou des conférences à l'irem de Luminy en particulier sur la cryptographie.	Oui, il y a longtemps au collège (il y a eu longtemps un peu d'arithmétique en 5ème), puis en seconde depuis 2001 , et en spécialité maths en terminale depuis 95, il me semble.	Repères (Hachette)
	P31	10	Lycee F Mauriac, Bordeaux	UV arithmétique en maitrise de math pure à Lyon 1 par M. Nicolas	Au collège, vocabulaire diviseur, multiple, nombre premier ... en seconde	Fractal math seconde, sera changé dans un an (personne ne l'aime !)
	P32	30	------	Enseignement secondaire, formation initiale et continue	Oui en Terminale C puis TS spécialité math et seconde.	Transmath
P-APMEP	P33	16	Lycée P.Méchain Laon	Formation dans l'enseignement supérieur : 1ère DEUG Préparatoire APES Préparatoire AGRGATION	Oui, en 3ème et en 2d. 3ème : 1998 à 2002 2d : 2002 à 2009	Radial Ed : Belin
	P34	30	-------	Certificat de maitrise	Ce peu de l'ancien programme de seconde	Indice Bordas
	P35	28	Lycée rural Région de	enseignement supérieur	Oui en Termaine C 1981 2d : 2002 à 2008	Pythagore

			Renne			
	P36	4	---	Secondaire ; supérieur ; initiale	En 2d depuis 2005	Repère 2d Hachette
	P37	23	Fresnel, CAEN/ IUFM Normandie	DEA Algorithmique et Arithmétique, 1994, université de Caen	2d TS spécialité- formation d'enseignement avant les programmes 1998 en T, 1999 en 3ème et 2000 en 2d.	Délic
	P38	14	Lycée Jean Monnet à vétraz – Monthoux (74)	Enseignement supérieur Secondaire	Spécialité TS 1998 à 2000 2d : 2005 à 2008.	Hatier
	P39	29	Baudelaire – Cran – Gevrier	Enseignement supérieur : maitrise + agrégation.	Pendant quelques années en collège/ puis en terminale scientifique puis en seconde et terminale scientifique (option Master)	Indice Bordas
	P40	29	Mme de Stael – Saint Julien en Genevois	Enseignement secondaire et supérieur en maitrise, Algèbre, Anneau euclidiens ; corps Z/ PZ…Anneau formation continue ;	Oui, seconde jusqu'à 2005 Terminale C avant 1990 Spécialité maths en terminale depuis 1997.	Hyperbole
	P41	40	S. Valadon – Limoges	Arithmétique en1969 à l'université de Limoges Stages régulière de 2 x 6h dont certains sur la cryptographie	En collège : 5è-4è-3è (de 1973 à 1982). En lycée 2è orientation scientifique de 1982 à 1996. Orientation technologique de 1997 à 2009 études courtes.	Pas de manuel
	P42	30	Collège et lycée International. Lyon	enseignement supérieur formation continue	Oui, en classe de 3è – 2d – Terminale S (plusieurs fois depuis 1992) Récemment : classe de 3è eu 2008/09.Terminale S (spécialité maths depuis 5ans. Classe de 2d cette année.	Hyperbole
	P43	30	Lycée Julien Wittmer - Charolles	enseignement supérieur Secondaire	2d 2000-2008 Terminale spécialité 2002-2006	Déclic Hachette
	P44	3	St Joseph la Providence	enseignement supérieur Secondaire	2d.	Hyperbole
	P45	32	Brocéliande – Guer	enseignement supérieur	Oui, un peu en 2d (2000à 2008). En spécialité math en TS (depuis 10ans).	Indice Bordas
	P46	26	Lycée S.Allende, Hérouville St Clair	Lycée (terminale C), prep, préparatoire agrégation	En seconde (2000 à 2008) ; en terminale scientifique vers 1980, puis entre 2000 et 2009.	Indice Bordas
	P47	38	Lycée S.Allende Hérouville St	Depuis mon passage au lycée comme élève.	Oui eu 2d et TS spécialité maths.	Indice Bordas

			Clair			
	P48	40	……Retraite	Tout.	Oui en seconde et terminale S (spécialité)	Transmath
	P49	37	………	enseignement secondaire ; continue initiale ; formation continue	Oui, en seconde et terminale TS depuis 2002.	Indice
	P50	30	Charles de Gaulle- Rosny –sous –Bois	enseignement secondaire ; supérieur ; formation continue	-2d (tous les ans) - TS spécialité Maths (depuis réforme 2004-2005)	Déclic
	P51	---	………..	enseignement supérieur	Oui 2è de 2000 à 2009. En TS spécialité math de 2000 à 2009.	Radial
	P52	6	……..	enseignement supérieur	Collège.	Hyperbole
	P53	12	Anne de Méjanès Metz	Jusqu'à bac +3 (licence de maths)	En 3ème (PGCD) et 2nde (décomposition)	Maths 2nde repères Hachette
	P54	34	De la salle Metz	Enseignement supérieur	Lycée les années précédentes et collège (il y a très longtemps)	Déclic Seconde (Hachette)

Réponse des enseignants à la question 6

	P	Autres manuels de seconde	Manuels d'autre(s) niveau(x) du secondaire Collège ; lycée	Revues, documents à destination des enseignants (brochures IREM, bulletin APMEP, etc.)	Manuels ou polycopiés universitaires	Revues et ouvrages de vulgarisation mathématique	Internet	Autres
P- E	P1	x	Lycée	APMEP, Plot		Tangente, merveilleux nombres premiers (delahaye/belin) Les nombres et leurs mystères – (Warusfel/Points Sciences Seuil	Sites sur les nombres et sur l'histoire des maths	
	P2	x	Collège ; lycée				x	
	P3	x	Lycée				x	Programme très succint en seconde qui disparaît à la rentrée 2009.
	P4	x	Collège ; lycée	x				
	P5	x	Non	Non	Non	Non	Oui	
	P6	x	lycée				x	
	P7	x					x	
	P8	x						Echanges avec collègues.
	P9	x						
	P10	x					x	
P	P11	A peine						rien de tout cela, l'arithmétique en classe de seconde est très limitée : nombres premiers et de th de décomposition en facteurs premiers. Pas d'équ diophantienne pas de problèmes de divisibilité et surtout peu de connexion avec le reste du programme.
	P12	x		x			x	
	P13		Lycée					x
	P14		Lycée	x Brochure IREM Lyon/ Marseille			x	
	P15							informations sur le plus grand nombre premier trouvé en

								août 2008, des exercices que j'invente
	P16	x	Lycée					
	P17	x						
	P18	x	collège	x				
	P19	x	Lycée	x	x		x	
	P20	x		x			x	
Réponse des Prof par internet	P21	x	Lycée					
	P22	x						
	P23	Déclic et hyperbole		jeux 8				
	P24		Lycée	x			x	
	P25	x		x				
	P26		3ème collection phare livre bleu					
	P27							qq exercices simples que j'invente
	P28							le livre et des idées glanées de partout
	P29							
	P30							Le texte du programme, essentiellement. A ce niveau, l'arithmétique est un détail du programme, et je n'ai pas besoin de documents spécifiques.
	P31							
	P32		Lycée	x		x	x	
Réponse des Prof APMEP	P33							Il n'y plus d'arithmétique dans le nouveau programme de seconde du 23 juillet 2009.
	P34	Hyperbole						
	P35			x				Production personnelle ou collective des enseignants de mon lycée.
	P36	x						
	P37	x		x				
	P38	x	Lycée			x		
	P39	x		x			x	
	P40			x				
	P41		Lycée	x			x	
	P42	x	Collège ;	x		x		

			Lycée					
	P43	x						
	P44			x			x	
	P45							Pour le cours de seconde, aucune. Le contenu de programme est trop maigre.
	P46	x		x				
	P47	x		x			x	
	P48			x		x		
	P49	x						Mes documents
	P50	x						
	P51	x	Lycée	x	x	x	x	Textes anciens (Euclide..)
	P52	x					x	
Net	P53							
	P54	x						

Réponse des enseignants à la question 7

	P	Réponses
P-E	**P1**	Non.
	P2	Oui, l'arithmétique est la partie des mathématiques qui s'occupe de l'étude des nombres.
	P3	------
	P4	Oui, c'est la « Science des nombres ».
	P5	Oui, l'arithmétique traduit toutes les opérations avec les nombres avec toutes les règles de simplification et de calcul qu'elles engendrent.
	P6	Je n'ai pas donné une définition générale de l'arithmétique.
	P7	Je précise que nous n'étudions que les nombres entiers positifs alors que l'arithmétique concerne tous les nombres entiers.
	P8	Non.
	P9	Oui, étude des nombres entiers naturels et de leurs propriétés.
	P10	Non.
P	**P11**	Pas en seconde en spé math oui oralement en début d'année « branche des maths qui s'intéresse aux problèmes sur les nombres entiers. »
	P12	Non.
	P13	l'étude des nombres entiers (au départ).
	P14	Non.
	P15	Se limiter à l'ensemble des nombres entiers.
	P16	Non, pas en 2d.
	P17	Oui, l'arithmétique : la reine des mathématiques d'après Gausse – l'étude de N.
	P18	Non.
	P19	Oui, Etude des nombres entiers.
	P20	Non.
Pn	**P21**	Etude des nombres entiers et de leurs propriétés, applications aux rationnels.
	P22	L'arithmétique c'est la partie des mathématiques qui concerne les calculs dans N (et plus tard dans Z))
	P23	Travail avec les nombres entiers.
	P24	Non.
	P25	Je ne donne pas de « définition », je leur dis simplement qu'on va s'intéresser aux nombres entiers.
	P26	Non pas en ce moment et je n'en ai jamais eu l'occasion. Je définirais ceci comme l'étude des nombres entiers et relatifs.
	P27	Pas vraiment. Ca doit m'arriver de dire que c'est la branche des mathématiques qui s'occupe des nombres entiers et de leurs propriétés.
	P28	En TS j'essaie d'être plus précis. Par exemple je précise les nombres premiers comme les briques usuelles pour construire les entiers. Je donne des domaines d'utilisation de l'arithmétique.
	P29	Non.
	P30	Je la définis en terminale (spé maths). Je dis que c'est l'étude des nombres entiers.
	P31	Calcul sur les nombres entiers (pas le droit à la virgule ni aux négatifs pour eux) Les exercices font partis du chapitre ensemble de nombres donc N
	P32	Non

P- APMEP	**P33**	Oui, l'étude des nombres entiers (naturels).
	P34	Etude dans l'ensemble N.
	P35	Non.
	P36	Non.
	P37	Définition étymologique.
	P38	Non.
	P39	Oui, étude des nombres entiers.
	P40	étude des nombres entiers et de leurs propriétés.
	P41	Travail sur les nombres entiers. Connaissance de ces nombres.
	P42	Oui, c'est la partie des Maths qui s'occupe des nombres entiers. (je rappelle éventuell-t ce que sont les nbs entiers.
	P43	étude des nombres entiers.
	P44	Non.
	P45	Non. pas en 2d. oui en TS. ''étude des « calculs » en nombres entiers''.
	P46	« c'est tout ce qui touche aux nombres entiers. »
	P47	Je ne donne pas vraiment de définition. mais je dis que l'objectif est de calculer, de résoudre des problèmes avec uniquement des nombres entiers (naturels).
	P48	Non, pas vraiment ; je dis simplement que cette partie des maths travaille sur les entiers dans Z.
	P49	Propriétés des nombres entiers.
	P50	Non.
	P51	Travail avec les seuls nombres entiers.
	P52	Oui comme étude des nombres entiers.
	P53	Non.
	P54	Étude des propriétés des nombres entiers et rationnels.

Réponse des enseignants à la question 8

	P	Réponses
P-E	**P1**	Les nombres premiers entre eux pour rendre irréductible des fractions
	P2	multiple, diviseur, nombres premiers entres eux, le plus grand diviseur commun, critères de divisibilité.
	P3	la divisibilité le PGCD, (Algorithme d'Euclide), nombres premiers entres eux.
	P4	Notions de diviseurs et de multiples. Pgcd, nombres premiers entres eux (≠ nb premiers).
	P5	Les règles de simplification des fractions, les puissances.
	P6	PGCD, PPCM, simplifier des fractions (cela reste dans le chapitre des nombes)
	P7	Le calcul du PGCD par l'algorithme d'Euclide, la notion de nombres premiers entre eux, la division euclidienne.
	P8	nombres premiers, divisibilité (critères).
	P9	Décomposition en facteurs premiers, PGCD, PPCM, critères de divisibilité.
	P10	Premiers entres eux ≠ premiers, PGCD, PPCM.
P	**P11**	Division euclidienne.
	P12	Diviseurs communs ; Algorithme d'Euclide ; puissances.
	P13	PGCD pour soustraction, pour division.
	P14	Toutes.
	P15	Exactement celles du programme de 2d actuel.
	P16	Algorithme d'Euclide.
	P17	la notion de pgcd.
	P18	divisibilité, diviseurs, multiples, pgcd, ppcm.
	P19	divisibilité, multiples, pgcd, nombres premiers.
	P20	----------------
Pn	**P21**	Notion de PGCD. Décomposition en produit de facteurs premiers et simplification de fractions.
	P22	Nombres premiers ; diviseurs.
	P23	nombres premiers, PGCD, critère de divisibilité.
	P24	Nombres premiers (seule notion d'arithmétique explicitement au programme de seconde).
	P25	Je retravaille les deux algorithmes, différences et Euclide.
	P26	PGCD, nombres premiers entre eux et nombres premiers.
	P27	On revoit le pgcd de deux nombres, calculé grâce à la décomposition en facteurs premiers.
	P28	Ce qui est au programme et c'est déjà trop pour certains.
	P29	Multiples et diviseurs, PGCD.
	P30	La notion de divisibilité, la division euclidienne et l'algorithme d'Euclide.
	P31	TOUTES ! Y compris les règles de divisibilités.. et leur table !
	P32	Divisibilité-Nombres premiers-PGCD
P- APMEP	**P33**	PGCD et Algorithme d'Euclide nombres premiers entre eux.
	P34	Multiples et diviseurs.
	P35	le PGCD (pour simplifier une fraction)
	P36	Facteur, la divisibilité, pgcd
	P37	Division euclidienne, PGCD.
	P38	la différence entre multiple et diviseur.

	P39	Jusqu'à l'année dernière, décomposition en facteurs premiers, recherche de PGCD, division euclidienne, critères de divisibilité. cette année : plus d'arithmétique au programme mais je parle en cas de nombres premiers critères de divisibilité.
	P40	PGCD- nombres premiers. Division euclidienne.
	P41	Comment reconnaitre un nombre premier. Ppcm et pgcd pour la simplification d'écriture d'un résultat numérique. (fraction, racine carré) à partir de la décomposition unique admise d'un nombre entier en produit en facteurs premiers.
	P42	la notion de PGCD et le calcul du PGCD.
	P43	Avant la rentrée 2009 : Division euclidienne ; nombres premiers ; nombres premiers entre eux, PGCD, Décomposition en produit de facteurs premiers.
	P44	---------
	P45	Multiples- diviseurs. réduction des fractions.
	P46	Surtout le PGCD.
	P47	Calcul de PGCD.(recherche de diviseurs de multiples)
	P48	diviseurs, PGCD, initiation au PPCM.
	P49	Numération, nombres premiers, algorithme d'Euclide.
	P50	Décomposition pninaire, PPCM-PGCD pour ceux qui l'ont vus.
	P51	Toutes.
	P52	PGCD – division euclidienne – nombres premiers.
	P53	Diviseurs, multiples.
	P54	Le PGCD de deux nombres ; caractères de divisibilité.

Réponse des enseignants à la question 9

	P	Réponses
P-E	**P1**	Une maîtrise insuffisante des tables de multiplication. Une « culture » des nombres insuffisante : des décompositions comme 5*12=60 inconnues. Un recours systématique à la calculatrice au lieu du calcul mental.
	P2	Difficulté : travail qu'avec les nombres entiers (dire 1.5 divise 3 n'aucun sens). Remède : attention la notion de divisibilité perd tout son sens sinon. $5 = 10 \times 0.5$ mais 0.5 et 10 ne sont pas de diviseurs de 5. $3 = 2 \times 1.5$ si on pense que 3 est divisible par 2, alors on dit aussi que 3 est pair! (ceci choque !)
	P3	Faire des divisions (sans calculatrice).
	P4	Dans $21 = 3 \times 7$, voire que cette égalité signifie 2 choses : 3 divise 21. 21 est un multiple de 3. Pour les aider, je les fais formuler par une phrase : ex : 21 est le produit de 3 par 7.
	P5	Les élèves ont du mal à retenir les règles de simplification des puissances, mais aussi font souvent des erreurs de calcul lors de la mise à un même dénominateur ou lors d'un développement avec le signe (-). Je leur propose des formulaires résumant ces principales règles et j'essaye de faire le plus grand nombre d'exercices possible. Mais l'un des problèmes majeurs c'est qu'ils ne reprennent pas assez le travail chez eux ce qui fait qu'ils ont tendance à oublier.
	P6	Les élèves ne savent plus faire les calculs. Des difficultés de trouver le PGCD et le PPCM.
	P7	Ils butent souvent sur la notion de base qui est celle de la division euclidienne. En fait, ils ne comprennent pas son intérêt. J'accorde en fait peu de temps à l'arithmétique en 2^{nde}. Pour les aider, j'essaie de varier les approches.
	P8	Utilisation des lettres (énoncés de propriétés en particulière) pour remédier : travailler avec beaucoup d'exemples.
	P9	--------------
	P10	Déterminer le PGCD et le PPCM à l'aide de la décomposition en facteurs premiers. Je n'ai pas insisté dessus.
P	**P11**	Aucune familiarité avec les nombres entiers et le calcul. Bannir la calculatrice de l'enseignement des maths.
	P12	Décomposer en un produit de facteurs premiers.
	P13	se « plier » à un algorithme (ex : décomposition en nombres premiers).
	P14	Raisonnement. Maitrise des calculs.
	P15	Je ne n'ai pas trouvé trop de difficultés.
	P16	Utilisation lors de simplification de fractions, ou de manipulation (et simplification) de $\sqrt{n}$: règles opérations et propriétés.
	P17	Difficulté quand on fait des démonstrations. Je n'ai pas trop d'exigences ensuite là-dessus.
	P18	Confusion entre multiple et diviseur, Beaucoup de difficulté du au fait qu'ils ne donnent pas de sens à la division et à la multiplication.
	P19	Manque de rigueur dans l'utilisation des notions (diviseurs, multiples).

		Problèmes de calculs.
	P20	Des problèmes de calcul. Des problèmes sur les exposants.
Pn	**P21**	Connaissance des tables de multiplications, propriétés des puissances. Je les entraîne au calcul mental.
	P22	Difficultés dans le calcul élémentaire : faire apprendre les tables de multiplication.
	P23	Mauvaise maitrise des calculs, travailler le calcul mental.
	P24	En 1ère L otion et Term S : Problèmes avec la division euclidienne et la divisibilité dans Z.
	P25	Ils ne rencontrent pas beaucoup de difficultés sur ce qui est au programme en seconde. Ils en rencontrent sur les exercices utilisant l'écriture décimale des entiers mais ce sont des exercices qui vont un peu au-delà du programme.
	P26	ne connaissent pas les définitions/n'apprennent pas leurs cours. Ont des difficultés avec nombres décimaux (impossible en arithmétique dans Z) le décomposition en produit de facteurs premiers Solutions : faire plus d'exercices (maîtriser la technique).
	P27	La toute première difficulté est le manque de maîtrise des tables de multiplication et des règles de calcul. Pour y remédier : la pratique mentale ou à la main. Le plus souvent possible sans calculatrice. L'unicité de la décomposition pose aussi pb, mais c'est plus compréhensible.
	P28	Ils n'apprennent pas les définitions, les théorèmes et les méthodes. Ils ne savent donc pas comment s'y prendre. Je leur demande de les apprendre, ce qui ne sert à rien. Par contre les élèves qui travaillent sont motivés par des exo originaux.
	P29	En fait, la pauvreté du programme fait qu'ils ne rencontrent que peu de difficultés, hormis la connaissance des tables de multiplication.
	P30	Ils n'ont pas l'habitude de travailler dans l'ensemble des entiers, et ils utilisent des quotients et des racines carrées. Ils ont du mal à s'abstraire des calculs sur les réels. C'est vrai en seconde, mais aussi en terminale.
	P31	Les notations indicielles pour la décomposition 'théorique' en nombres premiers et d'une manière générale toute notation algébrique est difficile (identification des lettres par rapport à leurs propres calculs) Remèdition sur des formules plus simples ou mieux connues pour apprendre à manipuler les lettres
	P32	Tables de multiplication.
P- APMEP	**P33**	Distinguer « nombre premier » et « nombres premiers entre eux ».
	P34	-----------
	P35	Manque d' dans le calcul (entrainement) Difficulté à utiliser une formule (exemples de contextes variés)
	P36	Calcul élémentaire - confusion dans les règles de divisibilité : un nombre est divisible par 5 si la somme de ses chiffres est multiple de 5, etc.…..
	P37	En 2d, pas de gros problèmes. En T, le raisonnement, l'unicité du couple (q, r) avec 0<<r<b, confusion entre 5 divise 10 et 10 divisé par 5.
	P38	Les tables de multiplication et des difficultés de français. Exemple : calculer le PGCD de 140 et 64. Réponse très courante d'élèves le PGCD de 140 est …. Et celui de 64 est … :
	P39	Difficulté de calcul : pour décomposer des nombres n'ont pas la reflex de

		décomposer des nombres par manque le pratique du calcul mental. Pour les aider j'organise des séquences de 10 min de calcul mental par semaine. Difficultés sur le sens des opérations confusion ×, +, puissances pour surmonter : petits problèmes simples assez concrets.
	P40	-------------------
	P41	« à quoi ça sert » dit l'élève ». On n'a pas besoin de connaître ces nombres davantage, tout pour un futur métier dans le social, la santé (niveau bac+2 maxi mime ou +3 inférieur). Je suis assez désarmée pour en communiquer l'intérêt, mais en 2d, les problèmes de carrelage (utilisation du pgcd ou autres sont encore supportés à condition que ce soit un court passage. En 1ère et T c'est franchement impossible.
	P42	----------------------
	P43	---------------------
	P44	la connaissance des ensembles + les nombres + temps.
	P45	En 2d peu de difficulté scientifique la mauvaise connaissance des tables de multiplication ; En T, difficultés à « sortir » des calculs de types analytique.
	P46	Confusion entre nombres ''premiers' et nombres « premiers entre eux''. Confusion entre division euclidienne et quotient a/b approché ou décimale.
	P47	la maitrise du caractère entier, donc non décimal on ne peut pas faire de division à virgule…. Pour aider : résolution de petits problèmes où les nombres représentent des personnes ou des objets (qu'on ne peut donc pas diviser).
	P48	D'abord en seconde ce n'est qu'une toute partie en terminale c'est une bonne moitié du programme. Donc je conseille de reprendre les exercices de base de changer les valeurs numériques et de travailler.
	P49	-----------------
	P50	Cela passe bien jusqu'à l'utilisation de décomposition en produit de nombres premiers.
	P51	Peu, sinon un oublie rapide et le manque d'intégration des résultats dans les autres chapitres de math.
	P52	Pas trop de difficultés. Beaucoup dans les simplifications de fractions.
	P53	-----------
	P54	Les élèves n'ont pas vraiment de problème avec l'arithmétique. Le chapitre « passe » bien.

Réponse des enseignants à la question 10

	P	Réponses
P-E	**P1**	Un nombre entier naturel est premier si et seulement si il n'admet que deux diviseurs distincts : 1 et lui-même. 1. On mémorise la liste des nombres premiers inférieurs à 50. 2. On teste si le nombre donné est divisible par les nombres premiers connus dans l'ordre croissant et on s'arrête quand le diviseur à tester serait supérieur à racine(n).
	P2	Un nombre premier est un nombre entier positif qui a exactement deux diviseurs positifs: 1 et lui-même. Méthode : Division par tous les nombres premiers inférieurs à √n (pour déterminer si n est premier).
	P3	Def : un nombre entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Division par les nombres premiers jusqu'à ce que le quotient est supérieur au diviseur (en 2d). Division par les nombres premiers inférieurs à sa racine carrée (en TS).
	P4	Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs (distincts) : 1 et lui-même. Pour déterminer si un nombre n'est pas premier, je leur fais donner un diviseur propre. Pour déterminer si un nombre est premier, je leur ai donné les critères. Pour déterminer si un entier naturel n impair est premier, on dresse la liste des nombres premiers inférieurs à √n et on vérifie qu'ils ne divisent pas n.
	P5	Pour reconnaître un nombre premier on peut commencer par vérifier s'il est paire, dans ce cas il ne sera plus premier, ensuite essayer de voir si c'est un multiple de 3 si la somme des chiffres qui le composent est un multiple de 3. ensuite on vérifie s'il est divisible par 5, 7, 11, 13, 17 et 19 en général si le nombre n'est divisible par aucun de ces nombres alors il est premier.
	P6	Un nombre est premier s'il n'est divisible que par lui-même et par un. Etablir les diviseurs de 2 ou racine carrée du nombre.si on n'en trouve aucun le nombre est premier – le PGCD égale à 1.
	P7	Comme je travaille dans l'ensemble des entiers naturels, je définis un nombre premier comme un entier naturel qui a exactement deux diviseurs : un et lui-même.
	P8	Un nombre qui a exactement deux diviseurs positifs. Chercher des diviseurs parmi les nombres plus petits que la racine carrée.
	P9	Nombre qui n'a que deux diviseurs 1 et lui-même. Divise ce nombre par les nombres successifs jusqu'à ce que le quotient « soit » plus petit que le diviseur.
	P10	Nombre qui n'est divisible que par 1 et lui-même. (dans les entiers positifs) Regarde si les nb1ère plus petit (jusqu'à la racine carré du nb) divise le nb ou pas.
P	**P11**	P est premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs positifs. Test de divisibilité jusqu'à ce que d² soit plus grand que n.
	P12	Un nombre premier est un entier qui possède exactement deux diviseurs. Méthodes : crible d'Eratosthène ou méthode d'empirique.
	P13	Un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs distincts: 1 et lui-même.

		Ça dépend à quel niveau 2d : teste P $1^{\text{ère}}$ P| n. $1 \leq P \leq$ n Ter S test : P $1^{\text{ère}}$ P| n. $P \leq \sqrt{n}$
	P14	Tout entier naturel strictement plus grand que 1 ayant exactement 2 diviseurs.
	P15	deux diviseurs exactement. En TS : plusieurs méthodes : divisibilité successivement par les premiers nombres
	P16	Entiers qui possèdent exactement deux diviseurs.
	P17	nombres premiers : nombre entier naturel ≥ 2 qui a exactement 2 diviseurs. Méthode : crible d'Eratosthène, recherche des diviseurs à partir de 2, 3, 5, jusqu'à≈ √n
	P18	Définition : un nombre premier est un entier non nul n'est divisible que par 1 et lui-même. Méthode : test simple de divisibilité Puis /ou testes les entiers inférieurs à la racine carrée du nombre.
	P19	Un naturel est premier s'il n'a que deux diviseurs positifs. Les divinisions par p premier P < n
	P20	un nombre premier est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs 1 et lui-même. Le diviser par les nombres premiers le précédant jusqu'à « √n »
Pn	**P21**	Définition donnée : un entier naturel est dit premier s'il admet que deux diviseurs distincts, 1 et lui-même. Crible d'Erathostène pour les entiers inférieurs à 100 et je leur dis aussi d'utiliser les tables de multiplication.
	P22	On dit qu'un entier est premier (dans N) s'il admet exactement 2 diviseurs
	P23	Un nombre premier admet exactement deux diviseurs 1 et lui-même (donc 1 n'est pas premier) Crible d'Eratosthène et divisibilité par tous les nombres premiers inférieur à sa racine carrée
	P24	Un nombre entier naturel est premier s'il admet exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même
	P25	Il y a plusieurs définitions ? la méthode est vue après avoir complété un crible d'Eratosthène. On divise par tous les nombres premiers jusqu'à la racine carrée.
	P26	un nombre premier est un nombre qui admet exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même. Méthodes : crible d'Eratosthène, diviseurs quand le nombre n'est pas trop compliqué, programme de calcul, petit théorème de Fermat (a^p congru à 1 modulo p => p premier)
	P27	Nombre entier positif qui n'est divisible que par 1 et par lui-même (on est dans N, je ne parle pas des diviseurs négatifs à moins qu'un(e) élève soulève la question). 1 est exclu par convention. Méthode : tenter la division de n par les diviseurs premiers dans l'ordre croissant. On s'arrête si n est divisible par un diviseur premier propre ou si on dépasse racine(n).
	P28	La seule correcte : les entiers naturels qui ont EXACTEMENT 2 diviseurs. En seconde on cherche les diviseurs (sur des petits nombres) si possible sans calculette. On fait aussi le crible d'Eratosthène
	P29	Un nombre premier est un nombre qui n'admet d'autres diviseur que 1 et luimême

		; 1 n'est pas premier.
	P30	a) Définition donnée : Un entier naturel est premier s'il a exactement deux diviseurs, 1 et lui-même. b) On cherche s'il est divisible par les entiers inférieurs à sa racine carrée. (bien sûr , on explique pourquoi) Je fais toujours construire en TD le crible d'Eratosthène pour construire la liste des nombres premiers jusqu'à 100. En terminale, on écrit un programme sur la calculatrice déterminant si un nombre est premier.
	P31	Un nombre premier est un nombre qui a deux diviseurs différents et deux seulement : 1 et lui même. La premiere methode est la recherche de diviseurs afin de trouver la liste des nombres premiers jusqu'à 20 (qu'ils auront à apprendre). Ensuite on voit qu'il suffit de chercher les diviseurs jusqu'à rac(n) (en fait des que le quotient devient inférieur au diviseur). On voit le crible d'Eratostène. Cela permet aussi de retravailler la notion de contre exemple : un seul autre diviseur suffit à montrer qu'il n'est pas premier
	P32	Un nombre premier est un nombre qui admet exactement 2 diviseurs : 1 et lui même. Méthode : On effectue les divisions euclidiennes du nombre n par chacun des nombres premiers selon l'ordre de la liste des nombres premiers. Dès que le reste est nul le nombre n'est pas premier, si aucune des divisions n'a pour reste 0 , on s'arrête lorsque le quotient devient inférieur au diviseur, n est alors premier.
P- APMEP	**P33**	un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts. Méthode : Divisibilité de n par les entiers inférieurs à $\sqrt{n}$.
	P34	Dans N un nb premier est nb qui admet exactement 2 diviseurs. On la divise par les nombres (éventuellement premiers) successifs jusqu'à ce que le diviseur essayé soit supérieur au quotient.
	P35	un nombre premier est un entier naturel (non nul et $\neq 1$) qui est divisible par 1 et lui-même. (qui a exactement deux diviseurs distincts) Crible d''Eratosthène Décomposition.
	P36	un nombre premier n'a pas d'autre diviseur que 1 et lui- même. Méthode : division successive jusqu'à $\sqrt{n}$.
	P37	un nombre entier qui ne peut être mesuré que par 1 et par lui-même.
	P38	nombre premier : entier naturel possédant exactement deux diviseurs naturels. La plupart de recherche de primalité se fait par Crible d''Eratosthène pour trouver les premiers jusqu'à $\sqrt{n}$.
	P39	Jusqu'à l'année dernière en seconde : 1) un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il ne possède que deux diviseurs différents : 1 et lui- même. 2) Méthode pour rechercher si un nombre est premier : liste des nombres premiers jusqu'à 100 puis utiliser les critères de divisibilité, puis en cas d'échec disparation pratique avec liste des nombres premiers P jusqu'à p^2 dépasse le nombre.
	P40	- Test des diviseurs premiers éventuels p tant que $P \leq n$ - Crible d''Eratosthène.
	P41	- un nombre premier est un nombre entier qui n'admet comme diviseur que 1 et

		lui-même. - Diviser par les nombres successifs (ils ont une tables des nombres premiers de 1 à 100 d'après le crible explique d''Eratosthène), et tant que le diviseur est inférieur au quotient et qu'aucune division est exacte, on continue et dès que le diviseur dépasse le quotient sans qu'aucune division ne soit juste, alors le nb choisi est 1er, sinon non.
	P42	entier naturel non nul qui possède exactement deux diviseurs 1 et lui- même. Pour les petits nombres : faire la liste des diviseurs Connaitre la listes des nbs premiers jusqu'à 30. Pour les grands nombres : utilisation de la règle « pas divisible par les nbs premiers $<\sqrt{n}$ ».
	P43	un nombre premier est un nombre entier naturel qui a exactement deux diviseurs 1 et lui- même. On cherche s'il est divisible par 2, 3, 5, … (nombres premiers) on s'arrête dès que le quotient est inférieur au diviseur.
	P44	P a 2 diviseurs 1 et ps.
	P45	Nbs uniquement divisibles par 1 et eux-mêmes (en 2d) En T : « exactement 4 diviseurs'. Méthode : diviser par tous les facteurs premiers de 2 à $\sqrt{N}$
	P46	Je demande de décomposer un nombre en produit de facteurs « les plus petits possibles » et as facteurs « qu'on ne peut plus diviser » autrement que $p = 1 \times p$ sont des nombres premiers. Après, je dis qu'un nombre est premier s'il a exactement 2 diviseurs positifs. Je propose de diviser par les plus petits nombres premiers, puis qu'à ce que le quotient devient inférieur au reste.
	P47	- Nb premier admet exactement deux diviseurs positifs 1 et lui- même. - recherche de diviseurs possibles (dans les entiers plus petits)
	P48	Nb premier : nombre qui n'a que deux diviseurs 1 et lui-même. Essentiellement test jusqu'à racine carrée du nombre des nombres premiers en tant que diviseurs.
	P49	- qui admet exactement deux diviseurs. - Tâtonner. - Diviser par 2, 3, …$E(\sqrt{n})$
	P50	- nombre premier s'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. - Recherche à l'aide des ''1ère nombres 1ers'' et arrêt dès que 1^{e} carré du nombre 1er suivant est supérieur au nombre dont on cherche à trouver son caractère de nombre premier.
	P51	- Qui a 2 diviseurs exactement. - Crible - Recherche de diviseurs. - Calculatrice. - Condition d'arrêt dans la recherche des diviseurs.
	P52	- nombre qui n'a pas d'autres diviseurs qu'un et eux –mêmes ($\neq 1$). - division par les nombres premiers dont le carrée est inférieur à n. - Crible d''Eratosthène
	P53	Un nombre est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même
	P54	Un nombre est premier s'il possède exactement deux diviseurs (0 et 1 ne sont pas premiers). On divise le nombre A par tous les nombres premiers inférieurs à la racine carrée

		du nombre A. Si on n’obtient aucun diviseur alors A est premier.

Réponse des enseignants à la question 11

P	P	Réponses
P-E	**P1**	PGCD(a,b) est le plus grand diviseur commun à a et à b. Méthode 1. Vue en troisième Algorithme d'Euclide. Méthode 2. On décompose a et b en produit de facteurs premiers et le PGCD(a,b) est le produit de tous les facteurs premiers utilisés avec leur plus grand exposant.
	P2	Définition : le PGCD (a, b) est le plus grand diviseur commun de a et de b. Méthode : Décomposition en facteurs premiers de a et de b. On obtient alors le PGCD (a, b) en multipliant entre eux tous les termes qui apparaissent dans les deux décompositions précédentes. Si deux nombres premiers apparaissent dans les deux décompositions mais avec des puissances différentes, on considèrera pour le calcul du PGCD le nombre premier affecté de la plus petite de ces puissances.
	P3	C'est le grand nombre entier qui appartient à Div (a) ∩ Div (b). Méthodes : algorithme d'Euclide (pour des grands nombres) ; Décomposition en produit de facteurs premier (pour les fractions).
	P4	Le nombre qui est le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels a et b s'appelle le pgcd de a et b. on note ce nombre pgcd (a ; b). Je leur fait lister les diviseurs de a et de b puis trouver le plus grand. Après avoir vue la décomposition en facteurs premiers, je leurs explique l'autre façon d'obtenir le pgcd mais je ne mets pas de formule dans le cours.
	P5	Le pgcd est le plus grand diviseur commun qu'on peut trouver entre deux nombres. Pour cela on peut décomposer les deux nombres sous la forme de leurs plus petits multiples ensuite on prendra tout les multiples communs entre les deux nombres. Leur résultat est le pgcd des deux nombres. Exemple : 60=<u>3</u>x<u>2</u>x<u>5</u>x2 30=<u>3</u>x<u>2</u>x<u>5</u> donc ici le pgcd est 3x2x5 = 30.
	P6	• Décomposition en facteurs de nombres premiers. • Algorithme d'Euclide. PGCD : plus grand commun diviseur a = {d1, d2, ….dm} b= {p1, p2, ….pn} diviseur commun (a, b) = {e1, , ….el} • En 2d, je n'insiste pas sur une méthode. • En cours de l'école des infermières le temps imparti à ces notions permettant de voir en détaille les deux méthodes. Le temps
	P7	Je donne du pgcd, la définition liée à son nom ! (définition et théorème). Je fais très peu de démonstration, on admet son existence et son unicité. Méthodes : l'algorithme d'Euclide et la détermination à partir de la décomposition en produit de facteurs premiers.
	P8	Déf : plus grand nombre qui divise les deux à la fois. Méthode : on fait la liste des diviseurs positifs de chaque nombre, et on regarde le plus grand qui est dans les 2 listes.
	P9	Utiliser la décomposition en facteurs premiers.

	P10	PGCD : on regarde tous les diviseurs des 2nb et on prend le plus gr commun. Euclide, décomposition en facteurs premiers (utilisation indifférente).
P	**P11**	Ce n'est pas au programme en seconde.
	P12	Le pgcd n'est pas au programme de seconde.
	P13	Le plus diviseur commun (entier) Par soustraction. Par algorithme d'Euclide Puis en utilisant la décomposition en nombres $1^{ère}$.
	P14	- Ensembliste. - Calcul à l'aide de l'algorithme d'Euclide. - Avec la décomposition en produit de facteurs premiers.
	P15	PGCD : le plus grand des diviseurs communs.
	P16	Pas de définition du pgcd.
	P17	Pgcd : je ne le définis pas réellement car il a été défini en 3è. Méthode de détermination : utilisation : décomposition en nombres premiers. Simplification de fractions à l'aide des décompositions en nombres premiers.
	P18	Pas de définition donnée dans le cours si ce n'est « plus grand diviseur commun ». Méthode→ décomposition des nombres en produit des nombres premiers, puis le pgcd est le produit des nombres premiers appariassent dans les deux décomposition avec l'exposant le plus bas.
	P19	Méthode de différences successives. Méthode des divisions successives. (Euclide) Décomposition en facteurs premier, on l'utilise peu en seconde ! (programme).
	P20	Ce n'est pas dans le programme de seconde.
Pn	**P21**	Définition du PGCD : le plus grand diviseur commun Méthodes : Par la décomposition en produit de facteurs premiers mais ils ont du mal ! Par la recherche des diviseurs de chacun des nombres, ils voient mieux. Par l'algorithme d'Euclide mais beaucoup d'erreurs de calcul de leur part
	P22	Le pgcd n'est pas au programme de Seconde
	P23	PGCD plus grand commun diviseur et utilisation en facteurs premiers
	P24	- Aucune définition n'est exigible en seconde(seulement rappel de Troisième), le PGCD n'est pas intégré au programme (seuls les ensembles de nombres et les nombres premiers ainsi que la décomposition en facteurs premiers font partie des connaissances et capacités attendues dans le dernier programme en vigueur jusqu'à cette année mais ils disparaitront des nouveaux programmes rentrée 2009), le PGCD n'intervenait en seconde que dans d' éventuels exercices de simplification de fractions sous forme irréductible et il n'y a pas lieu de refaire à nouveau un cours, on peut éventuellement rappeler si nécessaire l'algorithme d'Euclide vu en $3^{ième}$
	P25	Je donne comme définition que c'est le plus grand diviseur commun ce qui n'est pas un scoop et on regarde dans les diviseurs communs de deux nombres dont on a la décomposition quel est le plus grand qu'on peut fabriquer. On compare avec l'algorithme d'Euclide.
	P26	PGCD = plus grand commun diviseur à deux nombres 3 méthodes : 1- différences successives (nombres élevés mais laborieuse) 2- méthode des diviseurs (nombres peu élevés comme PGCD(36,60))

		3- algorithme d'Euclide (nombres plus élevés)
	P27	Déf : plus grand diviseur commun de deux nombres (il y a toujours au moins 1). Méthode à l'aide de la décomposition, que l'on peut comparer à l'algorithme d'Euclide. Mais sans entrer dans une question de contexte. Nous n'en avons pas vraiment le temps.
	P28	Le programme ne parle pas de PGCD
	P29	Le plus grand diviseur commun. On commence par écrire la liste des diviseurs des deux nombres, puis on cherche le plus grand des diviseurs communs. Dans un second temps, on se rappelle les algorithme utilisés en collège (algorithme d'Euclide et méthode des soustractions successives) On utilise ensuite la décomposition en facteurs premiers.
	P30	a) Le plus grand entier qui divise à la fois les deux nombres. b) J'explique aux élèves, en seconde , après leur avoir appris la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, comment on peut utiliser cette décomposition pour trouver le pgcd. Je ne dis rien du contexte d'utilisation. En terminale, j'explique que l'algorithme de décomposition est très long et que sa difficulté est utilisée en cryptographie.
	P31	Plus grand commun diviseur. On commence par chercher la liste de tous les diviseurs ... trop long alors on utilise la décomposition en nombre premier on revoit ensuite l'algorithme d'euclide qu'ils connaissent assez bien en pratique. Mais comme le but est de manipuler les puissances et les nombres premiers (décomposition) je leur montre sur des exemples que cela peut etre fastidieux.
	P32	3méthodes -On écrit la liste des diviseurs de chacun puis communs et on prend le plus grand (définition) -L'algorithme d'Euclide vu en 3$^{\text{ème}}$ ou différences sucessives _A l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers.(nouveau en seconde)
P- APMEP	**P33**	PGCD : plus grand commun diviseur. Méthode de l'algorithme d'Euclide.
	P34	Je ne retravaille pas cette notion ; je les fait rechercher le pgcd à partir des décomposition.
	P35	Réactiver la méthode par différence (Euler) Décomposer les nombres. La méthode : si les nombres apparaissent décomposé au facilement décomposables la 2d, sinon 1$^{\text{ère}}$.
	P36	Plus grand diviseur commun : plus grand diviseur commun aux deux nombres + des exemples. Méthode : Euclide (divisions successives). A partir de la décomposition en facteurs premiers.
	P37	Le plus grand entier qui mesure a et b. problèmes de pavage avec des carreaux entier.
	P38	PGCD= Plus grand diviseur commun. l'algorithme d'Euclide a été vu en 3°, on découvre en 2d la décomposition en produit de facteurs premiers. Les deux

		méthodes ont leurs avantages et leur inconvénients : Euclide ne nécessite pas de connaitre les diviseurs premiers mais est long et fastidieux pour calculer le PGCD de 3 ou 4 nombres.
	P39	En seconde jusqu'à la année dernier: PGCD de deux entiers naturels non nuls = plus grand diviseur commun aux deux entiers. Par déterminer Algorithme d'Euclide rappel de 3°. (1) Seulement sur des exemples : décomposition en facteurs premiers (2) Par la méthode (2) : sur des exemples simples. Par la méthode (1) : sur des exemples simples qui ne concluent pas à trop d'étapes.
	P40	- Plus grand diviseur commun au sens de l'ordre dans N. - Algorithme d'Euclide. - Dans certains cas, emploie des nombres premiers de la décomposition en produit de facteurs premiers.
	P41	Le pgcd est obtenu à partir de la décomposition en facteurs premiers des 2 nombres, et c'est cette méthode en 2d que j'utilisais. La liste des diviseurs dans l'ordre, jusqu'à trouver le plus grand diviseur commun quand le nombre n'est pas trop grand bien sur. Je ne refais pas avec eux l'algorithme d'Euclide vu en 3°.
	P42	Déf : comme chaque entier a un nb fini de diviseurs, et qu'il y a toujours au moins 1 comme diviseurs.il ya un diviseur commun qui est le plus grand. Méthodes : -Pour des nbs ''petits » (≤ 30) on fait la liste des diviseurs, on repère le + grand diviseur commun (en entourant tous les diviseurs communs) ex pgcd (15 ; 20) - Pour les nombres plus grands : l'algorithme d'Euclide (ex pgcd (412 ; 288)), décomposition en produit de facteurs premiers.
	P43	Pgcd de deux nombres : le plus grand diviseur commun. Calcul du pgcd à l'aide de l'algorithme d'Euclide Calcul du pgcd à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers.
	P44	Définition plus grand commun diviseur.
	P45	De PGCD en 2d.
	P46	Je dis simplement que le PGCD est le plus grand des diviseurs communs aux 2 nombres concernés. -2 méthodes de détermination : l'algorithme d'Euclide (révision de 3°) et l'utilisation de la décomposition en facteurs premiers. Je passe très peu de temps à cela, et les lèves sont libres d'utiliser la méthode qui leur plait à l'occasion des rares exercices. Dans le cas où il faut simplifier des fractions, j'aime leur faire utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers : on voit bien la méthode $\frac{axb}{axc}$, et on révise les propriétés des puissances : $\frac{2^3x3^2x7x11}{2^2x3^5x13} = \frac{2x7x11}{3^3x13}$
	P47	Le plus grand entier commun dans les listes des diviseurs de chacun des nombres. Méthodes : - recherches des ensembles de diviseurs. - l'algorithme d'Euclide. - - après décomposition en facteurs premiers.
	P48	- Plus grand diviseur commun.

		- Intervention des ensembles des diviseurs. - Méthode des soustractions vues au collège. - Méthode de l'Euclide qui condense le point précédent. - Amorce de terminale S : décomposition en nombre premiers et examen des exposants.
	P49	- Celle donnée par le nom. - Décomposition en pfp, algorithme d'Euclide.
	P50	• A l'aide de l'expression « plus grand diviseur commun » et en explicitant que 1) c'est un diviseur de chaque nombre. 2) il n'y en a pas de « plu grand » • Une seule définition.
	P51	Définition littérale. - On fait la liste de diviseurs, on regarde les éléments communs et on prend le plus grand. - Ecrire les listes. - Algorithme d'Euclide. - Décomposer en nombres premiers (ex : pour simplifier des fractions.)
	P52	- Vue dans les exercices : je ne redonne pas de définition. - décomposition en facteurs premiers.
	P53	N'étant pas au programme, je l'abordais en rappels de 3° dans des DM mais ne faisait pas de cours dessus. Les méthodes utilisées étaient alors au choix de l'élève et les exercices étaient de niveau brevet des collèges.
	P54	Le PGCD de deux nombres entiers est le plus grand diviseur commun de ces entiers. Pour le trouver on utilise : soit l'algorithme d'Euclide ; soit la décomposition des deux nombres en facteurs premiers puis produit des facteurs communs aux deux nombres.

Réponse des enseignants à la question 12

	P	Réponses
P-E	**P1**	Non, la calculatrice vient après pour vérifier.
	P2	Non, je n'ai pas pris le temps de faire cela cette année scolaire. Cela pourrait être intéressant de les faire tester à la calculatrice/ ordinateur la primalité d'un nombre.
	P3	Oui calculatrice pour reste de la division euclidienne, PGCD.
	P4	Oui, il y a l'algorithme pour déterminer si un nb impair est première. (présent dans le manuel Déclic) mais je l'ai très brièvement explicité. En 3ème, les élèves ont l'algorithme d'Euclide (avec un tableur).
	P5	En seconde la calculatrice a été utilisée lors de la représentation graphique des fonctions.
	P6	Juste la recherche du reste pour une division euclidienne.
	P7	En fait, très peu (manque de temps)
	P8	Non.
	P9	Non.
	P10	Non.
P	**P11**	La calculatrice et l'ordinateur ne me semblent pas pertinent en 2d sur cette partie on se débrouille très bien avec le calcul à la main.
	P12	Non.
	P13	PGCD, division euclidienne.
	P14	Parfois (test de primalité) c'est en seconde !
	P15	Non.
	P16	Non, pas spécialement, en dehors des calculs.
	P17	Non, pas spécialement.
	P18	Non.
	P19	Oui, détermination du reste, du quotient de la division euclidienne.
	P20	Non.
Pn	**P21**	Utilisation de la calculatrice pour calculer uniquement
	P22	NON
	P23	un peu mais cela correcpond à une vraiment petite partie du programme. Un temps j'ai fait un atelier mathématique et on travailer sur la division euclidienne , les bases l'utilisation de la calcultrice .. et quand je retrouvais ces élèves en TS Spé maths je sentais une familiarité qui les aider bien !!
	P24	Pas en seconde mais en 1èreL option math et TermS programmation à la calculatrice (Division euclidienne, écriture d'un entier dans une base, algorithme d'Euclide et PGCD….)
	P25	La calculatrice pour les décompositions et la recherche de primalité d'un nombre.
	P26	très peu mais oui : avec l'algorithme d'Euclide
	P27	Non.
	P28	Non. En TS spé . La crypto
	P29	Non, je n'en ai pas vu la nécessité avce le programme actuel.
	P30	En terminale (spé) seulement. Je fais programmer la division euclidienne (qui n'existe pas sur les calculatrices les plus basiques), la décomposition d'un nb en produit de facteurs premiers, l'algorithme d'Euclide, et la détermination de coefficients pour l'égalité de

		Bezout.
	P31	Non. Notre salle informatique etant partage pour 13 classes de seconde qui ont presque tous module en meme temps et est equipé en windows 95 !
	P32	oui sur la calculatrice pgcd, ppcm , diviseurs et test de primalité.
P- APMEP	**P33**	Oui, Excel pour l'algorithme d'Euclide.
	P34	---------
	P35	Rarement en fait (faute de temps)
	P36	Je prévois de faire programmer l'algorithme d'Euclide dans le cadre du nouveau programme de seconde.
	P37	Observer n^3 - n, pour $n \in$ N sur tableur. Sujets d'Epreuve expérimentale en TS.
	P38	Non.
	P39	En seconde : non.
	P40	Pas en seconde.
	P41	Utilisation de la calculatrice pour la méthode de recherche si un nombre est ou non premier, pour les résultats des divisions ; et vérification de la simplification d'une fraction ; d'une racine.
	P42	Oui : division euclidienne (détermination du quotient euclidien et du reste). Décomposition en facteurs premiers. Pgcd.
	P43	Utilisation de la calculatrice pour le calcul du pgcd avec l'algorithme d'Euclide (détermination du quotient et du reste d'une division euclidienne).
	P44	Non.
	P45	Uniquement divisibilité, décomposition en facterurs1ère.
	P46	Non, pas en seconde. Je le fais en TS avec le tableur, fonction MOD pour utiliser les restes.
	P47	Oui en 2d de façon épisodique. En TS utilisation de programmes.
	P48	A la calculatrice essentiellement mais sans utilisation intensive ; je préfère le calcul mental.
	P49	Non.
	P50	----------
	P51	Codage affine (division euclidienne et reste) clé du n° INSEE.
	P52	Algorithmes de recherche de nombres premiers.
	P53	NON
	P54	Éventuellement recherche du PGCD et du PPCM lorsque la calculatrice le permet.

Réponse des enseignants à la deuxième partie du questionnaire

Question 1 :

P-E	P1 Sartre 30 élèves	**1.1 :** a) Méthodes qu'on pourrait rencontrer : * on peut espérer que tous voient que 7 divise M. * bonne méthode mais trop coûteuse : effectuer M et exécuter la division euclidienne de M par 7, 9… * erreur probable : Dire que 9, 63 ne figurent pas dans la décomposition de M Solutions proposées : * Isoler le « diviseur » à tester dans la décomposition de M pour 7 et 9. * Pour 2 et 11 dire que ce sont des nombres premiers et qu'ils ne figurent pas dans la décomposition de M en facteurs premiers. * Pour 63, en écrire la décomposition en produit de facteurs premiers et le reconnaître dans la décomposition de M. b) * méthode correcte mais trop coûteuse : effectuer M et B et exécuter la division euclidienne de M par B… * Reconnaître que 3M=B et donc que M divise B et pas le contraire. Rappel de la définition mais problème du sens de la division encore mal installé chez trop d'élèves. c) * méthode correcte mais trop coûteuse effectuer M et F exécuter la division euclidienne de F par M. * reconnaître que 3*11*M=F et donc que F est un multiple de M. Rappel de la définition mais problème du sens de la division encore mal installé chez trop d'élèves **1.2** : connaissance des règles de calcul sur les exposants. * se convaincre de l'utilité de savoir décomposer des nombres en produit de facteurs premiers pour travail sur des écritures simplifiées.
	P2 Aux laza 30 élèves	**1.1 :** Difficulté : les puissances, des difficultés à voir que M est divisible par 9, 11 ou 63. Remède : écrire M, B et F comme des produits des nombres à la puissance 1. Remarque : la multiplication est commutative et associative. **2.1 :** oui, pour donner du sens aux nombres du type 3^2 et donc insister sur les calculs avec des puissances, mais surtout pour les aider à reconnaitre un diviseur et un multiple d'un nombre présenté sous la forme d'un produit des nombres premiers à une puissance.
	P3 (Du parc) 29 élèves	**1.1 :a)** M est divisible par 7 car $M = 7\,q$ ($q \in N$) $q = 3^2 \times 5^3$ par 9 $M = 63 \times (3 \times 5^3)$ par 63 M n'est pas divisible par 2 car 2 n'apparait pas ds la décomposition Par 11 **2.1 :** oui, utilise la définition.

	P4 (albert camus) 21 élèves	**1.1 :** la premiers reflex des élèves ne être de vouloir se servir de leur calculatrice. De plus, les puissances posent encore problèmes à beaucoup aussi je pense qu'il faudra écrire $M = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$ au tableau pour les plus faisables. Une fois cette difficulté surmontée, il reste la confusion entre diviseurs et multiples (cf Partie I.9). donc ce cas, je leur expose de nouveau l'exemple de $21 = 3 \times 7$ pour réactiver les définitions. Je ne sers du même exemple pour leur permettre de mieux les mémoriser. **2.1 :** j'ai utilisé ce type d'exercice mais pour déterminer le pgcd. En revanche, il serait peut être intéressant de donner la valeur de l'entier naturel M (et de B et de F) et de demander la résolution de ces questions sans calculatrice pour que les élèves ressentent le besoin d'utiliser la décomposition en facteurs premiers.
	P5 (Al –kindi) 17 élèves	**1.1 : a:** On peut vérifier si l'on peut retrouver 7,9,2,11 et 63 dans la décomposition des multiples de M. Ici on remarque que 3x3=9 donc 9 est un diviseur de M 7 est aussi un diviseur de M 3x3x7=63 donc 63 est un diviseur de M M n'est pas divisible par 2 car il n'est pas composé de multiples paires. M n'est pas divisible par 11 car 11 n'est pas dans ses multiples. Idem pour B) et C). ***2.1*** **:** Oui ce type d'exercices serait à proposer en seconde dans le cadre d'une remise à niveau en début d'année et d'une révision des principales règles de calculs ou éventuellement pour faciliter les simplifications des fractions et la mise sous la forme de fractions irréductibles.
	P6 (Al –kindi) 16 élèves	**1.1 :** M est divisible par a si M est un multiple de a c'est-à-dire $M = b \times a$; $b \in N$, $a \in N$ B est un diviseur de M parce qu'ils ont les mêmes décompositions il faut que pour tout nombres premiers. La puissance du nombre dans l'écriture de B est plus petite que la puissance du nombre dans l'écriture de M. Comme pour la puissance de 5 , $3 > 2$ donc B n'est pas diviseur de M. Dans F tous les nombres premiers qui interviennent dans la décomposition de M interviennent dans la décomposition de F. De plus les puissances de ces nombres dans l'écriture de F sont supérieures ou égaux puissances des nombres dans la décomposition de M donc F est un multiple de M. **2.1 :** non je n'ai pas proposé cela à mes élèves.
	P7 (Mauriac) 8élèves	Je pense que les solutions vont s'appuyer sur la définition du diviseur et du multiple. Non, je reviens peu sur la notion de multiple et de diviseur. C'est un travail que je faisais au collège en $3^{ème}$.
	P8 (Brel) 7 élèves	**1.1 :** d'abord, ils utilisaient la calculatrice. Si on leur interdit : ils trouvaient lorsque le nombre divise, mais ne sauvaient pas pour les autres. – aide avec décomposition en nombres premiers. **2.1 :** Pourquoi pas mais plus simples (a), ou avec des nombres plus grands pour étudier directement la calculatrice. Objectif : unicité de la <u>décomposition en facteurs premiers</u>, intérêt de cette décomposition.
	P9 (Brel) 6 élèves	**1.1 :** décomposition en facteurs premiers $M = (3^2 \times 5^2) \times 7$ a) trouver A tel que $M = A \times 7$,……. $M = (5^2 \times 7) \times 3^2$ C …. $M = C \times 9$ $M = (3^2 \times 7) \times 5^2$

		b) Peut –on trouver D tel que M = D × B ? c) Peut –on trouver E tel que F = E × M ? **2.1 :** oui. Travailler sur décomposition en facteurs premiers, sur des problèmes.
	P10 (Sembat) 4élèves	**1.1 :------------------** **2.1 :----------------**
P	P11	1.1 : ils sont des exercices faciles d'application de résultats qui sont au programme de TS spé math **2.1 :** non.
	P12	**1.1 :** Multiplication de tous les termes puis division pour voir si le résultat est entier. - Regarder si le diviseur apparait dans la décomposition. - Pour b) et c) risque d'erreur en considérant que comme certains termes sont dans la décomposition, B et F sont des diviseurs (erreurs plus grand avec B) **2.1 :** Pas tout à fait : simplification de fraction Exemple : simplifier $\frac{3^2 x 5^2 x 7}{3^3 x 5^2 x 7 x 11}$
	P13	**1.1 :** il faudrait qu'ils aient compris la forme (sous forme de produit de nombres premiers affectés d'exposants) des diviseurs de M des multiples de M. **2.1 :** oui par ex : « Par quoi multiplier A pour que A soit 1 carrée parfait ? ……….cube parfait ?
	P14	**1.1 :** pourquoi pas dresser la liste de tous les diviseurs (arbre – treillis) **1.2** : oui : faire comprendre la notion de diviseurs. Lister l'ensemble des diviseurs d'un nombre (cas « raisonnable »).
	P15	**1.1 :** ils pourraient calculer M et faire la division avec la calculatrice. Conclusion : M = 7 × *225* dons M est divisible par 7, (Idem pour le reste) (dans la division euclidienne de M par 7, le reste est zéro) **2.1 :** non.
	P16	**1.1 :** solutions mises en ouvre : calcul numérise pour la plupart. Utilisation de la décomposition pour un petit nombre. **2.1 :-------**
	P17	**1.1 :***a)* M est divisible par 7 car M s'écrit M = 7 × $(3^2 \times 5^2)$ *b)* B = 5 ×7 donc M est un diviseur de B. B est un multiple de M. *c)* F = 3 × 11 × M donc F est un multiple de M. **2.1 :** oui, objectifs : travail sur la décomposition en facteurs premiers, sur les puissances**.**
	P18	**1.1 :** *a)Méthodes :* calculatrice, test ou comparaison des nombres avec les produits possibles dans la décomposition. M est divisible par 7 car 7 apparaîssent dans la décomposition de M 9 car 9 = 3² et 3² apparait dans la décomposition de M. 63 car 3 × 7 = 63, 2 et 11 ne divisent pas M car ils sont premiers et n'apparaissent pas dans la décomposition. b) et c) utilisation de la calculatrice (division pour voir si on obtient un nombre entier) ou comparaison des exposants. 2 et 11 ne divisent pas M car ils sont premiers et n'apparaissent pas dans la décomposition. B n'est pas un diviseur de M car dans la décomposition en facteurs premiers 5 apparait à la puissance 3 pour B et 2 pour M donc 5^3 divise B mais pas M donc B

		ne peut pas diviser M. c) F est un multiple de M car F = M ×11 **2.1 :** oui : l'an dernier mais pas cette année (je n'ai pas eu le temps)
	P19	**1.1 :** *a)* M = 63 × 25 donc M divisible par 63. *b)* B = 5M B est un multiple de M, B n'est pas un diviseur de M. *c)* F = 33 M F est un multiple de M. **2.1 :** Non.
	P20	**1.1 :** *a)* M = 3² × 7 × (5²) = 63 × 25 donc M divisible par 63. *b)* B = (3² × 5² × 7) × 5 = 5M B n'est pas un diviseur de M. *c)* F =(3² × 5² × 7) × 3 × 11 = 33 M donc F est multiple de M. **2.1 :** Non.
P n	P21	**1.1 :** Les bons élèves utiliseront la décomposition de M pour répondre aux questions mais ceux qui n'ont pas compris cela calculeront Tous les nombres avec la calculatrice et feront des vérifications. Si l'exercice a pour objectif de vérifier la compréhension de la décomposition en produit de facteurs premiers et son utilisation, il faudrait interdire la calculatrice et préciser au départ de répondre aux questions sans faire de calcul. Correction que je proposerais : a) 7 est un diviseur de M car M= $7\times(3^2\times5^2)$ 9 est un diviseur de M car M= $9\times(5^2\times7)$ 63 est un diviseur de M car M= 63×5^2 2 et 11 sont des nombres premiers et ils ne sont pas dans la décomposition de M donc non diviseurs. **1.2 :** Oui pour leur faire comprendre la notion de décomposition en produit de facteurs premiers sur des grands nombres sinon ils n'en voient pas l'utilité.
	P22	1.1 : a) 7 figure dans la décomposition ; 9=3² ; donc diviseurs ; 2 et 11 premiers ne figurent pas ds la déc. ; 63=3²*7 donc diviseur a) 5M=B donc M est diviseur de B mais B n'est pas diviseur de M b) 3*11*M=F donc F est un multiple se M 1.2 : Non car ce n'est pas réellement au programme et qu'on a peu le temps d'approfondir l'arithmétique (programme bancal plus léger qu'au collège peu réinvesti après sauf en spécialité en TS
	P23	revenir sur la ntion de diviseurs et de multiple et décomposition en facteurs premiers oui, décomposition en facteurs premiers, diviseurs,et travail sur les exposants
	P24	Exercice peut conforme à l'actuel programme de seconde, à intégrer dans le cadre de simplification d'écriture d'un rationnel 1.2 : Non
	P25	En écrivant M = 3×*3×5×5×7*, question *a*) est peut on fabriquer l'un de ces nombres à l'aide de certains des 5 facteurs de M ?pour le b), le diviseur doit être plus petit ou égal à M et pour le c), le multiple doit contenir les 5 facteurs de M. J'ai proposé l'exercice à mes élèves hier et j'ai eu les réponses et erreurs attendues. 1.2 : Oui, pour visualiser diviseurs et multiples à partir de la décomposition.
	P26	a) 7 oui car il y a 7 dans le nombre 9 oui car 3^2= 9 2 non car 3 , 5 et 7 sont impairs 11 non car M n'a pas ce nombre premier dans sa décomposition 63 oui car 63 = 3^2×*7* b) non car B est plus grand que A

		c) oui car F= 33×*B* et bien sûr d'autres solutions sont possibles….. 1.2 : Oui pourquoi pas, exercice qui a pour but de faire revoir décomposition en produit de facteurs premiers, exposants, diviseurs et multiples
	P27	Je crois que dans un premier temps, la grande majorité des élèves essaiera de calculer les 3 nombres et d'effectuer les divisions. Sils n'ont pas la calculatrice, ce qui est souhaitable ici (au moins au départ), peut-être alors que certains compareront les facteurs premiers et leurs multiplicités. Le pb, c'est que la transitivité de la divisibilité n'est pas dans mon cours (en fait, j'utilise la notion de divisibilité sans la définir). Pour la correction : a) immédiat c) et c) par l'absurde : si B divise M, comme 5^3 divise B, alors 5^3 divise M ce qui est contradictoire avec l'unicité de la décomposition en facteurs premiers de M. 1.1 : Non
	P28	Bcp d'élèves calculent tout et divise après. D'où l'intersection de la calculette a) on met le nombre souhaité en facteur si c'est possible b) idem c) idem En gros je me borne à la définition: a divise b si il existe c dans N tel que b=ac Et j'évite de faire le moindre calcul oui pour réviser les formules sur les puissances. Et ce sera la cata car ils ne les connaissent pas
	P29	a) Je pense que leur premier réflexe serait d'utiliser la calculatrice, de calculer M puis de tester la divisibilité. Je leur proposerais d'utiliser la décomposition des diviseurs potentiels pour voir si « elle rentre dans celle de M ». b) Même chose que pour la question a) si on les laisse faire seuls Je corrigerais la question a) avant de faire la question b), pour qu'ils réinvestisse la méthode. idem. Oui parce que c'est un des moyens de donner du sens à la décomposition en produit de facteurs premiers.
	P30	a) M= $(3^2 \times 5^3)$x 7 = 9 x $(5^2 \times 7) = 63\times 5^2$, donc M est divisible par 7, par 9, et par 63. Il n'est divisible ni par 2 ni par 11 puisque ni 2 ni 11 n'apparaissent dans sa décomposition en produit de facteurs premiers. b) B=5*M, donc B est multiple de M. Il ne peut être diviseur de M puisqu'il est plus grand que M. c) F = 33*M, donc F est un multiple de M. Les notions utilisées sont l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, et les notions de multiple et de diviseur. Pourquoi pas ? l'objectif est d'apprendre à lire une décomposition en facteurs premiers de façon à savoir les comparer.
		Difficile de repondre car cela depend beaucoup des questions des élèves ... mais en préparation voici ce que je ferais

	P31	a) M= 7 × *225* *(225 est un nombre entier)* Oralement : 7 est premier et fait parti de la décomposition en nombre premier de M donc M est divisible par 7 B=5M donc B est strictement superieur à M donc B ne peut pas etre un diviseur de M Oralement : comme les diviseurs sont des nombres entiers superieur ou égaux à 1, ils sont forcement inférieurs ou egaux au nombre. c) F=33M 33 est un nombre entier donc F est un multiple de M oui importance des conditions sur la formule de reconnaissance (pas de négatif, pas de virgule ni de fractions) Revision du calcul de bases et table, decomposition en nombre premier -dans le meme exercice je mélange les décompositions données comme celle la et d'autres à faire)
	P32	a) M = 7 × A avec A = *$3^2 \times 5^2$ appartenant à $\mathbb{N}$ donc M est divisible par 7 idem pour 9.* 11 et 63 n'apparaissent pas dans la décomposition en produit de facteurs premiers donc M n'est pas divisible par 11 ni 63 b) B = 5 ×M multiple de M pas diviseur. c) F = 3×11×M = 33M avec 33 entier naturel donc F est multiple de M Oui, s'approprier les notions de multiples et diviseurs.
P-APMEP	P33	**1.1 :** teste de divisibilité avec les critères rencontrés au collège. **1.2 :** oui dégager la notion de PPCM.
	P34	**1.1 :** travail à la calculatrice ou travail sur la décomposition. 1.2 : oui, montrer l'utilisation de la décomposition en facteurs premiers.
	P35	1.1 **:** comparaison de puissance a) 2 et 11 ne fait pas partie de la décomposition 63 = 3^2 7 donc M = $5^2 \times 63$ b) B) un facteur 5 en trop. c) K = $(3^2\times 5^2 \times 7) \times 3 \times 11$ 1.2 : un peu (l'an dernier)
	P36	**1.1 :** faire apparaitre la règle M est divisible par B. les facteurs premiers de B sont inclus dans ceux de M et avec des exposants plus petits via une factorisation sur des exemples. 1.2 : oui, mais en commençant avec des exercices plus simples. Objectifs : réinvestir les puissances ; simplification les fractions, les calculs avec les fractions.
	P37	**1.1 :** En TS, utiliser la définition m = k d avec $k \in Z$ 1.2 : non, pour le a) et b), oui pour le c)
	P38	**1.1 :** comparaison des exposants. Calcul de la division. 1.2 : oui pour donner des différentes méthodes ;
	P39	**1.1 : a)** M = **7**×($3^2 \times 5^2$) = 7 × 9 × 25 = 7 × 225 donc M est divisible par 7. **M = 9** × (7 × 75) donc M est divisible par 9. M = (9 × 7) × 25 = 63 × 25 donc M est divisible par 63 2 et 11 sont premiers et ne figurent pas dans la décomposition en facteurs premiers de M il n'est pas divisible par 2 et 11. b) B = 5 × M B > M B n'est pas donc diviseur de M c) F = 3 × 11 × M donc F est multiple de M. 1.2 : non pas beaucoup (ce sont des subtilités sur la définition de diviseurs)
	P40	**1.1 :** en seconde, les élèves n'ont pas à connaitre l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. Il me semble difficile de travailler sans poser l'opération. « 11 diviseur de M »

		Pour 7, 9, 2, 69 je fais apparaitre par exemple M = 9 × 5² ×7 pour pouvoir conclure. Idem pour M diviseur de F. 1.2 : uniquement pour faire fonctionner, à partir de la définition, les notions de multiples et diviseurs.
	P41	**1.1 :** ils calculaient à l'heur actuel (2009) sur leur machine et faisait leur division ordinaire pour conclure, et avant 2009 pareil ! 1.2 : oui avant, pour essayer de voir leur réaction, mais ça ne marche pas. La connaissance de nombres premiers très grands ne les intrigue pas. Il n'y qu' moi que ça fait plaisir !
	P42	**1.1 :** a) Est : 1 possible de mettre 7, 9, 2, 11, 63 eu facteurs dans M b) et c) même type de méthode. Peut-on écrire F = k × M avec k entier. 1.2 : oui. Objectif : comprendre et utiliser « diviseur » et « multiple »
	P43	**1.1 :** a) M = **7**× (3² × 5²) donc 7 divise M. b) B n'est pas un multiple de M car 5^3 *ne figure pas dans la décomposition de M.* *c) F* = 3² ×3 ×5² × 7 × 11 = (3² ×5² × 7) × 3 × 11 = donc F est multiple de M. **1.2** : comprendre l'intérêt de la décomposition en produit de facteurs premiers.
	P44	**1.1 :** a) M = () = 9() = 63 () d'où résultats b) b = 5M c) F = 3M **1.2** : voir les spécialités de chaque nombre.
	P45	**1.1 :** écrire M sous la forme M = 7 × M = 9 × Evoque la décomposition en facteurs premiers. 1.2 : non. Trop « gratuit »
	P46	**1.1** : ils peuvent écrire M = 63 × 5² pour montrer que M est divisible par 63. Je vois moins besoin comment ils expliquent que M n'est pas divisible par 2 et 7. même difficulté pour B diviseur de M. Par contre, F = 3 × 11 × M est facile pour b c **1.2** : non, on n' pas le temps (on ne l'avait pas)
	P47	**1.1 :** dans un tel exercice il faut leur faire utiliser la méthode basée sur la décomposition et la recherche de diviseurs. 1.2 : éventuellement ; Pour mettre en actions « la décomposition et ses applications.
	P48	**1.1 :** la « seule ici » semble celle de l'examen des exposants. 1.2 : oui un peu mais sans plus : l'idée est de déclencher des réflexs (en vue de TS) à la vue des exposants.
	P49	**1.1 :** a) Effectuer et vérifier Factoriser ex : M = 9 × (5² ×7) Effectuer Utiliser un résultat du cours. **1.2** : oui
	P50	**1.1 :** certains élèves peuvent proposer : 7| M car 7 est un facteur de dec … de M. d'autres utilisent leur calculatrice. Fonction proposée : car niveau à la classe assez faible. a) M = 3² × (5² ×7) = 9 ×(5² ×7) avec 5² × 7∈ N donc 9 divise M. Idem pour 7 ; M = 3² ×7× 5² = 67 × 25 avec 25 ∈ N d'où 63 divise M. 2 et 11 sont premiers et n'apparaissent pas dans la décomposition en produit de nombres premiers d'où 2 et 11 ne divisent pas M. (notation non utilisés) B ×M car l'exposant de 5 dans la dec de B est supérieur strict à celle de 5 ds des déc de M.

		c) F multiple de M, car F = $(3^2 \times 5 \times 7) \times 3 \times 11 = 33$ M avec $33 \in$ N **2.1** : il m'est arrivé de le proposer mais les élèves rencontrent des difficultés dans un but de précision et de bonne formulation.
	P51	**1.1 :** 7, $9 = 3^2$ sont des diviseurs évidents. 2 et 11 sont des nombres premiers qui ne figurent pas tous la décomposition, donc ne divisent pas M. M = $3^2 \times 7 \times 5^2 = 63 \times 5^2$ donc 63 divise M. B = M × 5 donc B est un multiple de M, pas un diviseur. F = 3 × 11 × M donc F est un multiple de B. **2.1** : oui, pour l'usage des mots diviseurs et multiples pour simplifier des fractions ou factoriser.
	P52	**1.1** : a) pour 7 et 9 : mise en facteur 2 et 11 ne sont pas dans le DFP 63 = 7 × 9 b) B = 5× M donc impossible c) F= 3 ×11 M donc c'est un multiple de M. **1.2** : non
	P53	**1.1 :** Certains calculeraient M, B et F afin de répondre. D'autres pourraient écrire la fraction, puis simplifieraient afin de voir si le résultat est un entier naturel. On pourrait également remarquer que B>M donc ne peut être un diviseur ou encore que B = M*5, F = 3*11*M pour répondre. Je pense que je proposerais la factorisation comme par ex : M = $(3^2 * 5^2) * 7$ et $3^2 * 5^2$ est entier naturel donc 7 divise M … 1.2 : Non
	P54	a) On cherche à écrire une factorisation de M en utilisant 7, 9, 2, 11, 63 b) On cherche à écrire une factorisation de M en utilisant B c) On cherche à écrire une factorisation de F en utilisant M Oui. Faire la distinction entre diviseur et multiple. Préparer la « spécialité math » en terminale S.

Question 2 :

P-E	P1 (Sartre) 30 élèves	1. Correction proposée : Faire écrire des multiples de A et montrer que le plus petit c'est A alors un multiple commun à A et B ne peut pas être plus petit que A. Puis faire « compléter » A pour que le multiple de A proposé soit « suffisant » pour B et faire émerger une « démarche » automatique pour que le multiple proposé soit le plus petit possible , même si la question posée n'imposait pas cette contrainte. En montrer ensuite l'intérêt sur une somme de deux nombres écrits sous forme de fraction d'entiers. 2. connaissance des règles de calcul sur les exposants. * savoir trouver des multiples communs pour additionner deux fractions
	P2 (Aux laza) 30 élèves	Solution : M = $2^2\times3\times5^2\times7\times11 \times 3^3 \times 5^4 \times7\times11$ Remarque/ correction : oui, M est multiple, mais est ce 2d vous pouvez trouver un multiple plus petit ? Méthode ; il suffit de prendre une seule fois les nombres qui apparaissent dans les deux décompositions. Si des nombres apparaissent à des puissances diff dans les deux décompositions, on prendre le nombre à la plus grand des puissances ; 2. oui, pour aider dans le calcul avec des fractions. Même en classe seconde, des élèves sont maladroits dans leur recherche d'un dénominateur commun pour deux fractions.
	P3 (Du parc) 29 élèves	A × C un multiple commun 2. non., le ppcm n'est pas au programme.
	P4 (Albert Camus) 21 élèves	Ils vont prendre le produit A ×C (sans penser à chercher un plus petit) ou 2 × A ×C etc. Il faudra insister : comment déterminer le plus petit ? En revanche, on pourrait peut être là-énonce donner A et S sous forme d'entiers naturels, laisser chercher les élèves : trouver des multiples puis considérer toutes la décomposition en facteurs premiers pour leur faire trouver la propriété. Néanmoins, il faudrait peut être pour cela des A et C plus simples. 2. je ne l'ai pas fait je le trouve intéressant. J'ai utilisé le multiple commun pour simplifier une expression comportant des fractions. Remarque : le manuel Déclic propose une disposition pratique pour obtenir la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel : ex ; 168 = $2^3 \times3 \times 7$ 168 | 2 84 | 2 42 | 2 21 | 3 7 | 7 1 cette façon de présenter est plus simple que d'écrire 168 = 2 ×*84 = 2 ×2×42 = 2×2 ×2 × 3×7.* et les élèves les plus en difficulté ainsi à obtenir la bonne décomposition.

	P5 Al-kindi 17 élèves	Il serait intéressant de décomposer A et C comme suit : A = 2x2x3x5x5x7 B = 3x3x3x5x5x5x5x7x11 Donc les multiples communs de A et C sont 3, 5, 6, 7, 15, 21, 25, 35, 105, 175, 525. Oui ce type d'exercices serait à proposer en seconde dans le cadre d'une remise à niveau en début d'année et d'une révision des principales règles de calculs ou éventuellement pour faciliter les simplifications des fractions et la mise sous la forme de fractions irréductibles.
	P6 Al-kindi 16 élèves	Multiple commun PPCM =: $2^2\times 3^3 \times 5^4 \times 7\times 11$ Non je n'ai pas proposé ces exercices à mes élèves.
	P7 Mauriac 8 élèves	A cette question, on a envie de répondre que A×C est un multiple commun de ces deux nombres. Il aurait fallu leur demander le plus petit multiple commun qu'ils peuvent trouver. C'est un exercice qui leur pose souvent problème. Certains comprennent rapidement, et d'autres ne comprennent toujours pas après de nombreuses explications ! 2. Ce type d'exercices me semble intéressant lorsqu'on veut trouver le plus petit dénominateur commun pour additionner des fractions. Je ne propose pas vraiment des exercices sans un objectif donné.
	P8 (Brel) 7élèves	Calculatrice Sans : soit produit des deux, soit par tâtonnement (A ×11) 2. pourquoi pas, pour établir la méthode qui permet de trouver le ppcm de 2 nombres décomposé en produit de fact premiers (au pgcd), même remarque sur grands nombres pour bloquer l'usage de la calculatrice.
	P9 (Brel) 6 élèves	------------------
	P10 Sembat 4 élèves	-------------------
	P11	A × C un multiple commun Correction bon. 2. non.
	P12	Fors programme On ne demande pas le ppcm, les élèves auront tendance à multiplier les deux nombres. 2. non, hors programme.
P	P13	Un peu possible à ce que j'ai écris en 1. Leur explique le but : pour moi la recherche du dénominateur commun de 2 fractions d'entiers donc décomposer en facteurs premier chaque dénominateur. 2. voir1 et la recherche de PPCM pour additionner des fractions car ils auront la même nombre quand le dénominateur seront (x- 5) , (x+5) , (x² - 25) par exp.
	P14	1. ce n'est pas précisément au programme de seconde. Mais pourquoi ne pas donner le mode de calcul à l'aide de la décomposition en facteurs premiers. 2. quelque uns.
	P15	1. ils pourraient proposer le produit A × C Eventuellement calculer le ppcm parmi les multiples de A : 3A, 9A etc.

		2. non
	P16	1. produit de A et C. Demande du plus petit possible. Utilisation de la décomposition, manipulation de la notion (puissance) 2. oui, objectif : écriture et manipulation de puissances associées au produit.
	P17	1. A= $(3 \times 5^2 \times 7) \times (2^2)$; $C= (3 \times 5^2 \times 7) \times (3^2 \times 5^2 \times 11)$ *$(3 \times 5^2 \times 7)$ est un multiple de A et C.* 2. oui, mêmes objectifs que précédemment.
	P18	1. 2 solutions : multiplier les deux nombres. Repérer les facteurs premiers et leur exposant dans la décomposition puis prendre le nombre dont la décomposition comprend tous les facteurs premiers avec le plus grand exposant (pour chaque nombre premier) ou facteurs premiers »en ajoutant l'exposant, ce qui revient à la première méthode Correction proposée : les 2 méthodes en remarquant que multiplier les 2 nombres revient à prendre tous les facteurs premiers » en additionnant les exposants. 2. oui, l'an dernier mais pas cette année (je n'ai pas eu le temps)
	P19	1. la solution la plus $2^2 \times 3^4 \times 5^6 \times 7 \times 11$ 2. non
	P20	1. M= $2^2 \times 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$ *ou* $M' = 2^2 \times 3^4 \times 5^6 \times 7^2 \times 11$ 2. non
Pn	P21	1. Pour la correction, je leur dis qu'on prend le produit de tous les facteurs qui interviennent dans les deux décompositions avec l'exposant le plus élevé. PPCM (A, C) = $2^2 \times 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$ car PPCM (A, C) = A $\times 3^2 \times 5^2 \times 11$et PPCM(A, C) =C $\times 2^2$ 2. Peu car la notion de PPCM ainsi présentée n'est pas au programme, je leur montre l'utilité pour mettre des fractions au même dénominateur avec des nombres « grands ».
	P22	Le produit AC est un multiple commun aux 2 nombres. NON voir plus haut **(**Non car ce n'est pas réellement au programme et qu'on a peu le temps d'approfondir l'arithmétique (programme bancal plus léger qu'au collège peu réinvesti après sauf en spécialité en TS).
	P23	A la limite du programme, uniquement en classe et guidé par moi **-------------**
	P24	La recherche des multiples d'un entier et du PPCM n'est pas au programme NON
	P25	J'ai aussi posé cet exercice et beaucoup ont confondu avec diviseur commun et ont donc donné comme réponse le pgcd. Après avoir repris l'exercice 1) c) , ils ont trouvé la bonne réponse . J'avais plutôt posé la recherche du pgcd. Pour le ppcm, je pars d'un exercice de réduction de fraction au même dénominateur et je ne m'appesantis pas plus car c'est une notion peu utile.
	P26	Un multiple commun serait : B = $2^2 \times 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$ Bien sûr d'autres solutions sont possibles… Non car fait appel au PPCM mais intéressant pour la recherche de multiples. Encore une fois exercice un peu trop intuitif qui n'apprend pas grand-chose.
Pn	P27	Je traite ce genre d'exercice en cours, mais en demandant le ppcm. La plupart des élèves proposeront A*B. Certains proposeront peut-être le ppcm en retenant tous les facteurs premiers,

		avec l'exposant le plus élevé de chacune des deux décompositions. Oui, l'objectif est d'utiliser la décomposition et de montrer qu'elle peut servir à simplifier les calculs dans les opérations sur les fractions notamment.
	P28	1. Toujours la même méthode, il faut que les deux soient en facteur 2. idem
	P29	Sans explications, les élèves calculent les deux nombres et appliquent un des algorithmes vus en 3e. Après explications, on cherche « la plus grande partie commune dans les décompositions ». 2. Oui, parce que c'est une des premières utilisations de cette décomposition.
	P30	Donner un multiple commun a peu d'intérêt. Le produit des deux nombres est une bonne réponse qui évite tout examen des décompositions. Demander le PPCM est plus intéressant ! Je propose plutôt du travail sur des fractions pour motiver les décompositions et les calculs de ppcm (somme) ou de pgcd (simplification).
	P31	Oralement : on cherche les nombres premiers diviseurs communs avec leur puissance et on garde la plus petite afin de décomposer en deux 'morceaux' : le pgcd et un nombre entier $A = 3\times 5^2 \times 7 \quad \times \quad 2^2$ et $C = 3^2 \times 5^2 \times 7 \quad \times \quad 11$ 4 et 11 sont des nombres entiers premiers entre eux donc le pgcd est $3^2\ 5^2\ 7=1575$ Ils auront tendance prendre la calculatrice, calculer A et C puis appliquer l'algorithme d'Euclide ... 2. manipulation des puissances, compréhension de l'écriture en nombre premier, calcul
	P32	Ils pourraient calculer A*C, je proposerais le calcul du ppcm en faisant le produit de tous les facteurs premiers intervenant dans les deux décompositions affectés du plus grand exposant. -------------------
P- APMEP	P33	Non, je ne le pense.
	P34	A ×C est un multiple commun. *2. oui, mais en précisant que b + petit m'intéresse.*
	P35	1. compléter A pour intégrer les facteurs premiers de C en nombres suffisent. 2. oui, maitrise des calculs, des opérations et de l'idée de décomposer en facteurs premiers.
	P36	1. même principe (question 1). 2. oui, idem.
	P37	Suite au 1.C Oui.
	P38	A × C ils ne voient pas que même si c'est la réponse la plus simple, elle peut mener à de gros calculs. 2. avec le même objectif ci-dessus.
	P39	1. $M = 2^2\times 3^3 \times 5^4 \times 7\times 11$ est un multiple comm un à A et C Puisque $M = (3^2\times 5^2\times 11) \times A$ *et* $M = 2^2 \times C$ 2. oui éventuellement par manipuler les décompositions.
	P40	1. il me semble possible pour un élève de 2d de bâtir intuitivement un multiple commun. Il leur suffit de prendre, et je crois qu'ils y penseraient, le produit des 2 nombres. Le professeur pourrait éventuellement, mais sans théoriser, leur faire deviner la fabrication du PPCM, et je pense que c'est ce

		que je ferais.
	P41	Pour une seconde générale et technologique, c'est bien sur ennuyeux cette méconnaissance des nombres entiers qui va entrainer l'incompréhension des codages, des clés…, (qui sont des problèmes pratiques) mais aussi une autre forme de raisonnement qui n'implique pas la géométrie affine, vectorielle analytique, les statiques, les probabilités, l'analyse, l'algèbre.
	P42	Dans un premier temps : faire comprendre qu'A x C est une solution puis ; essayer de trouver un multiple commun plus petit, en expliquant que ce multiple doit comporter les facteurs de A, et tous ceux de C. 2. oui.
	P43	K = $2^2 \times 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$ est un multiple commun Car K = A × $3^2 \times 5^2 \times 11$ *et* $K = C \times 2^2$ 2. non.
	P44	1. AC, et introduire PPCM 2. un peu (temps).
	P45	1. je pense qu'ils me donneront A×*C* 2. non
	P46	1. je propose parfois ce genre de choses pour qu'ils calculent le plus petit multiple possible. Les élèves ne voient pas. je leur explique qu'il faut prendre tous les facteurs qui sont dans A et tous ceux qui sont dans B et mettre un exposant au moins égal à celui de A et à celui de b. 2. une seule fois.. sans trop y croire, parce que les élèves voient une utilisation de la décomposition en facteurs premiers.
	P47	Ils ont la règle. Donc ils écrivent par exemple M = $2^2 \times 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$ ou avec des exposants plus grands où k $\in$ N 2. oui pour faire agir avec la décomposition.
	P48	1. même clase : regarde les exposants, prendre les facteurs premiers communs avec le plus faible exposant. 2. même remarque que ci-dessus mais je répète qu'en seconde c'est en faire un survol rapide que l'an fait en seconde.
	P49	Bricoler, imaginer, utiliser la d. p. f. p d'un diviseur Oui, faire réfléchir les élèves.
	P50	1. utiliser la calculette. Mé o semblable au corrigé. Corrigé : M multiple commun à A et C, des dès que tous les facteurs qui interviennent dans déc de A et déc de C interviennent ds déc M et avec exposant ≥ sup (exp A; exp C) (formalise en français) (parle aussi de réunion des facteurs premiers de A et C). Exp : M = $2^3 \times 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$ *remarque ppcm (A, C) convient* 2. je leur demande plutôt ppcm.
	P51	A= $(3 \times 5^2 \times 7) \times 2^2$; $B = (3 \times 5^2 \times 7) \times 3^2 \times 5^2 \times 11$ $M = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11 \times (3 \times 5^2 \times 7)$ $= 2^2 \times 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$ 2. oui recherche de dénominateurs communs, travail sur les puissances.
	P52	A × C le plus facile en correction parler du PPCM. 2. non : je ne pense pas beaucoup de temps sur ce chapitre.
	P53	1. Ils pourraient écrire A*C mais je ne pense pas qu'ils penseraient au PPCM On prend les facteurs présents dans les deux décompositions et on leur affecte le plus grand exposant, on obtient ainsi le PPCM, et alors tout multiple de ce PPCM est un multiple des ces deux nombres

		2. NON
	P54	1. La méthode proposée aux élèves : rechercher tous les facteurs différents avec leurs plus grands exposants dans les deux décompositions puis les multiplier. 2. Oui à l'occasion car le PPCM ne fait pas partie du programme. Pour la résolution de quelques problèmes pratiques (par exemple bus partant en même temps du dépôt sur des lignes différentes. Quand reviendront-ils à nouveau ensemble au dépôt connaissant la durée de chaque circuit ?)

Réponse des enseignants à la troisième partie du questionnaire des enseignants

Q 1. L'arithmétique disparaît des programmes de seconde à la rentrée de l'année scolaire 2009 : qu'est ce que vous pensez de ce changement (les raisons et/ou les conséquences et/ou tout autre commentaire) ?

P-E	P1 (Sartre) 30 élèves	L'idée que le calcul instrumenté prend la place du calcul à la main est maintenant dominante. (pas forcèment chez les professeurs du secondaire…) Même le calcul mental, semble n'avoir d'intérêt que pour établir un ordre de grandeur. Cela me semble être une erreur car les élèves n'ont plus les automatismes et la culture des nombres. (par exemple les décompositions de 72, 63, 56 sont mal connues).
	P2	-----------------------
	P3	-----------------------
	P4	-----------------------
	P5	-----------------------
	P6	-----------------------
	P7	Le problème de la classe de seconde est que nous nous adressons à des élèves de niveaux très différents. La plupart des élèves ne comprennent pas la différence entre un nombre non décimal et un irrationnel. L'arithmétique de seconde était souvent conçu comme un paragraphe dans le chapitre sur les ensembles de nombres. La notion de nombre premier y était abordée mais n'était pas vraiment réutilisée par la suite.
	P8	-----------------------
	P9	-----------------------
	P10	-----------------------
P	P11	-----------------------
	P12	-----------------------
	P13	-----------------------
	P14	-----------------------
	P15	-----------------------
	P16	-----------------------
	P17	-----------------------
	P18	-----------------------
	P19	-----------------------
	P20	-----------------------
P n	P21	-----------------------
	P22	-----------------------
	P23	Il sera encore plus dur de leur faire faire de l'arithmétique en TS spé !!! mais on ne connait pas les programmes des terminales !! **contre**
	P24	------------------------
	P25	-----------------------
	P26	-----------------------
	P27	Le principal inconvénient de l'ancien programme de seconde est sa grande diversité. Il y avait beaucoup de sujets différents à traiter. De ce point de vue, le nouveau programme est un progrès.

		D'un autre côté, le chapitre d'arithmétique de l'ancien programme était assez facile à traiter avec les élèves. De plus, il donnait l'occasion de traiter des algorithmes simples : primalité d'un nombre, algorithme d'Euclide… Or le nouveau programme intègre une partie algorithmique. Donc la disparition de l'arithmétique parait paradoxale.
	P28	Tout d'abord je ne suis pas du tout sûr du programme de seconde. Après une première mouture il y en a eu une deuxième, mais paraît-il refusé par le CSE (je ne sais pas qui c'est!), alors je reste zen et en gros je fais ce que j'estime être juste pour les années après. Mais avec des difficultés car les imbéciles qui changent les programme font tout à l'envers. En effet je ne peux travailler qu 'avec un objectif précis, à savoir les connaissances nécessaires pour la première, et la-dessus on a rien. Alors coooooool!
	P29	--------------------------
	P30	---------------------------
	P31	---------------------------
	P32	------------------------------
P-APMEP	P33	Je n'en connais les raisons. je ne pense pas que cela soit préjudiciable à la suite des études, car ces notions étaient très peu, voire pas du tout réinvesties (en dehors du programme de spécialité de Terminale S**).**
	P34	Je le regrette car les nb premiers intéressent et intriguent les élèves ; la démonstration qu'il y en a une infinité, leur utilisation en cryptographie.
	P35	C'est un choix mais tellement de notions manquent désormais aux élèves que ce n'est pas celui que je regrette le plus (transformation)
	P36	L'arithmétique permettait de donner du sens à des règles opératoires sur les fractions. Celles-ci vont devenir encore plus des recettes bien maitrisées par les élèves, qui vont butter sur des comparaisons ou simplifier simples en probabilité.
	P37	Bien ! car un travail limité à 2 ou 4h sur l'année, n'est pas pertinent.
	P38	Les élèves n'ont plus de moyen de simplifier rapidement et au maximum des fractions. A l'heure d'Internet où l'a sait l'importance des nombres premiers, on se demande ce que fait l'institution
	P39	Raisons : on ne peut pas tout faire avec le même horaire en introduisant en plus d'algorithmes, …
	P40	L'enseignement de l'arithmétique me parait souhaitable au lycée, mais avec un contenu plus riche que celui qui figurait dans le programme de seconde jusqu'en 2009. L'arithmétique permet de raisonner de manière riche et logique, mais plutôt sur des contenus suscitant la curiosité et l'intérêt du types de ceux qui figurent dans le programme de spécialité en TS.
	P41	Pour des techniques à étude coutres, ça ne me gêne pas de ne plus les enseigner. Mais pour tous les autres, bien sur que oui. Il parait qu'à partir de la 1ere, comme il n'y aura pas de tronc commun en Maths (et aussi les sciences en général) soit disant, les programmes peuvent donc la remettre à l'honneur.
	P42	Raison : faire de la place à d'autres domaines (algorithmique, probas, début des vecteurs etc.) Conséquence : davantage de difficultés à manier les entiers, à connaitre les tables de X, les calculs élémentaires. Ajouter des fractions, réduire des radicaux deviennent beaucoup plus laborieux.
	P43	C'est surprenant de supprimer l'arithmétique alors que l'algorithmique fait

		son entrée dans les programmes car l'arithmétique est un champ intéressant d'application de l'algorithmique. On aurait pu aussi utiliser l'arithmétique pour illustrer les notions de logique, et quantification qui font aussi leur apparition dans les nouveaux programmes de 2d.
	P44	Question de mode + introduction Algorithme.
	P45	Peu d'importance, si ce n'est qu'une partie du programme du collège ne ''sert '' plus ensuite.
	P46	C'est dommage … parce que c'est un « jolie » sujet, des types de raisonnements dont les élèves n'ont pas l'habitude. D'un autre coté, ce n'est pas indispensable, et comme on manque toujours de temps pour traiter le programme, cet allégement est le bienvenu.
	P47	En fait seul la décomposition en facteurs premiers disparait, car ils connaissent la même chose qu'avant en collège. Donc on peut toujours poser des problèmes qui utilisent PGCD et PPCM, mais sans passer par les nombres premiers……..
	P48	Je ne sais pas attrister de cette disparation car on en faisait assez peu et c'était repris en T spécialité.
	P49	C'est dommage, car je m'appuis bcp en TS sur les connaissances de seconde, de plus les élèves réussissaient bien et appréciaient ce chapitre.
	P50	Pas trop d'idées, ce qui m'inquiète d'avantage, c'est ce qui m'apparait comme la disparation des raisonnements mathématiques.
	P51	Je regrette la disparation, mais elle était inévitable pour que seuls les élèves de spé maths en TS avaient l'occasion de poursuivre cette étude. Dommage que les élèves ne puissent pas faire la différence entre travailler avec des nombres entiers et travailler avec des nombres réels.
	P52	C'est dommage car utile pour simplifier des fractions (décomposition de grands nombres).
	P53	Vue la place qu'elle occupait avant, ça ne va pas changer grand-chose. La principale utilisation était de rendre des fractions irréductibles
	P54	L'arithmétique a été introduite en seconde en 2000. On y consacrait très peu de temps et les applications en cryptologie notamment (ce qui était l'objectif de cette introduction) ne se sont pas faites (trop difficile ? Pas assez de temps ?) Par ailleurs les applications pratiques étaient peu intéressantes.

Q2. Pensez-vous que la disparition de l'arithmétique, spécifiquement des contenus nombre premier et décomposition en facteurs premiers, implique une perte en termes d'organisation des apprentissages mathématiques pour la classe de seconde? Si oui, pouvez-vous donner des exemples ?

P-E	P1 (Sartre) 30 élèves	Le calcul sur les fractions et sur les nombres avec radicaux étant déjà très difficile une fréquentation réduite dans le temps des propriétés arithmétiques des nombres ne me semblent pas aller dans le bon sens. Les confusions produit /exposant fréquentes ne trouveront pas de solution par la suppression de la fréquentation des nombres. Pour moi ce qui manque avant tout c'est le temps ! une maturation suffisamment longue et intense est nécessaire pour qu'une culture des nombres soit bien assimilée par nos élèves.
	P2	---------------------
	P3	---------------------
	P4	---------------------
	P5	---------------------
	P6	---------------------
	P7	*En ce qui concerne la décomposition en produit de facteurs premiers, je ne pense* vraiment pas que cette suppression va changer quelque chose car nous y passions trop peu de temps pour que cette étude soit pertinente. Pour trouver le PGCD de deux nombres, la plupart des élèves de seconde reprennent l'algorithme d'Euclide ! Parce qu'ils l'ont vu en $3^{ème}$ et qu'il est souvent plus facile pour eux à manipuler qu'une décomposition en facteurs premiers. Ce qui est dommage c'est que c'est mécanique et que très peu d'entre eux seraient capables de donner une démonstration (même partielle) de cet algorithme. Dans le programme de seconde, on utilisait aussi la décomposition pour simplifier des écritures avec radicaux. Mais c'était déjà fait en troisième, et la systématisation du procédé avec la décomposition en facteurs premiers n'était pas passionnante ! Je pense que dans le calcul numérique mental, on peut toujours mettre en œuvre un peu d'arithmétique basé sur les critères usuels de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 10 et ne jamais perdre de vue la signification de la division euclidienne. On s'aperçoit en abordant les congruences en TS (spécialité) que cette division euclidienne est bien mal comprise.
	P8	-----------------------
	P9	-----------------------
	P10	-----------------------
P	P11	-----------------------
	P12	-----------------------
	P13	-----------------------
	P14	-----------------------
	P15	-----------------------
	P16	-----------------------
	P17	-----------------------
	P18	-----------------------
	P19	-----------------------
	P20	-----------------------

P n	P21	-----------------------
	P22	-----------------------
	P23	je ne pense pas.
	P24	------------------------------
	P25	----------------------------
	P26	-------------------------------
	P27	Sans pouvoir l'affirmer à 100 %, il me semble que les élèves qui ont grandi avec une calculatrice sont moins familiers avec les nombres, et notamment avec les nombres entiers, que leurs lointains ainés qui avaient pratiqué beaucoup de calcul mental et posé. Du coup, j'observe des erreurs qui me surprennent souvent : produit de deux nombres pairs qui donnerait un résultat impair, puissance de 2 qui serait multiple de 3, ce genre de choses. Peut-être qu'une pratique régulière de l'arithmétique (un chapitre dans chaque classe de la $6^{ème}$ à la 2de ou même à la TS) permettrait de pallier ce problème.
	P28	Pour ce qui est de la suppression de l'arithmétique, je n'ai pas grand chose à dire. L'utilisation systématique des nombres premiers pour simplifier des fractions ou des racines me semble artificielle. L'existence de diviseurs premiers et la décomposition en produit de facteurs premiers viendront assez tôt en TS ou 1L Spé maths. Par contre, comme il est question d'algorithmique, je traiterai ces deux derniers thèmes mais uniquement sur le plan algorithmique. J'espère apporter de l'eau pas trop saumâtre à votre travail.
	P29	--------------------
	P30	--------------------
	P31	--------------------
	P32	--------------------
P-APMEP	P33	Non, je ne le pense.
	P34	On pourra bien s'en passer, mais on perd une occasion de travailler intélligement sur des puissances et de montrer que faire des calculs simples est plus formateur que de mal utiliser des outils de calcul automatiques.
	P35	Au début de ma carrière, les élèves les moins bons (CPPN) apprenaient les décompositions en facteurs premiers, cela ne me parait pas être prioritaire. L'arithmétique peut être intéressante si elle apporte aux élèves une autre vision des nombres sans les surcharger des méthodes à connaitre. Pour certains, elle peut être un thème de recherche.
	P36	Voir 1 (L'arithmétique permettait de donner du sens à des règles opératoires sur les fractions. Celles-ci vont devenir encore plus des recettes bien maitrisées par les élèves, qui vont butter sur des comparaisons ou simplifier simples en probabilité)
	P37	Non ! on peut travailler la démarche scientifique autour d'autres notions.
	P38	Non, c'est juste la perte de contenus simples (programme de 5° au débat des années 80) et ludiques. (Il n'est que de voir l'importance de l'arithmétique du championnat des jeux mathématiques et logiques).
	P39	Oui évidement car sans faire trop de techniques cela permettait d'entrainer à décomposer des nombres entiers, donc une meilleure

		connaissance des nombres.
	P40	Ce qui se perd, on s'est perdu, et c'est lié seulement en partie à cette disparition, c'est l'habilité en calcul mental, la maitrise des fractions, des proportions et des ordres de grandeurs. Cela est aussi beaucoup lié à la déminition des compétences en calcul mental dès l'école primaire, à un recours peut –être trop systématique aux calculatrice pour des calculs élémentaire.
	P41	Pour une seconde générale et technologique, c'est bien sur ennuyeux cette méconnaissance des nombres entiers qui va entrainer l'incompréhension des codages, des clés…, (qui sont des problèmes pratiques) mais aussi une autre forme de raisonnement qui n'implique pas la géométrie affine, vectorielle analytique, les statiques, les probabilités, l'analyse, l'algèbre.
	P42	Oui, voir ci- dessus.
	P43	Non.
	P44	Pour faire aimer les maths, il faut faire connaitre les nombres.
	P45	Non.
	P46	Non, je pense que c'était un chapitre relativement indépendant du reste.
	P47	Non.
	P48	La disparation est peut être difficile mais rien n'empêche dans l'algorithmique de faire faire du calcul mental sur les entiers. Cette disparation n'en pas du tout dramatique.
	P49	Non.
	P50	Oui, pour l'analogie avec calculs sur fractions. En TS difficultés de minutie des démonstrations ont parfois l'impressionner d'enfoncer des pertes ouvertes ».
	P51	La décomposition en nombres premiers me semble surtout utile, pour montrer que tous les nombres jusqu'aux rationnels peuvent s'obtenir à l'aide de ces seuls nombres, et qu'ensuite il y a une rupture. La richesse du travail possible sur les nombres premiers fait regretter la disparition de ce contenu. Le travail arithmétique avec des classes de 2d coopératives pourrait être très intéressant. Recherche de la clé ZNSEE (division euclidienne de nombres trop grands pour la calculatrice) le codage affine. Le travail sur la division euclidienne et la notion de reste pourrait être bien plus important et fournir beaucoup d'exemples intéressants. Dans une 2d peu intéressé, l'arithmétique ne fournit que quelques techniques de calcul vite oubliées.
	P52	Oui, mais dans le mesure où c'est en 3ème c'est moins inquiétant.
	P53	NON. Remarque : J'enseigne dans un établissement qui ne comporte qu'une classe de seconde composée d'environ 10 élèves tous destinés à faire une 1STG. Aussi, mon public est donc particulier et le programme n'est pas approfondi car je me concentre sur les notions qui leur serviront l'année suivante.Il est vrai que dans une classe « normale » ce doit être intéressant d'approfondir ces notions… et je pense que les élèves aiment bien cette partie du programme (en 3°, les élèves accrochent bien car ce sont des « recettes » à appliquer !)
	P54	Non ! Je ne pense pas qu'il y aura désorganisation. Le peu qui était fait sera rapidement rattrapé dans une classe ultérieure si nécessaire.

Annexe 5 : Question 2

Lycée	Fréquence
Lycée Du parc	3
Lycée J. Brel Véniseu	3
Lycée Ampère Lyon	3
Lycée Al kindi	2
Lycée François Mauriac Bordeaux	2
Lycée S.Allende Hérouville St Clair	2
Lycée Sembat (venissieux)	1
Lycée Privé Aux Lazaristes	1
Albert Camus Rillieux –le-pape	1
Jean Perrin	1
A. Camus – Firminy	1
Lycée Descartes – st- genis – Laval	1
Lycée Fays (Villeurbanne)	1
lycée Louis et Auguste Lumière à Lyon	1
lycée Jean-Paul Sartre BRON	1
lycée Paul Langevin Suresnes	1
lycée Aubanel Avignon	1
Lycée Sud Médoc Le Taillan Médoc	1
Collège Catherine de Vivonne – Rambouillet	1
lycée Marie Reynoard, Villard Bonnot	1
Lycée F.Mauriac - Andrézieux	1
Lycée Barthélémy de Laffemas, à Valence.	1
lycée Marseilleveyre (Marseille)	1
Lycée P.Méchain Laon	1
Lycée Fresnel CAEN	1
Lycée Jean Monnet à Vetraz – Monthoux	1
Lycée Baudelaire –Cran – Gevrier	1
Lycée Mme de Stael – Saint Julien en Genevois	1
Lycée S. Valadon – Limoges	1
Lycée Collège et lycée International. Lyon	1
Lycée Julien Wittmer - Charolles	1
Lycée St Joseph la Providence	1
Lycée Brocéliande – Guer	1
Lycée Charles de Gaulle- Rosny –sous –Bois	1
Lycée Anne de Méjanès Metz	1
Lycée De la salle Metz	1
Lycée n'est nommé que la région	2
NR dont une à la retraite	5
Total	54

Annexe 6 : Questionnaires – Elèves

Questionnaire élève de seconde

Ce travail fait partie d'une recherche sur l'enseignement des mathématiques et ne sera pas utilisé pour vous évaluer (le questionnaire est anonyme). Nous vous demandons de bien vouloir répondre aux questions en justifiant soigneusement vos réponses et sans utiliser de brouillon (n'hésitez pas à utiliser le dos des feuilles pour y faire les calculs nécessaires en précisant le numéro de la question). Pour les besoins de la recherche, le travail doit être fait individuellement et sans utiliser la calculatrice.
Merci d'avance pour votre participation !

Lycée :
Classe :

Question 1. Comment expliqueriez-vous à un élève de troisième ce qu'est l'Arithmétique ?

Question 2. Pouvez – vous expliquez les expressions suivantes :

- « être divisible par » :
- « être multiple de » :
- « être diviseur de » :
- « être le pgcd de » :
- « être le ppcm de » :
- « être un nombre premier » :
- « être un nombre non premier » :

Question 3. Déterminez le pgcd de 72 et 132 en utilisant si possible deux méthodes différentes.

Question 4.

- Soit $A = 6 \times 147 + 1$. A est-il divisible par 2 ?

- Soit $B = 6 \times 147 + 2$. B est-il divisible par 2 ?

Question 5. Soit $M = 3^2 \times 5^2 \times 7$

5a) M est-il divisible par : 7, 9, 2, 11,63 ? Justifiez votre réponse.

5b) $B = 3^2 \times 5^3 \times 7$, B est- il diviseur de M et pourquoi ?

5c) $F= 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$, est- il multiple de M et pourquoi ?

Question 6. Soit $A = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ et $C = 3^3 \times 5^4 \times 7 \times 11$

Donner un multiple commun de ces deux nombres.

Question 7. Les nombres suivants sont-ils premiers ? Justifier votre réponse.

7a) 98 :

7b) 89

7c) 599

L’enseignement de l’arithmétique en France au collège à la transition collège/Lycée

Dans ce travail de recherche, nous nous intéressons à une étude didactique de l’arithmétique au sens de théorie élémentaire des nombres dans l’objectif d'étudier certains choix de l'enseignement de l’arithmétique en France depuis le début du XX° siècle et d'identifier certaines contraintes institutionnelles après la réintroduction de l’arithmétique dans l’enseignement secondaire au début du XX1° siècle, ainsi que les effets de ces contraintes sur la pratique des enseignants et les acquis des élèves. Nous avons tout d'abord conduit une analyse épistémologique pour décrire les organisations mathématiques et les choix de définitions dans le savoir savant, que nous avons complété par un état des lieux sur les travaux antérieurs dans le monde anglo-saxon d’une part, et dans les travaux français d’autre part.

Nous conduisons ensuite une analyse institutionnelle de l’arithmétique dans une perspective écologique pour dégager les différents systèmes de contraintes et de conditions qui pèsent sur les évolutions de ce savoir au cours du processus de transposition didactique interne, en analysant les programmes et les manuels dans deux institutions : au collège et en classe de seconde à partir de la réforme de 1902, jusqu’en 2010. Nous cherchons dans les programmes et les manuels des traces des organisations mathématiques de référence au collège et en classe de seconde pour l’objet d’arithmétique et les différents types de définitions. Nous poursuivons par une étude des rapports personnels des enseignants et des élèves aux objets de savoir en jeu en classe de seconde, pour confronter ensuite les réponses des enseignants avec la réponse de leurs élèves. Nos travaux montrent une très grande instabilité des contenus d’arithmétique dans le curriculum français au collège et à la transition collège/ lycée.

Mots clés : Didactique des mathématiques, arithmétique, collège, Seconde, approche écologique, praxéologique, rapport institutionnel, rapport personnel